ŒUVRES

DE

CHARLES HERMITE.

TOME III.

SUR

L'EXTENSION DU THÉORÈME DE M. STURM

A UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS SIMULTANÉES [1].

Mémoire inédit.

J'ai présumé longtemps que la question traitée dans ce Mémoire dépendait de l'extension des principes du calcul des résidus aux fonctions de plusieurs variables. On sait, en effet, que Cauchy a tiré de ce calcul son beau théorème sur la détermination du nombre des racines imaginaires d'une équation à une inconnue qui sont renfermées dans un contour donné. En réfléchissant sur les méthodes de l'illustre géomètre, il me semblait que des théorèmes analogues pour des équations simultanées devraient résulter de l'état des

---

[1] Nous publions ici un Mémoire présenté à l'Académie par Hermite, le 12 juillet 1852, et retrouvé dans les papiers de Liouville par sa fille M[me] de Blignières, qui a bien voulu nous le donner pour cette édition. Ce Mémoire avait été renvoyé à une Commission composée de Cauchy, Liouville et Sturm. Aucun Rapport n'a été fait; une Note a seulement été publiée dans les *Comptes rendus* et elle se trouve reproduite dans le Tome I de ces *Œuvres* (p. 281). E. P.

diverses valeurs que peut prendre une même intégrale double, lorsqu'en conservant les limites on substitue des fonctions imaginaires quelconques aux variables réelles de l'intégration. C'est ainsi qu'en désignant par $F(z, z')$, $\Phi(z, z')$ les premiers membres de deux équations simultanées, j'ai été conduit à la recherche des valeurs multiples de l'intégrale $\displaystyle\iint \frac{\frac{dF}{dz}\frac{d\Phi}{dz'} - \frac{d\Phi}{dz}\frac{dF}{dz'}}{F\Phi}, dz\,dz'$, qui me semblait devoir jouer un rôle analogue à celui de l'intégrale simple $\displaystyle\int \frac{F'_z}{F}\,dz$ dans la théorie des équations à une inconnue. Un grand nombre d'autres questions que je ne puis indiquer ici et qui se rapportent aux fonctions périodiques de plusieurs variables, m'amenaient encore à cette même recherche, et je ne puis douter qu'elles n'ouvrent un jour à l'analyse le plus vaste champ de découvertes. Mais, arrêté à plusieurs reprises par des difficultés qui me semblent bien au-dessus de mes forces, je ne sais s'il me sera jamais donné d'y faire quelque progrès. Aussi est-ce à d'autres principes que se rattachent les considérations développées dans ce Mémoire. Je dois indiquer d'abord les belles expressions découvertes par M. Sylvester pour les fonctions auxiliaires qui figurent dans le théorème de M. Sturm, et celles que M. Cayley en a déduites, comme m'ayant ouvert une voie nouvelle. Ce sont, en effet, des formules analogues à celles de ces deux savants géomètres qui seront posées *a priori* pour des équations simultanées, et dont on conclut avec facilité des propriétés toutes semblables à celles des fonctions de M. Sturm.

I. Nous considérerons en premier lieu une équation à une inconnue $F(x) = 0$, et nous désignerons ses racines par $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Soit encore S_i la somme symétrique des puissances semblables $x_1^i + x_2^i + \ldots + x_m^i$; avec les quantités $S_1, S_2, \ldots, S_{2m-1}$ et une indéterminée λ, composons le système linéaire :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} S_1-\lambda, & S_2, & S_3, & \ldots, & S_m, \\ S_2, & S_3-\lambda, & S_4, & \ldots, & S_{m+1}, \\ S_3, & S_4, & S_5-\lambda, & \ldots, & S_{m+2}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ S_m, & S_{m+1}, & S_{m+2}, & \ldots, & S_{2m-1}-\lambda. \end{array}\right.$$

Le déterminant de ce système sera un polynome entier en λ du degré m, que nous représenterons ainsi :

$$\Lambda = \Lambda_0 + \lambda\Lambda_1 + \lambda^2\Lambda_2 + \ldots + (-1)^m\lambda^m.$$

Comme le système (1) est symétrique, l'équation $\Lambda = 0$ aura toujours ses racines réelles; cette propriété importante, démontrée pour la première fois par M. Cauchy dans ses recherches sur les inégalités séculaires du mouvement elliptique des planètes, sera fondamentale dans ce Mémoire. Mais voici d'abord la forme nouvelle sous laquelle nous présentons le théorème de M. Sturm.

Soit $\Lambda(\xi)$ ce que devient le polynome Λ, lorsqu'on considère l'équation $F(x+\xi) = 0$, au lieu de la proposée, et v_ξ le nombre de ses variations pour une valeur donnée de la quantité ξ; le nombre des racines réelles de l'équation $F(x) = 0$, qui sont comprises entre deux limites quelconques ξ_0 et ξ_1, sera représenté en supposant $\xi_1 > \xi_0$ par la différence $v_{\xi_0} - v_{\xi_1}$.

Les coefficients des diverses puissances de λ, dans le polynome $\Lambda(\xi)$, sont ainsi des fonctions entières de ξ, qui forment un système non identique, mais analogue à celui des fonctions auxiliaires de M. Sturm et qui conduisent absolument au même résultat.

Considérons en second lieu deux équations à deux inconnues

$$F(x, y) = 0, \qquad \Phi(x, y) = 0,$$

que nous supposerons d'abord générales et du degré m chacune; soient

$$\begin{array}{llll} x = x_1, & x = x_2, & \ldots, & x = x_{m^2}, \\ y = y_1, & y = y_2, & \ldots, & y = y_{m^2}, \end{array}$$

leurs diverses solutions simultanées, et $S_{i,j}$ la somme symétrique $x_1^i y_1^j + x_2^i y_2^j + \ldots + x_{m^2}^i y_{m^2}^j$; nous représenterons pour abréger par (ω) le système linéaire

$$\begin{array}{lllll} S_{1\omega}, & S_{2\omega}, & S_{3\omega}, & \ldots, & S_{m\omega}, \\ S_{2\omega}, & S_{3\omega}, & S_{4\omega}, & \ldots, & S_{m+1\omega}, \\ S_{3\omega}, & S_{4\omega}, & S_{5\omega}, & \ldots, & S_{m+2\omega}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ S_{m\omega}, & S_{m+1\omega}, & S_{m+2\omega}, & \ldots, & S_{2m-1\omega}. \end{array}$$

En attribuant à l'indice ω les valeurs $1, 2, \ldots, m$, on aura un système que nous réunirons de la manière suivante :

$$\begin{array}{lllll}
(1), & (2), & (3), & \ldots, & (m), \\
(2), & (3), & (4), & \ldots, & (m+1), \\
(3), & (4), & (5), & \ldots, & (m+2), \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
(m), & (m+1), & (m+2), & \ldots, & (2m-1),
\end{array}$$

ce qui donne un système à m^2 colonnes dont la loi est facile à saisir. Cela posé, retranchons des termes en diagonale une même quantité λ, et formons le déterminant; nous obtiendrons un polynome en λ du degré m^2 que nous représenterons ainsi :

$$\Lambda = \Lambda_0 + \lambda\Lambda_1 + \lambda^2\Lambda_2 + \ldots + (-1)^{m^2}\lambda^{m^2},$$

et qui nous conduira à étendre le théorème de M. Sturm à deux équations simultanées.

Considérons pour cela les deux inconnues x et y, comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point rapporté à deux axes rectangulaires, de sorte qu'à chaque solution des équations proposées, telle que

$$x = x_i,$$
$$y = y_i.$$

corresponde un point déterminé. L'objet de notre proposition est de déterminer le nombre de ces points qui sont renfermés dans l'intérieur d'un rectangle donné. A cet effet, soit $\Lambda(\xi, \eta)$ ce que devient Λ lorsqu'on considère les équations

$$\mathrm{F}(x+\xi, y+\eta) = 0, \qquad \Phi(x+\xi, y+\eta) = 0,$$

au lieu des proposées, et $v_{\xi,\eta}$ le nombre de ses variations pour des valeurs données de ξ et η.

Le nombre des solutions renfermées dans l'intérieur du rectangle ayant pour coordonnées de ses sommets

$$\begin{array}{llll}
x = \xi_0, & x = \xi_0, & x = \xi_1, & x = \xi_1, \\
y = \eta_0, & y = \eta_1, & y = \eta_0, & y = \eta_1,
\end{array}$$

sera donnée par l'expression

$$\frac{v_{\xi_1,\eta_1} + v_{\xi_0,\eta_0} - v_{\xi_0,\eta_1} - v_{\xi_1,\eta_0}}{2}.$$

II. La démonstration des théorèmes que nous venons d'énoncer repose, dans le cas des équations à une inconnue comme dans le cas des équations simultanées, sur l'expression en fonction des racines des deux premiers termes Λ_0 et Λ_1 des fonctions Λ. Voici d'abord cette recherche pour les équations à une inconnue, en suivant la méthode propre au second cas et dont on verra ainsi le principe avec plus de facilité.

La quantité Λ_0 est évidemment la valeur du polynome Λ pour $\lambda = 0$; c'est donc le déterminant du système

$$\begin{array}{lllll}
\mathrm{S}_1, & \mathrm{S}_2, & \mathrm{S}_3, & \ldots, & \mathrm{S}_m, \\
\mathrm{S}_2, & \mathrm{S}_3, & \mathrm{S}_4, & \ldots, & \mathrm{S}_{m+1}, \\
\mathrm{S}_3, & \mathrm{S}_4, & \mathrm{S}_5, & \ldots, & \mathrm{S}_{m+2}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
\mathrm{S}_m, & \mathrm{S}_{m+1}, & \mathrm{S}_{m+2}, & \ldots, & \mathrm{S}_{2m-1}.
\end{array}$$

Quant à Λ_1, il suffit d'un peu d'attention pour reconnaître que c'est la somme prise en signe contraire de tous les déterminants à $m-1$ colonnes que fournit le système précédent, lorsqu'on fait abstraction d'une colonne horizontale de rang quelconque telle que $\mathrm{S}_i, \mathrm{S}_{i+1}, \ldots, \mathrm{S}_{i+m-2}$, et de la colonne verticale composée des mêmes termes. D'après cela, si l'on considère le système des équations linéaires

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l}
\mathrm{S}_1 z_1 + \mathrm{S}_2 z_2 + \mathrm{S}_3 z_3 + \ldots + \mathrm{S}_m z_m = \mathrm{Z}_1, \\
\mathrm{S}_2 z_1 + \mathrm{S}_3 z_2 + \mathrm{S}_4 z_3 + \ldots + \mathrm{S}_{m+1} z_m = \mathrm{Z}_2, \\
\mathrm{S}_3 z_1 + \mathrm{S}_4 z_2 + \mathrm{S}_5 z_3 + \ldots + \mathrm{S}_{m+2} z_m = \mathrm{Z}_3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\mathrm{S}_m z_1 + \mathrm{S}_{m+1} z_2 + \mathrm{S}_{m+2} z_3 + \ldots + \mathrm{S}_{2m-1} z_m = \mathrm{Z}_m,
\end{array}\right.$$

et qu'on le résolve par rapport aux quantités z, de manière à obtenir

$$\begin{array}{l}
z_1 = \mathrm{A}_1^1 \mathrm{Z}_1 + \mathrm{A}_2^1 \mathrm{Z}_2 + \mathrm{A}_3^1 \mathrm{Z}_3 + \ldots + \mathrm{A}_m^1 \mathrm{Z}_m, \\
z_2 = \mathrm{A}_1^2 \mathrm{Z}_1 + \mathrm{A}_2^2 \mathrm{Z}_2 + \mathrm{A}_3^2 \mathrm{Z}_3 + \ldots + \mathrm{A}_m^2 \mathrm{Z}_m, \\
z_3 = \mathrm{A}_1^3 \mathrm{Z}_1 + \mathrm{A}_2^3 \mathrm{Z}_2 + \mathrm{A}_3^3 \mathrm{Z}_3 + \ldots + \mathrm{A}_m^3 \mathrm{Z}_m, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
z_m = \mathrm{A}_1^m \mathrm{Z}_1 + \mathrm{A}_2^m \mathrm{Z}_2 + \mathrm{A}_3^m \mathrm{Z}_3 + \ldots + \mathrm{A}_m^m \mathrm{Z}_m.
\end{array}$$

Λ_0 sera le dénominateur commun des quantités A, et $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0}$ sera la valeur changée de signe de la somme des termes en diagonale $\mathrm{A}_1^1 + \mathrm{A}_2^2 + \mathrm{A}_3^3 + \ldots + \mathrm{A}_m^m$.

Cela posé, nous observerons qu'en introduisant m inconnues auxiliaires $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$, on peut remplacer le système des équations (1) par les deux suivants :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \ldots + \zeta_m = Z_1, \\ x_1\zeta_1 + x_2\zeta_2 + x_3\zeta_3 + \ldots + x_m\zeta_m = Z_2, \\ x_1^2\zeta_1 + x_2^2\zeta_2 + x_3^2\zeta_3 + \ldots + x_m^2\zeta_m = Z_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_1^{m-1}\zeta_1 + x_2^{m-1}\zeta_2 + x_3^{m-1}\zeta_3 + \ldots + x_m^{m-1}\zeta_m = Z_m, \end{array}\right.$$

et

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \zeta_1 = x_1 z_1 + x_1^2 z_2 + x_1^3 z_3 + \ldots + x_1^m z_m, \\ \zeta_2 = x_2 z_1 + x_2^2 z_2 + x_2^3 z_3 + \ldots + x_2^m z_m, \\ \zeta_3 = x_3 z_1 + x_3^2 z_2 + x_3^3 z_3 + \ldots + x_3^m z_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \zeta_m = x_m z_1 + x_m^2 z_2 + x_m^3 z_3 + \ldots + x_m^m z_m, \end{array}\right.$$

comme on le voit immédiatement par la substitution des valeurs des quantités ζ. De là résulte d'abord, par l'une des propositions élémentaires de la théorie des déterminants, que Λ_0 sera le produit des déterminants relatifs aux équations (2) et (3); or il est visible que le second n'est autre que le premier multiplié par le produit $x_1 x_2 x_3 \ldots x_m$; ainsi, nous avons cette égalité :

$$\Lambda_0 = \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_m \\ S_2 & S_3 & S_4 & \ldots & S_{m+1} \\ S_3 & S_4 & S_5 & \ldots & S_{m+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_m & S_{m+1} & S_{m+2} & \ldots & S_{2m-1} \end{vmatrix}$$

$$= x_1 x_2 x_3 \ldots x_m \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_m^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & x_3^{m-1} & \ldots & x_m^{m-1} \end{vmatrix}^2.$$

Si nous n'avions en vue que les équations à une inconnue, nous pourrions nous arrêter ici, car on sait que le carré du déterminant par lequel se trouve exprimé Λ_0, est le produit des différences des racines x, prises deux à deux, de toutes les manières possibles, mais cette donnée nous manquera dans la question analogue relative aux équations simultanées; aussi nous allons, dès à présent, recourir à la méthode suivante. Introduisant un nouveau système de quantités auxiliaires $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m-1}$, nous poserons

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \zeta_1 = \dfrac{\eta_0 + x_1\eta_1 + x_1^2\eta_2 + \ldots + x_1^{m-1}\eta_{m-1}}{F'(x_1)}, \\ \zeta_2 = \dfrac{\eta_0 + x_2\eta_1 + x_2^2\eta_2 + \ldots + x_2^{m-1}\eta_{m-1}}{F'(x_2)}, \\ \zeta_3 = \dfrac{\eta_0 + x_3\eta_1 + x_3^2\eta_2 + \ldots + x_3^{m-1}\eta_{m-1}}{F'(x_3)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \zeta_m = \dfrac{\eta_0 + x_m\eta_1 + x_m^2\eta_2 + \ldots + x_m^{m-1}\eta_{m-1}}{F'(x_m)}, \end{array}\right.$$

$F'(x)$ désignant la dérivée du premier membre de l'équation proposée $F(x) = 0$; maintenant, si l'on substitue les nouvelles inconnues η aux quantités ζ dans les équations (2), il viendra

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \eta_0\sum\dfrac{1}{F'} + \eta_1\sum\dfrac{x}{F'} + \eta_2\sum\dfrac{x^2}{F'} + \ldots + \eta_{m-1}\sum\dfrac{x^{m-1}}{F'} = Z_1, \\ \eta_0\sum\dfrac{x}{F'} + \eta_1\sum\dfrac{x^2}{F'} + \eta_2\sum\dfrac{x^3}{F'} + \ldots + \eta_{m-1}\sum\dfrac{x^m}{F'} = Z_2, \\ \eta_0\sum\dfrac{x^2}{F'} + \eta_1\sum\dfrac{x^3}{F'} + \eta_2\sum\dfrac{x^4}{F'} + \ldots + \eta_{m-1}\sum\dfrac{x^{m+1}}{F'} = Z_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \eta_0\sum\dfrac{x^{m-1}}{F'} + \eta_1\sum\dfrac{x^m}{F'} + \eta_2\sum\dfrac{x^{m+1}}{F'} + \ldots + \eta_{m-1}\sum\dfrac{x^{2m-2}}{F'} = Z_m, \end{array}\right.$$

en représentant, pour abréger, la somme

$$\frac{x_1^\mu}{F'(x_1)} + \frac{x_2^\mu}{F'(x_2)} + \frac{x_3^\mu}{F'(x_3)} + \ldots + \frac{x_m^\mu}{F'(x_m)}$$

par

$$\sum\frac{x^\mu}{F'}.$$

Mais on sait que cette somme est nulle pour toutes les valeurs de μ moindres que $m - 1$, et qu'elle est l'unité pour $\mu = m - 1$ si le coefficient de x^m dans $F(x)$ est lui-même égal à 1. Pour les valeurs supérieures de μ, elle représentera une fonction rationnelle et entière des coefficients du polynome $F(x)$, de sorte qu'en faisant

$$\sum\frac{x^{m-1+i}}{F'} = \sigma_i,$$

les équations (5) prendront la forme

$$
(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\eta_{m-1} &= Z_1,\\
\eta_{m-2} + \sigma_1\eta_{m-1} &= Z_2,\\
\eta_{m-3} + \sigma_1\eta_{m-2} + \sigma_2\eta_{m-1} &= Z_3,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots,\\
\eta_0 + \sigma_1\eta_1 + \sigma_2\eta_2 + \ldots + \sigma_{m-2}\eta_{m-2} + \sigma_{m-1}\eta_{m-1} &= Z_m,
\end{aligned}\right.
$$

et ne contiendront plus les racines $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Mais, comme on le voit, le déterminant relatif à un pareil système est simplement $(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}$; il est d'ailleurs égal au produit des déterminants relatifs aux systèmes (2) et (4); le système (4) lui-même donne pour déterminant celui du système (2), divisé par le produit $F'(x_1)\,F'(x_2)\,F'(x_3)\ldots F'(x_m)$; on en conclut l'expression suivante que nous voulions obtenir, savoir

$$\Lambda_0 = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} x_1 x_2 \ldots x_m\, F'(x_1)\, F'(x_2) \ldots F'(x_m).$$

III. L'introduction des inconnues η n'avait pas seulement pour objet de nous conduire à la valeur de Λ_0; elle nous servira aussi à la résolution des équations (1) et, par suite, à la détermination des quantités A et à celle de $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0}$. J'observerai d'abord que les équations (3) peuvent être mises absolument sous la même forme que les équations (6). Multiplions-les respectivement par les quantités $\frac{1}{x_1 F'(x_1)}, \frac{1}{x_2 F'(x_2)}, \ldots, \frac{1}{x_m F'(x_m)}$, en les ajoutant et se servant, pour abréger, du signe $\sum$, comme plus haut; il viendra d'abord

$$z_m = \frac{\zeta_1}{x_1 F'_{x_1}} + \frac{\zeta_2}{x_2 F'_{x_2}} + \ldots + \frac{\zeta_m}{x_m F'_{x_m}} = \sum \frac{\zeta}{x F'(x)},$$

et si l'on continue de même en prenant pour multiplicateurs les quantités $\frac{x^\mu}{F'_x}$, on arriva au système suivant :

$$
(7)\quad \left\{\begin{aligned}
z_m &= \sum \frac{\zeta}{x F'_x},\\
z_{m-1} + \sigma_1 z_m &= \sum \frac{x\zeta}{x F'_x},\\
z_{m-2} + \sigma_1 z_{m-1} + \sigma_2 z_m &= \sum \frac{x^2\zeta}{x F'_x},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots,\\
z_1 + \sigma_1 z_2 + \sigma_2 z_3 + \ldots + \sigma_{m-2} z_{m-1} + \sigma_{m-1} z_m &= \sum \frac{x^{m-1}\zeta}{x F'_x}.
\end{aligned}\right.
$$

Cela posé, il est facile de voir que la résolution des équations (6) donne des résultats de cette forme, savoir :

$$
\begin{aligned}
\eta_0 &= Z_m + \omega_1 Z_{m-1} + \omega_2 Z_{m-2} + \ldots + \ldots\ldots\ldots + \omega_{m-2} Z_2 + \omega_{m-1} Z_1,\\
\eta_1 &= Z_{m-1} + \omega_1 Z_{m-2} + \omega_2 Z_{m-3} + \ldots + \ldots\ldots\ldots + \omega_{m-2} Z_1,\\
\eta_2 &= Z_{m-2} + \omega_1 Z_{m-3} + \omega_2 Z_{m-4} + \ldots + \omega_{m-3} Z_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\eta_{m-2} &= Z_2 + \omega_1 Z_1,\\
\eta_{m-1} &= Z_1.
\end{aligned}
$$

Les quantités ω étant des fonctions rationnelles et entières des quantités σ, et, par suite, des coefficients de l'équation $F(x) = 0$. Si donc on fait

$$
\begin{aligned}
\Omega_1(x) &= x^{m-1} + \omega_1 x^{m-2} + \omega_2 x^{m-3} + \ldots + \omega_{m-2} x + \omega_{m-1},\\
\Omega_2(x) &= x^{m-2} + \omega_1 x^{m-3} + \omega_2 x^{m-4} + \ldots + \omega_{m-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Omega_{m-1}(x) &= x^2 + \omega_1 x + \omega_2,\\
\Omega_m(x) &= x + \omega_1,
\end{aligned}
$$

on trouvera, par la substitution des quantités η dans les équations (4), les valeurs suivantes :

$$
\begin{aligned}
\zeta_1 &= \frac{\Omega_1(x_1) Z_1 + \Omega_2(x_1) Z_2 + \ldots + \Omega_{m-1}(x_1) Z_{m-1} + Z_m}{F'(x_1)},\\
\zeta_2 &= \frac{\Omega_1(x_2) Z_1 + \Omega_2(x_2) Z_2 + \ldots + \Omega_{m-1}(x_2) Z_{m-1} + Z_m}{F'(x_2)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\zeta_m &= \frac{\Omega_1(x_m) Z_1 + \Omega_2(x_m) Z_2 + \ldots + \Omega_{m-1}(x_m) Z_{m-1} + Z_m}{F'(x_m)}.
\end{aligned}
$$

Maintenant la résolution des équations (7) par rapport aux inconnues z s'effectuera comme celle des équations (6), et donnera les valeurs

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sum \frac{\Omega_1(x)\zeta}{x F'_x} = \frac{\Omega_1(x_1)\zeta_1}{x_1 F'(x_1)} + \frac{\Omega_1(x_2)\zeta_2}{x_2 F'(x_2)} + \ldots + \frac{\Omega_1(x_m)\zeta_m}{x_m F'(x_m)},\\
z_2 &= \sum \frac{\Omega_2(x)\zeta}{x F'_x} = \frac{\Omega_2(x_1)\zeta_1}{x_1 F'(x_1)} + \frac{\Omega_2(x_2)\zeta_2}{x_2 F'(x_2)} + \ldots + \frac{\Omega_2(x_m)\zeta_m}{x_m F'(x_m)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
z_{m-1} &= \sum \frac{\Omega_{m-1}(x)\zeta}{x F'_x} = \frac{\Omega_{m-1}(x_1)\zeta_1}{x_1 F'(x_1)} + \frac{\Omega_{m-1}(x_2)\zeta_2}{x_2 F'(x_2)} + \ldots + \frac{\Omega_{m-1}(x_m)\zeta_m}{x_m F'(x_m)},\\
z_m &= \sum \frac{\zeta}{x F'_x} = \frac{\zeta_1}{x_1 F'(x_1)} + \frac{\zeta_2}{x_2 F'(x_2)} + \ldots + \frac{\zeta_m}{x_m F'(x_m)},
\end{aligned}
$$

enfin, si l'on substitue les valeurs des inconnues ζ précédemment trouvées, il viendra, en employant toujours le signe $\sum$ pour indiquer une somme relative aux racines $x_1, x_2, \ldots, x_m$,

$$z_1 = \sum \frac{\Omega_1(x)[\Omega_1(x)Z_1 + \Omega_2(x)Z_2 + \ldots + \Omega_{m-1}(x)Z_{m-1} + Z_m]}{x\,F'^2(x)},$$

$$z_2 = \sum \frac{\Omega_2(x)[\Omega_1(x)Z_1 + \Omega_2(x)Z_2 + \ldots + \Omega_{m-1}(x)Z_{m-1} + Z_m]}{x\,F'^2(x)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z_{m-1} = \sum \frac{\Omega_{m-1}(x)[\Omega_1(x)Z_1 + \Omega_2(x)Z_2 + \ldots + \Omega_{m-1}(x)Z_{m-1} + Z_m]}{x\,F'^2(x)},$$

$$z_m = \sum \frac{\Omega_1(x)Z_1 + \Omega_2(x)Z_2 + \ldots + \Omega_{m-1}(x)Z_{m-1} + Z_m}{x\,F'^2(x)}.$$

Ce sont là les formules auxquelles nous voulions arriver pour la résolution des équations (1) du paragraphe précédent; on aurait pu les obtenir par une méthode plus directe et plus rapide, mais qu'il n'eût pas été possible d'appliquer aux équations analogues composées avec les solutions simultanées d'un système de deux équations à deux inconnues que nous rencontrerons plus tard; elles donnent, comme on voit, sous une forme élégante, les quantités désignées précédemment par A_k^i, savoir :

$$A_k^i = \sum \frac{\Omega_i(x)\,\Omega_k(x)}{x\,F'^2(x)}$$

et l'on en tire, pour la valeur de $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0}$, cette expression dont le numérateur est une somme de carrés

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} = -(A_1^1 + A_2^2 + \ldots + A_m^m) = -\sum \frac{\Omega_1^2(x) + \Omega_2^2(x) + \ldots + \Omega_{m-1}^2(x) + 1}{x\,F'^2(x)}.$$

IV. Nous avons désigné par $\Lambda(\xi)$ au commencement, ce que devenait le polynome Λ, lorsqu'on considère au lieu de l'équation $F(x) = 0$, la suivante $F(x+\xi) = 0$, et nous avons posé

$$\Lambda(\xi) = \Lambda_0(\xi) + \lambda\,\Lambda_1(\xi) + \ldots + (-1)^m \lambda^m;$$

or, il est facile de passer des valeurs précédemment trouvées de Λ_0 et $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0}$, à celles de $\Lambda_0(\xi)$ et $\frac{\Lambda_1(\xi)}{\Lambda_0(\xi)}$. Et d'abord, comme on le voit de suite, les valeurs de la dérivée $F'(x+\xi)$, lorsqu'on mettra pour x

les racines de l'équation transformée $F(x+\xi) = 0$, ne différeront point des quantités $F'(x_1)$, $F'(x_2)$, etc., de sorte qu'on aura

$$\Lambda_0(\xi) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}(x_1-\xi)(x_2-\xi)\ldots(x_m-\xi) \times F'(x_1)\,F'(x_2)\ldots F'(x_m).$$

Quant aux polynomes $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$, ..., ils deviendront des fonctions rationnelles et entières de ξ; ainsi en posant

$$\Omega_1^2(x) + \Omega_2^2(x) + \ldots + \Omega_{m-1}^2(x) + 1 = \mathfrak{F}(\xi, x),$$

la fonction $\mathfrak{F}$ correspondant à une racine x réelle ne pourra jamais ni s'évanouir ni changer de signe pour aucune valeur de ξ. Ces préliminaires posés, nous allons démontrer que les coefficients des diverses puissances de λ dans le polynome $\Lambda(\xi)$ possèdent les mêmes propriétés que les fonctions qui figurent dans le théorème de M. Sturm. En premier lieu, l'équation $\Lambda(\xi) = 0$, ayant toujours toutes ses racines réelles, il suit d'une conséquence de la règle des signes de Descartes, que les coefficients de deux puissances consécutives de λ ne pourront jamais être supposés nuls en même temps, et que si un coefficient s'évanouit, ceux de la puissance précédente et suivante de λ seront de signes contraires. Si donc on fait croître ξ d'une manière continue de ξ_0 à ξ_1, des changements dans le nombre des variations de $\Lambda(\xi)$ ne pourront survenir qu'autant que ce sera le dernier terme qui viendra à s'annuler. Mais, d'après l'expression obtenue pour ce dernier terme, les valeurs de ξ qui peuvent l'annuler sont uniquement les racines de l'équation proposée. Cela étant, considérons le rapport $\frac{\Lambda_1(\xi)}{\Lambda_0(\xi)}$ dont nous avons obtenu l'expression, savoir :

$$\frac{\Lambda_1(\xi)}{\Lambda_0(\xi)} = -\sum \frac{\mathfrak{F}(\xi, x)}{(x-\xi)\,F'^2(x)} = \sum \frac{\mathfrak{F}(\xi, x)}{(\xi-x)\,F'^2(x)}.$$

Pour une valeur de ξ voisine d'une racine quelconque x, le signe de ce rapport dépendra du seul terme $\frac{\mathfrak{F}(\xi, x)}{(\xi-x)\,F'^2(x)}$; donc, d'après ce que nous avons remarqué sur le numérateur, il sera négatif pour une valeur de ξ un peu inférieure à x, et positif pour une valeur un peu supérieure. Nous voyons donc que la quantité ξ croissant d'une manière continue de ξ_0 à ξ_1, le polynome $\Lambda(\xi)$ perd autant de variations qu'il y a de racines réelles de l'équation $F(x) = 0$, comprises entre ces limites; le nombre de ces racines est donc bien $v_{\xi_0} - v_{\xi_1}$, comme nous l'avons annoncé.

V. Dans la démonstration du théorème analogue au précédent pour deux équations, nous supposons ces équations les plus générales de leur degré, pour n'avoir pas lieu de discuter les cas particuliers qui pourraient s'offrir et où nos formules seraient en défaut. Ces cas particuliers se trouveront d'ailleurs complètement évités dans une autre forme sous laquelle nous présenterons plus tard notre théorème, et qui, moins symétrique à la vérité, se prête plus facilement aux applications numériques. Nous avons pensé utile de présenter d'abord pour deux équations du second degré les calculs des quantités Λ_0 et Λ_1; on peut, en effet, écrire alors en entier les formules qui, en général, sont représentées d'une manière abrégée, et l'on en saisira très facilement le sens.

Nous avons employé, en commençant, le symbole (ω) pour représenter le système

$$\begin{array}{lllll}
S_{1\omega}, & S_{2\omega}, & S_{3\omega}, & \ldots, & S_{m\omega}, \\
S_{2\omega}, & S_{3\omega}, & S_{4\omega}, & \ldots, & S_{m+1\,\omega}, \\
S_{3\omega}, & S_{4\omega}, & S_{5\omega}, & \ldots, & S_{m+2\,\omega}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
S_{m\omega}, & S_{m+1\,\omega}, & S_{m+2\,\omega}, & \ldots, & S_{2m-1\,\omega}.
\end{array}$$

Si l'on suppose $m = 2$, ce système se réduira à

$$\begin{array}{ll}
S_{1\omega}, & S_{2\omega}, \\
S_{2\omega}, & S_{3\omega},
\end{array}$$

de sorte que la fonction Λ sera le déterminant suivant à quatre colonnes, savoir :

$$\Lambda = \begin{vmatrix}
S_{11} - \lambda & S_{21} & S_{12} & S_{22} \\
S_{21} & S_{31} - \lambda & S_{22} & S_{32} \\
S_{12} & S_{22} & S_{13} - \lambda & S_{23} \\
S_{22} & S_{32} & S_{23} & S_{33} - \lambda
\end{vmatrix}.$$

Cela posé, formons le système des équations linéaires :

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l}
S_{11} z_1 + S_{21} z_2 + S_{12} z_3 + S_{22} z_4 = Z_1, \\
S_{21} z_1 + S_{31} z_2 + S_{22} z_3 + S_{32} z_4 = Z_2, \\
S_{12} z_1 + S_{22} z_2 + S_{13} z_3 + S_{23} z_4 = Z_3, \\
S_{22} z_1 + S_{32} z_2 + S_{23} z_3 + S_{33} z_4 = Z_4.
\end{array}\right.$$

Le dénominateur commun des valeurs des inconnues z sera Λ_0, et si ces valeurs sont représentées par les formules

$$\begin{array}{l}
z_1 = A_1^1 Z_1 + A_2^1 Z_2 + A_3^1 Z_3 + A_4^1 Z_4, \\
z_2 = A_1^2 Z_1 + A_2^2 Z_2 + A_3^2 Z_3 + A_4^2 Z_4, \\
z_3 = A_1^3 Z_1 + A_2^3 Z_2 + A_3^3 Z_3 + A_4^3 Z_4, \\
z_4 = A_1^4 Z_1 + A_2^4 Z_2 + A_3^4 Z_3 + A_4^4 Z_4,
\end{array}$$

on aurait, comme précédemment,

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} = -(A_1^1 + A_2^2 + A_3^3 + A_4^4).$$

Or, en introduisant quatre inconnues auxiliaires $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$, nous pourrons remplacer les équations (8) par les suivantes :

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 = Z_1, \\
x_1\zeta_1 + x_2\zeta_2 + x_3\zeta_3 + x_4\zeta_4 = Z_2, \\
y_1\zeta_1 + y_2\zeta_2 + y_3\zeta_3 + y_4\zeta_4 = Z_3, \\
x_1 y_1\zeta_1 + x_2 y_2\zeta_2 + x_3 y_3\zeta_3 + x_4 y_4\zeta_4 = Z_4,
\end{array}\right.$$

et

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\zeta_1 = x_1 y_1 (z_1 + x_1 z_2 + y_1 z_3 + x_1 y_1 z_4), \\
\zeta_2 = x_2 y_2 (z_1 + x_2 z_2 + y_2 z_3 + x_2 y_2 z_4), \\
\zeta_3 = x_3 y_3 (z_1 + x_3 z_2 + y_3 z_3 + x_3 y_3 z_4), \\
\zeta_4 = x_4 y_4 (z_1 + x_4 z_2 + y_4 z_3 + x_4 y_4 z_4),
\end{array}\right.$$

Donc Λ_0, qui est le déterminant relatif aux équations (8) aura pour valeur le produit des déterminants propres aux deux systèmes (9) et (10), ce qui donnera très facilement l'égalité suivante

$$\Lambda_0 = \begin{vmatrix}
S_{11} & S_{21} & S_{12} & S_{22} \\
S_{21} & S_{31} & S_{22} & S_{32} \\
S_{12} & S_{22} & S_{13} & S_{23} \\
S_{22} & S_{32} & S_{23} & S_{33}
\end{vmatrix}$$

$$= x_1 x_2 x_3 x_4 y_1 y_2 y_3 y_4 \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\
x_1 y_1 & x_2 y_2 & x_3 y_3 & x_4 y_4
\end{vmatrix}^2.$$

Cela posé, représentons par $\Delta(x, y)$ la déterminante fonctionnelle relative aux premiers membres de nos deux équations du second degré, $F(x, y) = 0$, $\Phi(x, y) = 0$, c'est-à-dire l'expression

$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, et introduisons les nouvelles quantités auxiliaires $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ par ces formules :

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned}
\zeta_1 &= \frac{\eta_1 + x_1\eta_2 + y_1\eta_3 + x_1y_1\eta_4}{\Delta(x_1, y_1)},\\
\zeta_2 &= \frac{\eta_1 + x_2\eta_2 + y_2\eta_3 + x_2y_2\eta_4}{\Delta(x_2, y_2)},\\
\zeta_3 &= \frac{\eta_1 + x_3\eta_2 + y_3\eta_3 + x_3y_3\eta_4}{\Delta(x_3, y_3)},\\
\zeta_4 &= \frac{\eta_1 + x_4\eta_2 + y_4\eta_3 + x_4y_4\eta_4}{\Delta(x_4, y_4)}.
\end{aligned}\right.$$

On trouvera, par la substitution dans les équations (9), qu'elles se transforment ainsi :

$$\begin{aligned}
\eta_1\sum\frac{1}{\Delta} + \eta_2\sum\frac{x}{\Delta} + \eta_3\sum\frac{y}{\Delta} + \eta_4\sum\frac{xy}{\Delta} &= Z_1,\\
\eta_1\sum\frac{x}{\Delta} + \eta_2\sum\frac{x^2}{\Delta} + \eta_3\sum\frac{xy}{\Delta} + \eta_4\sum\frac{x^2y}{\Delta} &= Z_2,\\
\eta_1\sum\frac{y}{\Delta} + \eta_2\sum\frac{xy}{\Delta} + \eta_3\sum\frac{y^2}{\Delta} + \eta_4\sum\frac{xy^2}{\Delta} &= Z_3,\\
\eta_1\sum\frac{xy}{\Delta} + \eta_2\sum\frac{x^2y}{\Delta} + \eta_3\sum\frac{xy^2}{\Delta} + \eta_4\sum\frac{x^2y^2}{\Delta} &= Z_4.
\end{aligned}$$

en représentant pour abréger, par exemple, la somme symétrique $\frac{1}{\Delta(x_1, y_1)} + \frac{1}{\Delta(x_2, y_2)} + \ldots$, par $\sum\frac{1}{\Delta}$. Mais, d'après un théorème de M. Jacobi, les sommes $\sum\frac{1}{\Delta}$, $\sum\frac{x}{\Delta}$ et $\sum\frac{y}{\Delta}$ s'évanouissent ; ainsi nos équations en η deviennent plus simplement

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned}
\eta_4\sum\frac{xy}{\Delta} &= Z_1,\\
\eta_2\sum\frac{x^2}{\Delta} + \eta_3\sum\frac{xy}{\Delta} + \eta_4\sum\frac{x^2y}{\Delta} &= Z_2,\\
\eta_2\sum\frac{xy}{\Delta} + \eta_3\sum\frac{y^2}{\Delta} + \eta_4\sum\frac{xy^2}{\Delta} &= Z_3,\\
\eta_1\sum\frac{xy}{\Delta} + \eta_2\sum\frac{x^2y}{\Delta} + \eta_3\sum\frac{xy^2}{\Delta} + \eta_4\sum\frac{x^2y^2}{\Delta} &= Z_4.
\end{aligned}\right.$$

Dans ce système, le déterminant n'est plus l'unité comme nous l'avons trouvé plus haut pour des équations analogues ; on obtient

aisément pour sa valeur

$$\left(\sum\frac{xy}{\Delta}\right)^2\left[\left(\sum\frac{xy}{\Delta}\right)^2 - \sum\frac{x^2}{\Delta}\sum\frac{y^2}{\Delta}\right],$$

dont voici l'expression en fonction des coefficients des équations proposées. A cet effet, soit

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= ax^2 + 2bxy + cy^2 + \ldots,\\
\Phi(x, y) &= \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \ldots,
\end{aligned}$$

les termes non écrits étant d'un degré inférieur ; posons, pour abréger,

$$\begin{aligned}
A &= \beta c - b\gamma,\\
B &= \alpha c - a\gamma,\\
C &= \alpha b - a\beta,\\
B^2 - 4AC &= \mathfrak{D} \quad (^1).
\end{aligned}$$

On trouvera par un calcul facile

$$\sum\frac{x^2}{\Delta} = -\frac{2A}{\mathfrak{D}}, \qquad \sum\frac{xy}{\Delta} = \frac{B}{\mathfrak{D}}, \qquad \sum\frac{y^2}{\Delta} = -\frac{2C}{\mathfrak{D}};$$

donc

$$\left(\sum\frac{xy}{\Delta}\right)^2\left[\left(\sum\frac{xy}{\Delta}\right)^2 - \sum\frac{x^2}{\Delta}\sum\frac{y^2}{\Delta}\right] = \frac{B^2}{\mathfrak{D}^3}.$$

Le cas d'exception à nos formules se présenterait lorsque B ou $\mathfrak{D}$ s'évanouissent, mais, en général, ils seront différents de zéro ; alors la quantité précédente représentant le produit des déterminants relatifs aux systèmes (9) et (11), on arrivera à cette égalité

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1\\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\
y_1 & y_2 & y_3 & y_4\\
x_1y_1 & x_2y_2 & x_3y_3 & x_4y_4
\end{vmatrix}^2 = \frac{B^2}{\mathfrak{D}^3}\Delta(x_1, y_1)\Delta(x_2, y_2)\Delta(x_3, y_3)\Delta(x_4, y_4),$$

d'où l'on conclut la valeur de Λ_0, sous la forme suivante :

$$\Lambda_0 = x_1x_2x_3x_4\,y_1y_2y_3y_4\,\frac{B^2}{\mathfrak{D}^3}\Delta(x_1, y_1)\Delta(x_2, y_2)\Delta(x_3, y_3)\Delta(x_4, y_4).$$

(1) Cette quantité $\mathfrak{D}$ est le coefficient de la puissance la plus élevée dans l'équation finale en x ou en y quand on a fait disparaître les dénominateurs.

On retrouve bien ici la propriété connue de la fonction Δ de s'évanouir pour deux solutions égales, car si l'on suppose, par exemple, $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$, deux colonnes du déterminant deviennent identiques et il s'annule.

VI. Résolvons, par rapport aux inconnues η, les équations (12), leurs valeurs auront la forme suivante :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \alpha Z_1 + \beta Z_2 + \gamma Z_3 + \delta Z_4, \\ \eta_2 &= \alpha' Z_1 + \beta' Z_2 + \gamma' Z_3, \\ \eta_3 &= \alpha'' Z_1 + \beta'' Z_2 + \gamma'' Z_3, \\ \eta_4 &= \alpha''' Z_1, \end{aligned}$$

et l'on pourrait même démontrer qu'on a ces relations

$$\beta = \alpha', \qquad \gamma = \alpha'', \qquad \delta = \alpha''', \qquad \gamma' = \beta'';$$

mais, pour abréger, nous éviterons de les employer en modifiant légèrement la marche suivie précédemment dans le calcul analogue pour les équations à une inconnue. Posons d'abord

$$\begin{aligned} \Omega_1(x, y) &= \alpha + \alpha' x + \alpha'' y + \alpha''' xy, \\ \Omega_2(x, y) &= \beta + \beta' x + \beta'' y, \\ \Omega_3(x, y) &= \gamma + \gamma' x + \gamma'' y, \end{aligned}$$

on trouvera, par la substitution des quantités η dans les équations (11),

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{\Omega_1(x_1, y_1) Z_1 + \Omega_2(x_1, y_1) Z_2 + \Omega_3(x_1, y_1) Z_3 + \delta Z_4}{\Delta(x_1, y_1)}, \\ \zeta_2 &= \frac{\Omega_1(x_2, y_2) Z_1 + \Omega_2(x_2, y_2) Z_2 + \Omega_3(x_2, y_2) Z_3 + \delta Z_4}{\Delta(x_2, y_2)}, \\ \zeta_3 &= \frac{\Omega_1(x_3, y_3) Z_1 + \Omega_2(x_3, y_3) Z_2 + \Omega_3(x_3, y_3) Z_3 + \delta Z_4}{\Delta(x_3, y_3)}, \\ \zeta_4 &= \frac{\Omega_1(x_4, y_4) Z_1 + \Omega_2(x_4, y_4) Z_2 + \Omega_3(x_4, y_4) Z_3 + \delta Z_4}{\Delta(x_4, y_4)}. \end{aligned} \right.$$

Or, en multipliant les équations (9) respectivement par z_1, z_2, z_3, z_4, et les ajoutant, il viendra en ayant égard aux équations (10),

$$\frac{1}{x_1 y_1} \zeta_1^2 + \frac{1}{x_2 y_2} \zeta_2^2 + \frac{1}{x_3 y_3} \zeta_3^2 + \frac{1}{x_4 y_4} \zeta_4^2 = z_1 Z_1 + z_2 Z_2 + z_3 Z_3 + z_4 Z_4.$$

Qu'on substitue maintenant dans le second membre à $z_1, z_2, \ldots,$

leurs valeurs en fonction linéaire de $Z_1, Z_2, \ldots$; valeurs que nous avons plus haut représentées ainsi :

$$\begin{aligned} z_1 &= A_1^1 Z_1 + A_2^1 Z_2 + A_3^1 Z_3 + A_4^1 Z_4, \\ z_2 &= A_1^2 Z_1 + A_2^2 Z_2 + A_3^2 Z_3 + A_4^2 Z_4, \\ z_3 &= A_1^3 Z_1 + A_2^3 Z_2 + A_3^3 Z_3 + A_4^3 Z_4, \\ z_4 &= A_1^4 Z_1 + A_2^4 Z_2 + A_3^4 Z_3 + A_4^4 Z_4. \end{aligned}$$

La relation obtenue existera identiquement quelles que soient les quantités $Z_1, Z_2, \ldots$, et, si l'on compare en particulier les coefficients des carrés dans les deux membres, on trouvera de suite la formule à laquelle nous voulions arriver, savoir :

$$A_1^1 + A_2^2 + A_3^3 + A_4^4 = \sum \frac{\Omega_1^2(x, y) + \Omega_2^2(x, y) + \Omega_3^2(x, y) + \delta^2}{xy\, \Delta^2(x, y)} = -\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0},$$

le signe $\sum$ se rapportant aux divers couples de solutions x_1, y_1, $x_2, y_2, \ldots$.

VII. Arrêtons-nous un instant, avant d'aller plus loin, sur une conséquence remarquable des calculs précédents. Rapprochant des équations (9) les équations (14) qui en donnent la résolution, nous voyons que les premières sont satisfaites en annulant $\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ et faisant

$$\zeta_1 = Z_1, \qquad x_1 \zeta_1 = Z_2, \qquad y_1 \zeta_1 = Z_3, \qquad x_1 y_1 \zeta_1 = Z_4;$$

donc, dans ces hypothèses, il en sera de même des secondes. Or, il suit de là qu'en posant

$$\Omega(x, y) = \Omega_1(x, y) + x_1 \Omega_2(x, y) + y_1 \Omega_3(x, y) + \delta x_1 y_1,$$

on aura à la fois

$$\Omega(x_2, y_2) = 0, \qquad \Omega(x_3, y_3) = 0, \qquad \Omega(x_4, y_4) = 0$$

et

$$\Omega(x_1, y_1) = \Delta(x_1, y_1).$$

On voit donc que l'équation $\Omega(x, y) = 0$ admet toutes les solutions des équations $F(x, y) = 0$, $\Phi(x, y) = 0$, sauf une seule. Les coefficients de cette équation dépendent d'ailleurs rationnellement de ceux des équations proposées et de la solution écartée

x_1, y_1; ainsi le polynome $\Omega(x, y)$ peut être regardé comme analogue au quotient de la division du premier membre d'une équation à une seule inconnue par l'inconnue diminuée d'une racine. La relation

$$\Omega(x_1, y_1) = \Delta(x_1, y_1)$$

confirme encore cette analogie, la déterminante fonctionnelle jouant dans cette circonstance comme dans tant d'autres le rôle d'une dérivée. Enfin, nous remarquerons qu'en joignant à l'équation $\Omega(x, y) = 0$ une combinaison linéaire des proposées où le carré de l'une des inconnues ait été éliminé, le système ainsi obtenu conduira à une équation finale en x ou en y, du troisième degré seulement; c'est ce qu'on vérifiera très facilement par l'application de la règle de M. Minding, ou même directement par l'élimination.

VIII. Nous allons maintenant revenir au cas de deux équations $F(x, y) = 0$, $\Phi(x, y) = 0$ du degré m, pour présenter de la manière la plus générale des calculs entièrement semblables aux précédents, et qu'il sera bien facile de saisir. Désignant par les mêmes lettres affectées d'indices simples ou doubles, les quantités analogues, nous considérons en premier lieu entre deux groupes de quantités, ζ et Z, un système de m^2 équations linéaires, déduites de la suivante :

$$(9') \qquad \sum_{\omega=1}^{m^2} x_\omega^p y_\omega^q \zeta_\omega = Z_{p,q},$$

en attribuant successivement aux exposants p et q toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, m-1$. Ces équations seront, comme on voit, les analogues des équations (9); nous établirons aussi un second système de m^2 équations entre les mêmes quantités ζ et un nouveau groupe d'inconnues z, qu'on déduira de la suivante :

$$(10') \qquad \zeta_\omega = x_\omega y_\omega \sum_{i,j=1}^{m-1} x_\omega^i y_\omega^j z_{i,j},$$

en attribuant à l'indice ω les valeurs $1, 2, \ldots, m^2$, et ces équations correspondront aux équations (10). Cela posé, l'élimination des

quantités ζ donnera m^2 équations entre les inconnues z et Z dont voici le type :

$$\sum_{\omega=1}^{m^2} x_\omega^p y_\omega^q x_\omega y_\omega \sum_{i,j=0}^{m-1} x_\omega^i y_\omega^j z_{i,j} = Z_{p,q},$$

ou bien encore

$$\sum_{\omega=1}^{m^2} \sum_{i,j=0}^{m-1} x_\omega^{p+1+i} y_\omega^{q+1+j} z_{i,j} = Z_{p,q},$$

et, en intervertissant l'ordre des deux sommations,

$$\sum_{i,j=0}^{m-1} z_{i,j} \sum_{\omega=1}^{m^2} x_\omega^{p+1+i} y_\omega^{q+1+j} = Z_{p,q}.$$

Mais nous avons dejà introduit la notation $S_{a,b}$ pour désigner la somme symétrique $\sum x^a y^b$, de sorte que nous écrirons plus simplement

$$(8') \qquad \sum_{i,j=0}^{m-1} z_{i,j} S_{p+1+i,\, q+1+j} = Z_{p,q}.$$

Nous fixerons l'ordre dans lequel toutes les équations du système se déduiront de celle-là en attribuant d'abord à q la valeur zéro, et à p la série des valeurs $0, 1, 2, \ldots, m-1$, puis à q la valeur 1, et à p la même série que précédemment, et ainsi de suite. Cela étant, la fonction Λ se déduira du déterminant relatif au système ainsi formé après que des termes en diagonale on aura retranché une même quantité λ, de sorte que Λ sera un polynome entier du degré m^2 :

$$\Lambda = \Lambda_0 + \lambda \Lambda_1 + \lambda^2 \Lambda^2 + \ldots + (-1)^{m^2} \lambda^{m^2},$$

et ce qu'il nous faut calculer présentement ce sont les deux premiers coefficients Λ_0 et Λ_1, ou plutôt le rapport $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0}$.

Et d'abord Λ_0 sera le produit des déterminants des systèmes (9′) et (10′), et en désignant par $\mathfrak{D}$ le premier on trouvera de suite l'équation

$$\Lambda_0 = x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_{m^2} y_{m^2} \mathfrak{D}^2.$$

Le déterminant $\textcircled{D}$ appartiendrait également au système déduit de l'équation suivante :

$$\zeta_\omega = \sum_0^{m-1}{}_{i,j}\, x_\omega^i y_\omega^j z_{i,j},$$

puisqu'il ne diffère du système $(9')$ que par l'échange des colonnes horizontales et verticales, mais nous verrons ainsi plus facilement une propriété essentielle de ce déterminant, celle de ne pas changer de valeur lorsqu'on met respectivement $x_\omega - \xi$ et $y_\omega - \eta$ à la place de x_ω et y_ω, c'est-à-dire lorsqu'on considère, au lieu des équations

$$\mathrm{F}(x, y) = 0, \qquad \Phi(x, y) = 0,$$

les suivantes :

$$\mathrm{F}(x + \xi, y + \eta) = 0, \qquad \Phi(x + \xi, y + \eta) = 0.$$

Qu'on fasse en effet pour un instant

$$\Pi(x, y) = \sum_0^{m-1}{}_{i,j}\, x^i y^j z_{i,j},$$

le changement en question reviendra à mettre à la place de $z_{i,j}$ une fonction linéaire des quantités z, donnée par le coefficient de $x^i y^j$ dans le développement de l'expression

$$\Pi(-\xi + x, -\eta + y)$$

suivant les puissances de x et y, de sorte que si l'on fait

$$\Pi(-\xi + x, -\eta + y) = \sum_0^{m-1}{}_{i,j}\, x^i y^j z'_{i,j},$$

ce sera précisément la quantité $z'_{i,j}$ qu'il faudra substituer à $z_{i,j}$. Mais si l'on met dans l'équation précédente $x + \xi$ et $y + \eta$ à la place de x et y, le premier membre redevenant $\Pi(x, y)$, on voit que les quantités z s'exprimeront inversement par les quantités z', sans introduire aucun dénominateur; donc le déterminant relatif à la substitution des z' aux z ne peut être que l'unité.

Cette remarque nous permet immédiatement de passer de l'équation

$$\Lambda_0 = x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_{m^2} y_{m^2} \textcircled{D}^2$$

à la suivante :

$$\Lambda_1(\xi, \eta) = (x_1 - \xi)(y_1 - \eta)(x_2 - \xi)(y_2 - \eta) \ldots (x_{m^2} - \xi)(y_{m^2} - \eta) \textcircled{D}^2$$

sur laquelle nous nous fonderons plus tard.

La détermination du rapport $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0}$ dépend, comme nous l'avons vu, de la résolution des équations $(8')$ par rapport aux inconnues z, de sorte que si l'on représente les valeurs de ces quantités par la formule générale

$$z_{i,j} = \sum_0^{m-1}{}_{p,q}\, \mathrm{A}_{p,q}^{i,j} \mathrm{Z}_{p,q},$$

on aura

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} = -\sum_0^{m-1}{}_{p,q}\, \mathrm{A}_{p,q}^{p,q}.$$

Pour effectuer sous la forme convenable la résolution des équations $(8')$, introduisons les quantités η en posant

$$\zeta_\omega = \sum \frac{\sum_0^{m-1}{}_{i,j}\, x_\omega^i y_\omega^j \eta_{i,j}}{\Delta(x_\omega, y_\omega)};$$

il viendra, par la substitution dans les équations $(9')$,

$$(12') \qquad \sum_0^{m-1}{}_{i,j}\, \eta_{i,j} \sum_1^{m^2}{}_\omega \frac{x_\omega^{p+i} y_\omega^{q+j}}{\Delta(x_\omega, y_\omega)} = \mathrm{Z}_{p,q},$$

et dans ce nouveau système on devra, d'après le théorème déjà cité de M. Jacobi, annuler toutes les sommes

$$\sum_1^{m^2}{}_\omega \frac{x_\omega^{p+i} y_\omega^{q+j}}{\Delta(x_\omega, y_\omega)},$$

dans lesquelles on aura

$$p + q + i + j = \text{ou} < 2m - 3.$$

Ainsi, en particulier dans la première équation où l'on doit supposer

$$p = q = 0,$$

toutes les inconnues disparaîtront, sauf la dernière $z_{m-1,m-1}$ multipliée par la somme non évanouissante en général, $\sum_1^{m^2}{}_\omega \frac{x_\omega^{m-1} y_\omega^{m-1}}{\Delta(x_\omega, y_\omega)}$. Mais ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est que les coefficients qui ne disparaissent pas sont des fonctions rationnelles des coefficients des équations proposées, fonctions que M. Jacobi a appris à calculer dans son admirable Mémoire intitulé *Theoremata nova algebraica circa systema duarum æquationum inter duas variabiles propositarum* (¹). Quant au déterminant de ce système il est le produit des déterminants relatifs aux systèmes (9′) et (11′); si donc on le désigne par δ, on arrivera à la relation

$$\mathfrak{D}^2 = \delta\,\Delta(x_1, y_1)\,\Delta(x_2, y_2)\ldots\Delta(x_{m^2}, y_{m^2}),$$

équation remarquable et analogue à celle que nous avons précédemment trouvée pour les équations à une inconnue. Nous ne pouvons nous occuper ici d'une détermination plus complète de δ dont nous avons fait le calcul ci-dessus dans le cas de $m=2$; nous observerons seulement qu'en passant des équations proposées à leurs transformées en $x-\xi$, $y-\eta$, δ ne change pas. Cette propriété vient déjà d'être établie pour le déterminant $\mathfrak{D}$, et il est très facile de voir qu'elle a lieu également pour toutes les quantités $\Delta(x_\omega, y_\omega)$, en se rapportant à l'expression de $\Delta(x,y)$ où ne figurent que les dérivées partielles des fonctions $F(x,y)$, $\Phi(x,y)$. Cela posé, résolvons, par rapport aux inconnues η, les équations (12′) et soit

$$\eta_{i,j} = \frac{\sum_0^{m-1}{}_{p,q}\,\omega_{p,q}^{i,j} Z_{p,q}}{\delta},$$

les quantités ω étant des fonctions entières des coefficients des équations proposées. Si nous posons

$$\Omega_{p,q}(x,y) = \sum_0^{m-1}{}_{i,j}\, x^i y^j \omega_{p,q}^{i,j},$$

(¹) Jacobi, *Gesammelte Werke*, t. III, p. 285-294.

on trouvera, par la substitution dans les équations (11′),

$$\zeta_\omega = \sum_0^{m-1}{}_{p,q} \frac{\Omega_{p,q}(x_\omega, y_\omega) Z_{p,q}}{\delta\,\Delta(x_\omega, y_\omega)}.$$

Or, des équations (9′) et (10′) nous tirons la relation

$$\sum_1^{m^2}{}_\omega \frac{1}{x_\omega y_\omega} \zeta_\omega^2 = \sum_0^{m-1}{}_{i,j} z_{i,j} Z_{i,j},$$

qui existera identiquement par rapport aux quantités Z, lesquelles entrent seules dans le premier membre. Quant au second membre, si l'on y remplace $z_{i,j}$ par la formule posée plus haut, savoir

$$z_{i,j} = \sum_0^{m-1}{}_{p,q} A_{p,q}^{i,j} Z_{p,q},$$

il ne dépendra plus de même que des quantités Z, et, en égalant les carrés de $Z_{p,q}$ dans les deux membres, on trouvera

$$A_{p,q}^{p,q} = \sum_1^{m^2}{}_\omega \frac{\Omega_{p,q}^2(x_\omega, y_\omega)}{x_\omega y_\omega \delta^2 \Delta^2(x_\omega, y_\omega)}.$$

d'où l'on conclut enfin

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} = -\sum_0^{m-1}{}_{p,q} A_{p,q}^{p,q} = -\sum_1^{m^2}{}_\omega \frac{\sum_0^{m-1}{}_{p,q}\Omega_{p,q}^2(x_\omega, y_\omega)}{x_\omega y_\omega \delta^2 \Delta^2(x_\omega, y_\omega)}.$$

IX. De l'analyse précédente résulte un théorème analogue à celui que nous avons donné précédemment pour deux équations du second degré, et qui consiste en ce que le polynome

$$\Omega(x,y) = \sum_0^{m-1}{}_{p,q} \Omega_{p,q}(x,y) x_1^p y_1^q$$

vérifie l'équation

$$\Omega(x_1, y_1) = \delta\,\Delta(x_1, y_1),$$

et s'annule quand on y remplace x et y par toutes les solutions simultanées différentes de la solution

$$x = x_1, \qquad y = y_1.$$

Comme cela est très facile à vérifier, nous ne nous y arrêterons pas, et nous arrivons de suite à la démonstration de notre théorème. Précédemment nous avons obtenu l'équation

$$\Lambda_0(\xi, \eta) = (x_1 - \xi)(y_1 - \eta)(x_2 - \xi)(y_2 - \eta)\ldots(x_{m^2} - \xi)(y_{m^2} - \eta)\Theta^2,$$

et de la valeur trouvée pour $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0}$ résulte aussi

$$\frac{\Lambda_1(\xi, \eta)}{\Lambda_0(\xi, \eta)} = -\sum_{1}^{m^2}{}_{\omega} \frac{\mathfrak{F}(x_\omega, y_\omega, \xi, \eta)}{(x_\omega - \xi)(y_\omega - \eta)\delta^2\Delta^2(x_\omega, y_\omega)},$$

le numérateur $\mathfrak{F}(x_\omega, y_\omega, \xi, \eta)$ désignant ce que devient l'expression $\sum \Omega_{p,q}^2(x_\omega, y_\omega)$ lorsqu'on substitue aux équations proposées leurs transformées en $x + \xi$ et $y + \eta$. Or, il est évident que la fonction $\mathfrak{F}$ correspondante à deux solutions simultanées réelles ne changera jamais de signe pour aucune valeur des quantités ξ et η. Ces préliminaires posés, nous allons, en premier lieu, rechercher comment se modifie le nombre des variations du polynome

$$\Lambda(\xi, \eta) = \Lambda_0(\xi, \eta) + \lambda\Lambda_1(\xi, \eta) + \ldots + (-1)^{m^2}\lambda^{m^2}$$

lorsqu'on y fait croître η d'une manière continue de η_0 à η_1, la quantité ξ restant constante et égale à une valeur déterminée ξ_0. Et, d'abord, les coefficients de deux puissances consécutives de λ ne pourront jamais s'évanouir en même temps, et si un coefficient s'annule, le précédent et le suivant seront de signes contraires. C'est, comme nous l'avons déjà dit, une conséquence du théorème de Descartes et de ce que l'équation $\Lambda(\xi, \eta) = 0$ a toujours toutes ses racines réelles.

Ainsi des changements dans le nombre des variations ne pourront survenir qu'autant que ce sera le dernier terme qui viendra à s'annuler. Mais, d'après l'expression de ce dernier terme, les valeurs de η qui peuvent l'annuler sont uniquement les racines y du système des équations proposées, qui sont comprises entre les limites η_0 et η_1.

Cela étant, considérons le rapport

$$\frac{\Lambda_1(\xi, \eta)}{\Lambda_0(\xi, \eta)} = -\sum \frac{\mathfrak{F}(x_\omega, y_\omega, \xi, \eta)}{(x_\omega - \xi)(y_\omega - \eta)\delta^2\Delta^2(x_\omega, y_\omega)}$$
$$= \sum \frac{\mathfrak{F}(x_\omega, y_\omega, \xi, \eta)}{(x_\omega - \xi)(\eta - y_\omega)\delta^2\Delta^2(x_\omega, y_\omega)}$$

pour une valeur de η voisine d'une racine y_ω; son signe dépendra du seul terme $\frac{\mathfrak{F}(x_\omega, y_\omega, \xi, \eta)}{(x_\omega - \xi)(\eta - y_\omega)\delta^2\Delta^2(x_\omega, y_\omega)}$, ou, d'après ce que nous avons établi relativement au numérateur, du seul facteur $\frac{1}{(x_\omega - \xi)(\eta - y_\omega)}$. Or, deux cas sont à distinguer; en premier lieu, si $x_\omega - \xi_0$ est positif, ce rapport sera négatif pour une valeur de η un peu inférieure à y_ω, et positif pour une valeur un peu supérieure; donc alors une variation se change en permanence dans le polynome $\Lambda(\xi, \eta)$, lorsque η atteint et dépasse la racine y_ω. Mais si nous supposons en second lieu $x_\omega - \xi_0$ négatif, c'est évidemment le contraire qui arrive : c'est une variation qui s'introduit dans $\Lambda(\xi, \eta)$ lorsque η franchit la valeur y_ω. Il est facile de conclure de là la signification de la différence $v_{\xi_0, \eta_0} - v_{\xi_0, \eta_1}$, c'est-à-dire des séries du nombre des variations du polynome $\Lambda(\xi_0, \eta_0)$, sur le nombre des variations de $\Lambda(\xi_0, \eta_1)$. Considérons x_ω comme l'abscisse et y_ω comme l'ordonnée d'un point rapporté à deux axes rectangulaires dans un certain plan, de sorte qu'à chaque solution du système de nos équations corresponde un point déterminé. Cela étant, si nous menons deux parallèles à l'axe des abscisses par les points dont les coordonnées seraient

$$x = \xi_0, \qquad x = \xi_0,$$
$$y = \eta_0, \qquad y = \eta_1,$$

les points auxquels correspondent des solutions et qui seront compris dans l'intérieur des deux parallèles se partageront en deux groupes ξ_0, selon que leurs abscisses seront plus grandes ou plus petites que ξ_0. On voit que ceux du premier groupe seront à droite de l'ordonnée verticale menée par le point (ξ_0, η_0), et les autres à gauche. Donc, lorsque la quantité η varie d'une manière continue de η_0 à η_1, le polynome $\Lambda(\xi, \eta)$ perd autant de variations qu'il existe de points dans le premier groupe, et en gagne autant qu'il en existe dans le second. Soient donc respectivement $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$ le nombre de ces points, on aura la relation

$$v_{\xi_0,\eta_0} - v_{\xi_0,\eta_1} = \mathcal{N} - \mathcal{N}',$$

Cela posé, si la quantité ξ_0 devient ξ_1, $\mathcal{N}$ s'accroîtra du nombre des points renfermés dans l'intérieur du rectangle, ayant pour coordonnées de ses sommets

$$\begin{array}{llll} x = \xi_0, & x = \xi_0, & x = \xi_1, & x = \xi_1, \\ y = \eta_0, & y = \eta_1, & y = \eta_0, & y = \eta_1, \end{array}$$

et $\mathcal{N}'$ sera diminué du même nombre. En le désignant par n, nous aurons donc

$$v_{\xi_1,\eta_0} - v_{\xi_1,\eta_1} = (\mathcal{N} + n) - (\mathcal{N}' - n) = \mathcal{N} - \mathcal{N}' + 2n.$$

Or, cette relation jointe à la précédente conduit immédiatement à notre théorème qui consiste dans l'équation

$$\frac{v_{\xi_0,\eta_0} + v_{\xi_1,\eta_1} - v_{\xi_0,\eta_1} - v_{\xi_1,\eta_0}}{2} = n.$$

X. On a pu remarquer dans les calculs précédents que les deux inconnues x et y étaient traitées de la même manière; c'est cette symétrie qui nous a engagés à nous occuper ainsi avec détail de deux équations générales du degré m. Mais on va voir que les mêmes principes conduisent à une analyse plus simple lorsqu'on considère deux équations de la forme

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, \\ \Phi(x) &= y, \end{aligned}$$

$F(x)$ étant un polynome entier et $\Phi(x)$ une fonction rationnelle quelconque de x. On obtient d'ailleurs des formules d'une application numérique très facile, et qui n'offrent aucune exception. Nous admettrons seulement qu'on ait enlevé, dans le polynome $F(x)$, les facteurs qui lui seraient communs avec le dénominateur de $\Phi(x)$, de sorte que toutes les racines y soient des quantités finies. Cela étant, nommons $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les racines de l'équation $F(x) = 0$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$, les valeurs correspondantes de y, et T la somme symétrique $y_1 x_1^i + y_2 x_2^i + \ldots + y_m x_m^i$; notre

fonction $\Lambda(\xi, \eta)$, sera ce que devient le déterminant

$$\Lambda = \begin{vmatrix} T_1 - \lambda & T_2 & T_3 & \ldots & T_m \\ T_2 & T_3 - \lambda & T_4 & \ldots & T_{m+1} \\ T_3 & T_4 & T_5 - \lambda & \ldots & T_{m+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T_m & T_{m+1} & T_{m+2} & \ldots & T_{2m-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

lorsqu'on substitue $x + \xi$ et $y + \eta$, à la place de x et y, dans les équations proposées, et le nombre des solutions simultanées comprises dans l'intérieur d'un rectangle sera encore donné par la même formule que ci-dessus :

$$\frac{v_{\xi_1,\eta_1} + v_{\xi_0,\eta_0} - v_{\xi_1,\eta_0} - v_{\xi_0,\eta_1}}{2}.$$

XI. La démonstration repose toujours sur le calcul du terme indépendant et du coefficient de la première puissance de λ dans la fonction Λ; nous le présenterons de la manière suivante.

Formons en premier lieu, entre les quantités ζ et Z, les m équations :

$$(2') \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_m &= Z_1, \\ x_1\zeta_1 + x_2\zeta_2 + \ldots + x_m\zeta_m &= Z_2, \\ x_1^2\zeta_1 + x_2^2\zeta_2 + \ldots + x_m^2\zeta_m &= Z_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ x_1^{m-1}\zeta_1 + x_2^{m-1}\zeta_2 + \ldots + x_m^{m-1}\zeta_m &= Z_m, \end{aligned} \right.$$

semblables aux équations (2) du paragraphe II, puis, entre les quantités ζ et Z, les suivantes analogues aux équations (3), savoir :

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta_1 &= y_1\,(x_1 z_1 + x_1^2 z_2 + \ldots + x_1^m z_m), \\ \zeta_2 &= y_2\,(x_2 z_1 + x_2^2 z_2 + \ldots + x_2^m z_m), \\ \zeta_3 &= y_3\,(x_3 z_1 + x_3^2 z_2 + \ldots + x_3^m z_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \zeta_m &= y_m\,(x_m z_1 + x_m^2 z_2 + \ldots + x_m^m z_m); \end{aligned} \right.$$

on trouvera d'abord, par l'élimination des quantités ζ, les relations

$$(1') \quad \left\{ \begin{aligned} S_1 z_1 + S_2 z_2 + \ldots + S_m z_m &= Z_1, \\ S_2 z_1 + S_3 z_2 + \ldots + S_{m+1} z_m &= Z_2, \\ S_2 z_1 + S_4 z_2 + \ldots + S_{m+2} z_m &= Z_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ S_m z_1 + S_{m+1} z_2 + \ldots + S_{2m-1} z_m &= Z_m, \end{aligned} \right.$$

la quantité S_i désignant la somme $y_1 x_1^i + y_2 x_2^i + \ldots + y_m x_m^i$.

Donc le déterminant de ce dernier système, c'est-à-dire précisément Λ_0, sera le produit des déterminants relatifs aux équations $(2')$ et $(1')$, ce qui donnera la relation

$$\Lambda_0 = \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \ldots & S_m \\ S_2 & S_3 & \ldots & S_{m+1} \\ S_3 & S_4 & \ldots & S_{m+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_m & S_{m+1} & \ldots & S_{2m-1} \end{vmatrix}$$

$$= x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_m y_m \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_m^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \ldots & x_m^{m-1} \end{vmatrix}^2,$$

ou, évidemment,

$$\Lambda_0 = x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_m y_m \, F'(x_1) \, F'(x_2) \ldots F'(x_m).$$

Donc, désignant par $\Lambda(\xi, \eta)$ ce que devient la fonction Λ, par rapport aux équations en $x + \xi$ et $y + \eta$, et faisant comme ci-dessus

$$\Lambda(\xi, \eta) = \Lambda_0(\xi, \eta) + \lambda \, \Lambda_1(\xi, \eta) + \ldots + (-1)^m \lambda^m,$$

on aura

$$\begin{aligned} \Lambda_0(\xi, \eta) = {} & (x_1 - \xi)(y_1 - \eta)(x_2 - \xi)(y_2 - \eta)\ldots \\ & \times (x_m - \xi)(y_m - \eta) \, F'(x_1) \, F'(x_2) \ldots F'(x_m). \end{aligned}$$

Le calcul du rapport $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0}$ dépend, comme nous l'avons déjà vu, de la résolution des équations $(1')$; soit donc

$$\begin{aligned} z_1 &= A_1^1 Z_1 + A_2^1 Z_2 + \ldots + A_m^1 Z_m, \\ z_2 &= A_1^2 Z_1 + A_2^2 Z_2 + \ldots + A_m^2 Z_m, \\ z_3 &= A_1^3 Z_1 + A_2^3 Z_2 + \ldots + A_m^3 Z_m, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_m &= A_1^m Z_1 + A_2^m Z_2 + \ldots + A_m^m Z_m, \end{aligned}$$

on aura

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} = -(A_1^1 + A_2^2 + \ldots + A_m^m).$$

Maintenant, pour effectuer cette résolution, nous introduirons un système de quantités auxiliaires η par les formules

$$(4') \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{\eta_0 + x_1 \eta_1 + x_1^2 \eta_2 + \ldots + x_1^{m-1} \eta_{m-1}}{F'(x_1)}, \\ \zeta_2 &= \frac{\eta_0 + x_2 \eta_1 + x_2^2 \eta_2 + \ldots + x_2^{m-1} \eta_{m-1}}{F'(x_2)}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \zeta_m &= \frac{\eta_0 + x_m \eta_1 + x_m^2 \eta_2 + \ldots + x_m^{m-1} \eta_{m-1}}{F'(x_m)}. \end{aligned} \right.$$

En substituant dans les équations $(2')$, il viendra

$$\begin{aligned} & \eta_0 \sum \frac{1}{F'} + \eta_1 \sum \frac{x}{F'} + \ldots + \eta_{m-1} \sum \frac{x^{m-1}}{F'} = Z_1, \\ & \eta_0 \sum \frac{x}{F'} + \eta_1 \sum \frac{x^2}{F'} + \ldots + \eta_{m-1} \sum \frac{x^m}{F'} = Z_2, \\ & \eta_0 \sum \frac{x^2}{F'} + \eta_1 \sum \frac{x^3}{F'} + \ldots + \eta_{m-1} \sum \frac{x^{m+1}}{F'} = Z_3, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & \eta_0 \sum \frac{x^{m-1}}{F'} + \eta_1 \sum \frac{x^m}{F'} + \ldots + \eta_{m-1} \sum \frac{x^{2m-2}}{F'} = Z_m. \end{aligned}$$

Or ces équations se résolvent immédiatement comme on va le voir. Soit, en effet,

$$F(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m.$$

On vérifiera sans peine les valeurs suivantes que nous avons omis de donner explicitement dans le paragraphe III, savoir :

$$\begin{aligned} \eta_0 &= Z_m + a_1 Z_{m-1} + a_2 Z_{m-2} + \ldots + a_{m-2} Z_2 + a_{m-1} Z_1, \\ \eta_1 &= Z_{m-1} + a_1 Z_{m-2} + a_2 Z_{m-3} + \ldots + a_{m-2} Z_1, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \eta_{m-2} &= Z_2 + a_1 Z_1, \\ \eta_{m-1} &= Z_1. \end{aligned}$$

Que l'on pose donc

$$\begin{aligned} \Omega_1(x) &= x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + a_2 x^{m-3} + \ldots + a_{m-2} x + a_{m-1}, \\ \Omega_2(x) &= x^{m-2} + a_1 x^{m-3} + a_2 x^{m-4} + \ldots + a_{m-2}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Omega_{m-2}(x) &= x^2 + a_1 x + a_2, \\ \Omega_{m-1}(x) &= x + a_1, \end{aligned}$$

on trouvera, par la substitution des quantités η dans les équations ($4'$), les valeurs

$$\zeta_1 = \frac{\Omega_1(x_1)Z_1 + \Omega_2(x_1)Z_2 + \ldots + \Omega_{m-1}(x_1)Z_{m-1} + Z_m}{F'(x_1)},$$
$$\zeta_2 = \frac{\Omega_1(x_2)Z_1 + \Omega_2(x_2)Z_2 + \ldots + \Omega_{m-1}(x_2)Z_{m-1} + Z_m}{F'(x_2)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\zeta_m = \frac{\Omega_1(x_m)Z_1 + \Omega_2(x_m)Z_2 + \ldots + \Omega_{m-1}(x_m)Z_{m-1} + Z_m}{F'(x_m)}.$$

Cela posé, les relations ($2'$) et ($3'$) donnent la suivante :

$$\frac{1}{x_1 y_1}\zeta_1^2 + \frac{1}{x_2 y_2}\zeta_2^2 + \ldots + \frac{1}{x_m y_m}\zeta_m^2 = z_1 Z_1 + z_2 Z_2 + \ldots + z_m Z_m,$$

et si l'on met dans le second membre, à la place des quantités z, leurs valeurs en fonction linéaire des quantités Z, on trouvera, en comparant les carrés de $Z_1, Z_2, \ldots$, les expressions auxquelles nous voulions parvenir, savoir

$$A_i^i = \frac{\Omega_i^2(x_1)}{x_1 y_1 F'^2(x_1)} + \frac{\Omega_i^2(x_2)}{x_2 y_2 F'^2(x_2)} + \ldots + \frac{\Omega_i^2(x_m)}{x_m y_m F'^2(x_m)};$$

elles donnent immédiatement

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} = -(A_1^1 + A_2^2 + \ldots + A_m^m) = -\sum \frac{\Omega_1^2(x) + \Omega_2^2(x) + \ldots + \Omega_{m-1}^2(x) + 1}{xy\, F'^2(x)},$$

le signe $\sum$ se rapportant aux diverses solutions simultanées. On en conclut qu'en passant des équations proposées à leurs transformées en $x + \xi$ et $y + \eta$, il viendra

$$\frac{\Lambda_1(\xi, \eta)}{\Lambda_0(\xi, \eta)} = -\sum \frac{\mathfrak{F}(x, \xi)}{(x - \xi)(y - \eta)\, F'^2(x)},$$

expression dans laquelle le numérateur désigné par $\mathfrak{F}(x, \xi)$ ne pourra jamais ni s'évanouir ni changer de signe quel que soit ξ, lorsque la racine x sera réelle, puisqu'elle représente une somme de carrés. Nous pouvons donc appliquer exactement la démonstration employée précédemment pour la détermination du nombre des solutions simultanées qui sont comprises dans l'intérieur d'un rectangle ayant ses côtés parallèles aux axes coordonnés. Seulement on voit de suite la possibilité d'obtenir par le calcul des quantités $S_1, S_2, \ldots$, les divers coefficients de la fonction $\Lambda(\xi, \eta)$, qui jouent dans cette question le rôle de fonctions auxiliaires du théorème de M. Sturm. D'ailleurs aucun cas d'exception ne peut ici se présenter à moins que l'équation $F(x) = 0$ n'ait des racines égales. Mais, même alors, nous pouvons conserver la fonction $\Lambda(\xi, \eta)$, dont le premier terme $\Lambda_0(\xi, \eta)$ disparaît, car les deux suivants Λ_1 et Λ_2, s'il existe par exemple deux racines égales, se trouvent prendre la même forme analytique et jouer le même rôle que les deux premiers. Nous développerons ce qui se rapporte à ce sujet dans un autre Mémoire.

XII. Il suffira d'un peu d'attention pour reconnaître qu'on peut étendre à un nombre quelconque d'équations simultanées les principes appliqués précédemment à deux équations à deux inconnues. Nous en donnerons un exemple en considérant le système suivant :

$$F(x) = 0,$$
$$\Phi(x) = y,$$
$$\Psi(x) = z,$$

où nous supposerons que les fonctions Φ et Ψ sont rationnelles et ne deviennent infinies pour aucune valeur satisfaisant à la première équation $F(x) = 0$. Soient toujours $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les racines de cette équation, $y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots, y_m, z_m$ les déterminations correspondantes des inconnues y et z, et U_i la somme symétrique

$$y_1 z_1 x_1^i + y_2 z_2 x_2^i + \ldots + y_m z_m x_m^i,$$

nous considérerons encore le déterminant

$$\Lambda = \begin{vmatrix} U_1 - \lambda & U_2 & U_3 & \ldots & U_m \\ U_2 & U_3 - \lambda & U_4 & \ldots & U_{m+1} \\ U_3 & U_4 & U_5 - \lambda & \ldots & U_{m+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ U_m & U_{m+1} & U_{m+2} & \ldots & U_{2m-1} - \lambda \end{vmatrix},$$

de même forme analytique que les précédents. Cela posé, si l'on substitue $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ aux inconnues proposées, il deviendra fonction de ξ, η, ζ, et nous le représenterons par

$$\Lambda(\xi, \eta, \zeta) = \Lambda_0(\xi, \eta, \zeta) + \lambda\Lambda_1(\xi, \eta, \zeta) + \ldots + (-1)^m \lambda^m.$$

Or, on trouvera les expressions suivantes, savoir :

$$\Lambda_0(\zeta, \eta, \zeta) = (x_1-\xi)(y_1-\eta)(z_1-\zeta)(x_2-\xi)(y_2-\eta)(z_2-\zeta)\ldots$$
$$\times F'(x_1)F'(x_2)\ldots F'(x_m),$$

$$\frac{\Lambda_1(\xi, \eta, \zeta)}{\Lambda_0(\xi, \eta, \zeta)} = -\sum \frac{\mathfrak{F}(x, \xi)}{(x-\xi)(y-\eta)(z-\zeta)F'^2(x)},$$

le signe $\sum$ s'étendant aux diverses solutions et le numérateur $\mathfrak{F}(x, \xi_0)$ étant la fonction déjà considérée dans les cas des équations à une seule et à deux inconnues. Cela posé, soit, pour un système donné de valeurs de ξ, η, ζ, $v(\xi, \eta, \zeta)$ le nombre des variations du polynome $\Lambda(\xi, \eta, \zeta)$, nous allons en premier lieu donner la signification de la différence $v(\xi, \eta, \zeta_0) - v(\xi, \eta, \zeta_1)$ où nous supposons $\zeta_1 > \zeta_0$. Considérons en effet x, y, z comme les coordonnées rectangulaires d'un point situé dans l'espace, de sorte qu'à chaque solution des trois équations proposées corresponde un point déterminé.

Les deux plans $z = \zeta_0$ et $z = \zeta_1$ comprendront dans leur intervalle un certain nombre des points figurant ainsi des solutions; nous les partagerons en quatre groupes de la manière suivante. Menant dans le plan des xy des parallèles aux axes des x et des y par le point dont les coordonnées sont $x = \xi, y = \eta$, on voit que ces droites détermineront quatre régions, que nous désignerons par A, B, C, D, et les points dont nous formerons un même groupe seront ceux qui le projettent dans une même région, ou, si l'on veut, dans l'intérieur d'un même angle. Soient A et C d'une part, B et D de l'autre, les angles opposés par le sommet; dans les deux premiers, les expressions $(x-\xi)(y-\eta)$ seront de même signe et, pour fixer les idées, seront positives; tandis qu'elles seront négatives dans B et D. D'après cela, on voit de suite qu'en nommant respectivement a, b, c, d, les nombres de points qui appartiennent aux régions A, B, C, D, la différence

$$v(\xi, \eta, \zeta_0) - v(\xi, \eta, \zeta_1)$$

aura pour valeur

$$a + c - b - d.$$

Considérons en second lieu deux valeurs de η, η_0 et η_1, en laissant constante la quantité ξ. Les deux droites $y = \eta_0$, $y = \eta_1$

comprendront dans leur intervalle un certain nombre des projections des points racines; nous les séparerons encore en deux groupes, suivant qu'elles se trouveront à droite ou à gauche de la parallèle à l'axe des y, $x = \xi$, et nous désignerons par $\mathfrak{N}$ le nombre des projections contenues dans le premier groupe et par $\mathfrak{N}'$ le nombre des projections contenues dans le second.

Cela posé, il est clair qu'en passant de η_0 à η_1, a et d deviendront respectivement $a + \mathfrak{N}'$ et $d - \mathfrak{N}'$; b et c en même temps se changeront en $b + \mathfrak{N}$ et $c - \mathfrak{N}$. Nous aurons donc, d'une part,

$$v(\xi, \eta_0, \zeta_0) - v(\xi, \eta_0, \zeta_1) = a + c - b - d,$$

et de l'autre

$$v(\xi, \eta_1, \zeta_0) - v(\xi, \eta_1, \zeta_1) = a + c - b - d + 2(\mathfrak{N}' - \mathfrak{N}),$$

et, par suite,

$$v(\xi, \eta_0, \zeta_0) + v(\xi, \eta_1, \zeta_1) - v(\xi, \eta_0, \zeta_1) - v(\xi, \eta_1, \zeta_0) = 2(\mathfrak{N} - \mathfrak{N}').$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à faire varier la quantité ξ; or, en passant de ξ_0 à ξ_1, $\mathfrak{N}'$ s'augmentera du nombre des projections renfermées dans le rectangle ayant pour sommets

$$\begin{array}{llll} x = \xi_0, & x = \xi_0, & x = \xi_1, & x = \xi_1, \\ y = \eta_0, & y = \eta_1, & y = \eta_0, & y = \eta_1, \end{array}$$

et $\mathfrak{N}$ diminuera du même nombre. Désignons par n ce nombre, il représentera évidemment combien se trouvent de points figurant des couples de solution dans l'intérieur du parallélépipède ayant pour projection verticale le rectangle dont nous venons de parler et terminé par les plans $z = \zeta_0$, $z = \zeta_1$. Or, nous avons à la fois les relations

$$v(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) + v(\xi_0, \eta_1, \zeta_1) - v(\xi_0, \eta_0, \zeta_1) - v(\xi_0, \eta_1, \zeta_0) = 2(\mathfrak{N} - \mathfrak{N}'),$$
$$v(\xi_1, \eta_0, \zeta_0) + v(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) - v(\xi_1, \eta_0, \zeta_1) - v(\xi_1, \eta_1, \zeta_0) = 2(\mathfrak{N} - \mathfrak{N}') - 4n.$$

d'où l'on conclut

$$n = \frac{\left[\begin{array}{l} \quad v(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) + v(\xi_0, \eta_1, \zeta_1) + v(\xi_1, \eta_0, \zeta_1) + v(\xi_1, \eta_1, \zeta_0) \\ - v(\xi_0, \eta_0, \zeta_1) - v(\xi_0, \eta_1, \zeta_0) - v(\xi_1, \eta_0, \zeta_0) - v(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \end{array}\right]}{4}.$$

On aura un énoncé plus simple si l'on convient de désigner par

(M) le nombre des variations du polynome $\Lambda(\xi, \eta, \zeta)$, M étant le point de l'espace dont les coordonnées rectangulaires sont ξ, η, ζ. Nommant alors $pqrs$ la base inférieure et $p'q'r's'$ la base supérieure du parallélépipède, de sorte que les points p et p', q et q', ..., appartiennent respectivement aux mêmes ordonnées verticales et que les droites pq, ps soient parallèles aux parties positives des x et des y, on aura la valeur suivante :

$$n = \frac{1}{4}\{[(p)-(p')]-[(q)-(q')]+[(r)-(r')]-[(s)-(s')]\}.$$

INTÉGRATION
DES
FONCTIONS RATIONNELLES (1).

Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. XI, 1872, p. 145-148.
Annales de l'École Normale supérieure, 1re série, t. I, 1872, p. 215-218.
Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, 1873, p. 268 et suiv.

Soient $F(x)$ et $F_1(x)$ deux polynomes entiers; en posant, pour mettre en évidence l'ordre de multiplicité des divers facteurs,

$$F(x) = (x-a)^{\alpha+1}(x-b)^{\beta+1}\ldots(x-1)^{\lambda+1},$$

en admettant pour simplifier que le degré du numérateur soit moindre que le degré de $F(x)$, la décompositon en fractions simples donne la formule générale

$$\begin{aligned}\frac{F_1(x)}{F(x)} = {} & \frac{A}{x-a}+\frac{A_1}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^{\alpha+1}} \\ & +\frac{B}{x-b}+\frac{B_1}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^{\beta+1}} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +\frac{L}{x-l}+\frac{L_1}{(x-l)^2}+\ldots+\frac{L_\lambda}{(x-l)^{\lambda+1}},\end{aligned}$$

(1) Nous publions ici un extrait du *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* Paris, Gauthiers-Villars, 1873) relatif à l'intégration des fonctions rationnelles; antérieurement, la question avait été traitée d'une manière plus sommaire par Hermite dans deux Notes des *Nouvelles Annales* et des *Annales de l'École Normale* que nous ne reproduisons pas. E. P.