SUR

LA CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE

DE L'ÉQUATION

RELATIVE A L'ADDITION DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE.

Bulletin des Sciences mathématiques, t. II (1871, p. 21).

La première construction connue de cette équation et qui a été donnée par Lagrange résulte du rapprochement de la relation

$$\cos\operatorname{am} a = \cos\operatorname{am}(x+a)\cos\operatorname{am} x + \sin\operatorname{am}(x+a)\sin\operatorname{am} x\,\Delta\operatorname{am} a$$

avec la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. On en déduit aussi une construction plane en posant

$$X = \cos\operatorname{am}(x+a),$$
$$Y = \sin\operatorname{am}(x+a),$$

et déterminant les points de rencontre de la droite

$$\cos\operatorname{am} a = X\cos\operatorname{am} x + Y\sin\operatorname{am} x\,\Delta\operatorname{am} a$$

avec le cercle

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

Cette droite est une tangente à l'ellipse

$$\left(\frac{X}{\cos\operatorname{am} a}\right)^2 + \left(\frac{Y\Delta\operatorname{am} a}{\cos\operatorname{am} a}\right)^2 = 1,$$

dont les axes ont pour valeurs

$$A = \cos\operatorname{am} a,$$
$$B = \frac{\cos\operatorname{am} a}{\Delta\operatorname{am} a} = \sin\operatorname{am}(K-a).$$

Ayant donc construit cette ellipse ainsi que le cercle, l'un des points d'intersection aura pour coordonnées

$$X = \cos\operatorname{am}(x+a),$$
$$Y = \sin\operatorname{am}(x+a)$$

et l'autre, en remarquant que l'équation de la droite ne change point si l'on change a en $-a$, les quantités

$$X_0 = \cos\operatorname{am}(x-a),$$
$$Y_0 = \sin\operatorname{am}(x-a).$$

On voit donc qu'en menant l'une des deux tangentes à l'ellipse par le point

$$X_0 = \cos\operatorname{am}(x-a),$$
$$Y_0 = \sin\operatorname{am}(x-a),$$

cette construction donnera d'abord celui-ci

$$X = \cos\operatorname{am}(x+a),$$
$$Y = \sin\operatorname{am}(x+a),$$

puis, en continuant dans le même sens,

$$X_1 = \cos\operatorname{am}(x+3a),$$
$$Y_1 = \sin\operatorname{am}(x+3a);$$

et, en général, le $n^{\text{ième}}$ côté du polygone inscrit au cercle et circonscrit à l'ellipse conduira à la construction des quantités

$$\cos\operatorname{am}[x+(2n+1)a],$$
$$\sin\operatorname{am}[x+(2n+1)a].$$

En opérant en sens inverse, on trouverait, pour les coordonnées des sommets, les expressions

$$\cos\operatorname{am}[x-(2n+1)a],$$
$$\sin\operatorname{am}[x-(2n+1)a].$$

Ces résultats pourraient, sans doute, se démontrer directement, en déterminant, sur la figure, le rapport des variations des coordonnées des points de rencontre, avec le cercle, de deux tangentes infiniment voisines, mais je ne m'y arrêterai point, m'étant seulement proposé de rapprocher l'une de l'autre deux constructions géométriques de natures bien différentes.

SUR
L'ÉLIMINATION DES FONCTIONS ARBITRAIRES [1].

Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, 1873, p. 215-229.
Paris, Gauthier-Villars.

I. C'est à l'égard des fonctions de plusieurs variables que se présente la question de la formation des équations aux différences partielles, c'est-à-dire des relations entre une fonction z, les variables x, y, ..., et les dérivées partielles des divers ordres $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx\,dy}, \ldots$. Considérant d'abord deux variables seulement, le premier point de vue sous lequel nous l'envisageons est celui qui s'offre dans l'étude des cônes, des cylindres, des surfaces de révolution, etc. C'est en effet la définition géométrique d'une famille de surfaces par un certain mode de génération qui conduit à définir analytiquement une fonction z de x et y par le système de deux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y, z, \alpha, A, B, \ldots, L) = 0, \\ \psi(x, y, z, \alpha, A, B, \ldots, L) = 0, \end{cases}$$

où entrent un paramètre variable α et un nombre quelconque n de fonctions arbitraires de α, représentées par A, B, ..., L. Obtenir une équation aux différences partielles, à laquelle satisfasse la

(1) Hermite a consacré en 1872 deux articles à cette question, que l'on trouvera dans le *Report of the British Association*, t. XLII, p. 233, et dans le *Messenger of Mathematics*, t. II, p. 69. Nous croyons inutile de les reproduire, Hermite ayant développé ces deux Notes dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. C'est le Chapitre de ce Livre se rapportant à ce sujet que nous réimprimons ici. E. P.

fonction z, quels que soient α et ces n fonctions, sera donc la question analogue à celle qui nous a précédemment conduit à la formation d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n.

A cet effet, j'observe en premier lieu que les relations données permettent de considérer x et y comme des fonctions de z dont les dérivées successives

$$x' = \frac{dx}{dz}, \qquad x'' = \frac{d^2x}{dz^2}, \qquad \ldots,$$

$$y' = \frac{dy}{dz}, \qquad y'' = \frac{d^2y}{dz^2}, \qquad \ldots$$

s'obtiendront, soit directement si l'on peut avoir x et y explicitement exprimés en z, soit par les règles relatives aux fonctions implicites.

Dans ce dernier cas, nous aurons d'abord

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dx}x' + \frac{d\varphi}{dy}y' + \frac{d\varphi}{dz} = 0,\\ &\frac{d\psi}{dx}x' + \frac{d\psi}{dy}y' + \frac{d\psi}{dz} = 0,\end{aligned}\right.$$

puis

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dx}x'' + \frac{d\varphi}{dy}y'' + \frac{d^2\varphi}{dx^2}x'^2 + 2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}x'y'\\ &\qquad + \frac{d^2\varphi}{dy^2}y'^2 + \frac{d^2\varphi}{dx\,dz}x' + \frac{d^2\varphi}{dy\,dz}y' + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0,\\ &\frac{d\psi}{dx}x'' + \frac{d\psi}{dy}y'' + \frac{d^2\psi}{dx^2}x'^2 + 2\frac{d^2\psi}{dx\,dy}x'y'\\ &\qquad + \frac{d^2\psi}{dy^2}y'^2 + \frac{d^2\psi}{dx\,dz}x' + \frac{d^2\psi}{dy\,dz}y' + \frac{d^2\psi}{dz^2} = 0,\end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite.

En second lieu, je remarque que

$$z = f(x, y)$$

étant la fonction qui résulte de l'élimination du paramètre α, on reproduira identiquement la quantité z si l'on y remplace x et y par les valeurs que l'on tire de la résolution des équations (1), car autrement ce serait de deux relations conclure une troisième qui en serait distincte. D'après cela, et envisageant x et y comme

fonctions de z, la première dérivée de l'identité obtenue donnera l'égalité suivante

$$(4)\qquad \frac{dz}{dx}x' + \frac{dz}{dy}y' - 1 = 0,$$

la seconde et la troisième celles-ci :

$$(5)\qquad \frac{dz}{dx}x'' + \frac{dz}{dy}y'' + \frac{d^2z}{dx^2}x'^2 + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}x'y' + \frac{d^2z}{dy^2}y'^2 = 0,$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dz}{dx}x''' + \frac{dz}{dy}y''' + 3\left[\frac{d^2z}{dx^2}x'x'' + \frac{d^2z}{dx\,dy}(x'y'' + y'x'') + \frac{d^2z}{dy^2}y'y''\right]\\ &\qquad + \frac{d^3z}{dx^3}x'^3 + 3\frac{d^3z}{dx^2\,dy}x'^2y' + 3\frac{d^3z}{dx\,dy^2}x'y'^2 + \frac{d^3z}{dy^3}y'^3 = 0.\end{aligned}\right.$$

Les quantités x', x'', x''', y', y'', y''' doivent être remplacées par leurs valeurs en fonctions de z, ou éliminées au moyen des relations (2), (3), ... En continuant les mêmes calculs jusqu'à la dérivée d'ordre n, on parviendra à un système de n équations où les dérivées partielles de l'ordre le plus élevé seront évidemment

$$\frac{d^nz}{dx^n}, \quad \frac{d^nz}{dx^{n-1}\,dy}, \quad \ldots, \quad \frac{d^nz}{dy^n},$$

et, en y joignant les deux relations proposées, il sera possible d'effectuer l'élimination du paramètre α et des n fonctions arbitraires

$$\mathrm{A}, \quad \mathrm{B}, \quad \ldots, \quad \mathrm{L};$$

c'est le résultat cherché, qui est ainsi une équation aux différences partielles d'ordre n. Dans le cas le plus simple de $n = 1$, lorsqu'il n'existe qu'une seule fonction arbitraire, cette équation aux différences partielles s'obtient immédiatement en résolvant par rapport à α et à A les équations

$$\varphi(x, y, z, \alpha, \mathrm{A}) = 0,$$
$$\psi(x, y, z, \alpha, \mathrm{A}) = 0.$$

Ayant en effet

$$\alpha = \Phi(x, y, z),$$
$$\mathrm{A} = \Psi(x, y, z),$$

il ne restera plus trace du paramètre ni de la fonction arbitraire dans les relations (2) qui deviennent

$$\frac{d\Phi}{dx}x' + \frac{d\Phi}{dy}y' + \frac{d\Phi}{dz} = 0,$$

$$\frac{d\Psi}{dx}x' + \frac{d\Psi}{dy}y' + \frac{d\Psi}{dz} = 0,$$

et le résultat de l'élimination de x' et y' entre ces équations et l'équation (4) est immédiatement donné en égalant à zéro le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{dz}{dx} & \dfrac{d\Phi}{dx} & \dfrac{d\Psi}{dx} \\[2ex] \dfrac{dz}{dy} & \dfrac{d\Phi}{dy} & \dfrac{d\Psi}{dy} \\[2ex] -1 & \dfrac{d\Phi}{dz} & \dfrac{d\Psi}{dz} \end{vmatrix}.$$

II. Soit, pour premier exemple, les équations

$$x = mz + \alpha,$$
$$y = nz + \mathrm{A},$$

qui représentent la génératrice d'un cylindre, nous aurons

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{dz}{dx} & 1 & 0 \\[2ex] \dfrac{dz}{dy} & 0 & 1 \\[2ex] 1 & -m & -n \end{vmatrix} = m\frac{dz}{dx} + n\frac{dz}{dy} - 1;$$

l'équation aux différences partielles des *surfaces cylindriques* est donc

$$m\frac{dz}{dx} + n\frac{dz}{dy} - 1 = 0.$$

La ligne droite

$$x - x_0 = \alpha(z - z_0),$$
$$y - y_0 = \mathrm{A}(z - z_0)$$

est la génératrice d'un cône; on trouve alors

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dz}{dx} & \dfrac{1}{z - z_0} & 0 \\[2ex] \dfrac{dz}{dy} & 0 & \dfrac{1}{z - z_0} \\[2ex] -1 & -\dfrac{x - x_0}{(z - z_0)^2} & -\dfrac{y - y_0}{(z - z_0)^2} \end{vmatrix} = \frac{(x - x_0)\dfrac{dz}{dx} + (y - y_0)\dfrac{dz}{dy} - (z - z_0)}{(z - z_0)^2},$$

et, par conséquent, pour l'équation aux différences partielles des *surfaces coniques*

$$(x - x_0)\frac{dz}{dx} + (y - y_0)\frac{dz}{dy} = z - z_0.$$

Les *surfaces de révolution* sont engendrées par la circonférence

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \alpha,$$
$$ax + by + cz = \mathrm{A},$$

ce qui nous donnera

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{dz}{dx} & x - x_0 & a \\[2ex] \dfrac{dz}{dy} & y - y_0 & b \\[2ex] -1 & z - z_0 & c \end{vmatrix},$$

et par conséquent l'équation aux différences partielles

$$[c(y - y_0) - b(z - z_0)]\frac{dz}{dx}$$
$$+ [a(z - z_0) - c(x - x_0)]\frac{dz}{dy} = b(x - x_0) - a(y - y_0).$$

Les *conoïdes* enfin ont pour génératrice la ligne droite

$$x - mz - p - \alpha(y - nz - q) = 0,$$
$$ax + by + cz = \mathrm{A},$$

qui se meut parallèlement au plan fixe $ax + by + cz = 0$, et rencontre la droite

$$x = mz + p,$$
$$y = nz + q.$$

L'équation aux différences partielles se présente donc sous la forme

$$(x - mz - p)\left[-(nb + c)\frac{dz}{dx} + na\frac{dz}{dy} + a\right]$$
$$+ (y - nz - q)\left[mb\frac{dz}{dx} - (ma + c)\frac{dz}{dy} + b\right] = 0,$$

qui devient plus simplement

$$(x - mz - p)\frac{dz}{dx} + (y - nz - q)\frac{dz}{dy} = 0,$$

lorsque le plan fixe est celui des xy.

III. La Géométrie donne encore d'autres exemples qui conduisent à l'élimination de deux et de trois fonctions arbitraires.

Soient, en premier, les équations

$$x - mz - p = \mathrm{A}(z - \alpha),$$
$$y - nz - q = \mathrm{B}(z - \alpha),$$

représentant une droite qui rencontre dans toutes les positions la droite fixe

$$x = mz + p,$$
$$y = nz + q.$$

Nous trouverons d'abord

$$y' = \mathrm{B} + n, \qquad y'' = 0,$$
$$x' = \mathrm{A} + m, \qquad x'' = 0,$$

et, observant ensuite que

$$(y - nz - b)\mathrm{A} - (x - mz - p)\mathrm{B} = 0,$$

nous en conclurons

$$(y' - n)\mathrm{A} - (x' - m)\mathrm{B} = 0$$

et, en éliminant $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$,

$$(y - nz - q)x' - (x - mz - p)y' = m(y - q) - n(x - p),$$

ou bien

$$vx' - uy' = w,$$

si l'on pose, pour abréger,

$$u = x - mz - p,$$
$$v = y - nz - q,$$
$$w = m(y - q) - n(x - p).$$

Ayant d'ailleurs

$$\frac{dz}{dx}x' + \frac{dz}{dy}y' = 1,$$

il en résulte ces valeurs

$$x' = \frac{u + \frac{dz}{dy}w}{\frac{dz}{dx}u + \frac{dz}{dy}v}, \qquad y' = \frac{v + \frac{dz}{dy}w}{\frac{dz}{dx}u + \frac{dz}{dy}w},$$

et l'équation (5) de la page 503 donne l'équation aux différences partielles

$$\frac{d^2z}{dx^2}\left(u + \frac{dz}{dy}w\right)^2$$
$$+ 2\frac{d^2z}{dx\,dy}\left(u + \frac{dz}{dy}w\right)\left(v - \frac{dz}{dy}w\right) + \frac{d^2z}{dy^2}\left(v - \frac{dz}{dx}w\right)^2 = 0.$$

Elle se simplifie si l'on suppose $m = 0$, $p = 0$, $n = 0$, $q = 0$, de sorte que la droite fixe soit l'axe des z, et devient

$$\frac{d^2z}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}xy + \frac{d^2z}{dy^2}y^2 = 0.$$

Les *surfaces gauches* à plan directeur ayant pour génératrice la droite

$$ax + by + cz = \alpha,$$
$$x = \mathrm{A}z + \mathrm{B},$$

parallèle à un plan fixe

$$ax + by + cz = 0,$$

conduisent au calcul suivant.

Nous aurons d'abord

$$ax' + by' + c = 0, \qquad x' = \mathrm{A},$$

puis

$$x'' = 0, \qquad y'' = 0,$$

de sorte que l'équation (5) devient

$$\frac{d^2z}{dx^2}x'^2 + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}x'y' + \frac{d^2z}{dy^2}y'^2 = 0.$$

Cela étant, les deux relations

$$ax' + by' = -c, \qquad \frac{dz}{dx}x' + \frac{dz}{dy}y' = 1$$

donnent

$$x' = \frac{b + \frac{dz}{dy}c}{b\frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy}}, \qquad y' = -\frac{a + \frac{dz}{dx}c}{b\frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy}},$$

et l'on en conclut, pour l'équation aux différences partielles,

$$\frac{d^2 z}{dx^2}\left(b+\frac{dz}{dy}c\right)^2-2\frac{d^2 z}{dx\,dy}\left(b+\frac{dz}{dy}c\right)\left(a+\frac{dz}{dx}c\right)+\frac{d^2 z}{dy^2}\left(a+\frac{dz}{dx}c\right)^2=0.$$

Lorsque le plan directeur est le plan des yz, il faut supposer $b=0$, $c=0$, et l'on a simplement $\frac{d^2 z}{dy^2}=0$; résultat évident *a priori*, l'élimination de α donnant pour z un binome du premier degré en y.

Ce sont enfin les *surfaces réglées* dont la génératrice a pour équations

$$x = \mathrm{A}z+\mathrm{B}, \qquad y=\alpha z+c,$$

qui serviront d'exemple d'élimination de trois fonctions arbitraires. Or, ayant dans ce cas

$$\begin{array}{lll} x'=\mathrm{A}, & x''=0, & x'''=0, \\ y'=\alpha, & y''=0, & y'''=0, \end{array}$$

les équations (5) et (6) de la page 503 donnent sur-le-champ

$$\frac{d^2 z}{dx^2}\frac{\mathrm{A}^2}{\alpha^2}+2\frac{d^2 z}{dx\,dy}\frac{\mathrm{A}}{\alpha}+\frac{d^2 z}{dy^2}=0,$$

$$\frac{d^3 z}{dx^3}\frac{\mathrm{A}^3}{\alpha^3}+3\frac{d^3 z}{dx^2\,dy}\frac{\mathrm{A}^2}{\alpha^2}+3\frac{d^3 z}{dx\,dy^2}\frac{\mathrm{A}}{\alpha}+\frac{d^3 z}{dy^3}=0,$$

de sorte qu'en faisant pour un instant

$$\omega=\frac{-\frac{d^2 z}{dx\,dy}+\sqrt{\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)^2-\frac{d^2 z}{dx^2}\frac{d^2 z}{dy^2}}}{\frac{d^2 z}{dx^2}},$$

l'équation aux différences partielles du troisième ordre sera

$$\frac{d^3 z}{dx^3}\omega^3+3\frac{d^3 z}{dx^2\,dy}\omega^2+3\frac{d^3 z}{dx\,dy^2}\omega+\frac{d^3 z}{dy^3}=0.$$

IV. La considération des surfaces enveloppes, où s'offre un mode de génération entièrement différent des précédents, conduit en Analyse à définir une fonction z de x et y par deux équations contenant un paramètre variable α et dont l'une est la dérivée de l'autre par rapport à ce paramètre. En désignant de nouveau

par A, B, ..., L, n fonctions arbitraires de α, ces conditions s'expriment ainsi :

$$f(x, y, z, \alpha, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{L})=0, \tag{1}$$

$$\frac{d f(x, y, z, \alpha, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{L})}{d\alpha}=0, \tag{2}$$

et nous nous proposerons encore de former, entre la fonction et les variables indépendantes, une équation aux différences partielles qui subsiste quelles que soient ces fonctions.

A cet effet, je conçois que x et y soient déterminés par les équations (1) et (2) en fonction de z, de manière à avoir toujours les relations obtenues page 503

$$\frac{dz}{dx}x'+\frac{dz}{dy}y'-1=0,$$

$$\frac{dz}{dx}x''+\frac{dz}{dy}y''+\frac{d^2 z}{dx^2}x'^2+2\frac{d^2 z}{dx\,dy}x'y'+\frac{d^2 z}{dy^2}y'^2=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

mais je procéderai différemment pour calculer les dérivées $x'=\frac{dx}{dz}$, $y'=\frac{dy}{dz}$, $\ldots$, en mettant à profit une circonstance importante qui s'offre lorsqu'on veut tirer de ces équations les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$. Différentiant pour cela la première par rapport à x, en supposant α fonction de x, y, z, il vient

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{df}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}=0,$$

ou simplement, d'après l'équation (2),

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}=0,$$

et l'on obtiendrait de même

$$\frac{df}{dy}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dy}=0.$$

Or nous n'avons plus dans ces relations les dérivées des fonctions arbitraires par rapport au paramètre, et nous en tirerons les quantités cherchées x', y', ..., exprimées au moyen seulement de

A, B, ..., L, en observant que $\frac{dz}{dx}$, par exemple, étant une fonction entièrement déterminée de x et y, que j'appellerai pour un moment $\theta(x, y)$, on aura

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{d\theta}{dx} x' + \frac{d\theta}{dy} y';$$

d'où l'on voit qu'on devra écrire

$$\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dz} = \frac{d^2 z}{dx^2} x' + \frac{d^2 z}{dx\,dy} y',$$

et pareillement

$$\frac{d\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dz} = \frac{d^2 z}{dx\,dy} x' + \frac{d^2 z}{dy^2} y'.$$

D'après cela, en représentant les dérivées partielles du premier et du second ordre par p, q, r, s, t, afin d'abréger l'écriture, nous aurons, pour déterminer x' et y', ces deux équations

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 f}{dx^2} x' + \frac{d^2 f}{dx\,dy} y' + \frac{d^2 f}{dx\,dz} \\
&\quad + \left(\frac{d^2 f}{dx\,dz} x' + \frac{d^2 f}{dy\,dz} y' + \frac{d^2 f}{dz^2}\right) p + \frac{df}{dz}(rx' + sy') = 0, \\
&\frac{d^2 f}{dx\,dy} x' + \frac{d^2 f}{dy^2} y' + \frac{d^2 f}{dy\,dz} \\
&\quad + \left(\frac{d^2 f}{dx\,dz} x' + \frac{d^2 f}{dy\,dz} y' + \frac{d^2 f}{dz^2}\right) q + \frac{df}{dz}(sx' + ty') = 0;
\end{aligned}$$

et il est clair qu'en continuant de différentier par rapport à z, on formera de proche en proche les dérivées de x et y jusqu'à un ordre quelconque $n-1$, avec cette circonstance que les dérivées partielles de z jusqu'à l'ordre n seront introduites dans leurs expressions. Il en résulte qu'en les substituant dans les relations (4), (5), (6), ..., de la page 503, on sera conduit à un système de n équations entre ces dérivées partielles et les quantités α, A, B, ..., L. Nous pouvons donc, en y joignant celles-ci,

$$f(x, y, z, \alpha, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{L}) = 0,$$

$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} p = 0, \qquad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} q = 0,$$

effectuer l'élimination du paramètre et de n fonctions arbitraires; c'est le résultat cherché, qui est ainsi une équation aux différences partielles d'ordre n.

Nous allons en faire l'application à deux exemples tirés de la Géométrie, après avoir remarqué que les équations ci-dessus, en x' et y', jointes à la relation (4) de la page 503, savoir

$$px' + qy' - 1 = 0,$$

donnent, par l'élimination de x' et y', la condition $\Delta = 0$, Δ étant le déterminant du système suivant

$$\begin{vmatrix}
p & \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dx\,dz} p + \frac{df}{dz} r & \frac{d^2 f}{dx\,dy} + \frac{d^2 f}{dx\,dz} q + \frac{df}{dz} s \\
q & \frac{d^2 f}{dx\,dy} + \frac{d^2 f}{dy\,dz} p + \frac{df}{dz} s & \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dy\,dz} q + \frac{df}{dz} t \\
-1 & \frac{d^2 f}{dx\,dz} + \frac{d^2 f}{dz^2} p & \frac{d^2 f}{dy\,dz} + \frac{d^2 f}{dz^2} q
\end{vmatrix}.$$

Mais si l'on ajoute aux termes de la première et de la deuxième ligne horizontale ceux de la troisième, multipliés d'abord par p et ensuite par q, on aura plus simplement

$$\Delta = \mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C},$$

en posant

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{d^2 f}{dx^2} + 2\frac{d^2 f}{dy\,dz} p + \frac{d^2 f}{dz^2} p^2 + \frac{df}{dz} r, \\
\mathcal{B} &= \frac{d^2 f}{dx\,dy} + \frac{d^2 f}{dy\,dz} p + \frac{d^2 f}{dx\,dz} q + \frac{d^2 f}{dz^2} pq + \frac{df}{dz} s, \\
\mathcal{C} &= \frac{d^2 f}{dy^2} + 2\frac{d^2 f}{dy\,dz} q + \frac{d^2 f}{dz^2} q^2 + \frac{df}{dz} t.
\end{aligned}$$

V. Nous considérerons en premier lieu les *surfaces développables,* enveloppes des positions d'un plan mobile

$$z + \alpha x + \mathrm{A} y + \mathrm{B} = 0,$$

et nous aurons immédiatement

$$\mathcal{A} = r, \qquad \mathcal{B} = s, \qquad \mathcal{C} = t;$$

d'où, par conséquent, l'équation aux différences partielles du second ordre

$$s^2 - rt = 0.$$

Soient, en second lieu, les *surfaces canaux,* enveloppes des positions d'une sphère de rayon constant

$$(x-\mathrm{A})^2+(y-\mathrm{B})^2+(z-\alpha)^2=a^2,$$

dont le centre décrit une courbe quelconque. On obtient alors

$$\frac{1}{2}\mathcal{A}=1+p^2+(z-\alpha)r,$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{B}=\quad pq\quad+(z-\alpha)s,$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{C}=1+q^2+(z-\alpha)t,$$

et le paramètre α s'élimine au moyen des relations

$$x-\mathrm{A}+(z-\alpha)p=0,\qquad y-\mathrm{B}+(z-\alpha)q=0,$$

qui donnent, en substituant dans l'équation de la sphère,

$$z-\alpha=\frac{a}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

On obtient ainsi l'équation aux différences partielles du second ordre

$$\begin{aligned}a^2(s^2-rt)-a[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]&\sqrt{1+p^2+q^2}\\&+(1+p^2+q^2)^2=0.\end{aligned}$$

La relation générale dont nous venons de faire usage, à savoir

$$\mathcal{B}^2-\mathcal{A}\mathcal{C}=0,$$

peut encore se démontrer très facilement comme il suit. Je reprends, à cet effet, les deux équations

$$\varphi(x,y,z,\alpha)=0,$$
$$\psi(x,y,z,\alpha)=0,$$

pour les différentier successivement par rapport à x et y, en supposant que le paramètre variable tiré de l'une d'elles en fonction de x, y, z, ait été substitué dans l'autre. On obtient ainsi

$$\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dz}p+\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}=0,\qquad \frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}q+\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy}=0,$$

$$\frac{d\psi}{dx}+\frac{d\psi}{dz}p+\frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}=0,\qquad \frac{d\psi}{dy}+\frac{d\psi}{dz}q+\frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy}=0,$$

et en remarquant que le déterminant

$$\begin{vmatrix}\dfrac{d\varphi}{d\alpha}\dfrac{d\alpha}{dx} & \dfrac{d\varphi}{d\alpha}\dfrac{d\alpha}{dy}\\[2ex] \dfrac{d\psi}{d\alpha}\dfrac{d\alpha}{dx} & \dfrac{d\psi}{d\alpha}\dfrac{d\alpha}{dy}\end{vmatrix}$$

s'évanouit, nous en concluons la relation suivante :

$$\begin{vmatrix}\dfrac{d\varphi}{dx}+\dfrac{d\varphi}{dz}p & \dfrac{d\varphi}{dy}+\dfrac{d\varphi}{dz}q\\[2ex] \dfrac{d\psi}{dx}+\dfrac{d\psi}{dz}p & \dfrac{d\psi}{dy}+\dfrac{d\psi}{dz}q\end{vmatrix}=0.$$

Cela posé, prenons en particulier

$$\varphi(x,y,z,\alpha)=\frac{df}{dx}+\frac{df}{dz}p,$$

$$\psi(x,y,z,\alpha)=\frac{df}{dy}+\frac{df}{dz}q;$$

on en tirera immédiatement

$$\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dz}p=\frac{d^2f}{dx^2}+2\frac{d^2f}{dx\,dz}p+\frac{d^2f}{dz^2}p^2+\frac{df}{dz}r=\mathcal{A},$$

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}q&=\frac{d\psi}{dx}+\frac{d\psi}{dz}p\\&=\frac{d^2f}{dx\,dy}+\frac{d^2f}{dy\,dz}p+\frac{d^2f}{dx\,dz}q+\frac{d^2f}{dz^2}pq+\frac{df}{dz}s=\end{aligned}$$

$$\frac{d\psi}{dy}+\frac{d\psi}{dz}q=\frac{d^2f}{dy^2}+2\frac{d^2f}{dy\,dz}q+\frac{d^2f}{dz^2}q^2+\frac{df}{dz}t=\mathcal{C},$$

et, par suite, l'équation cherchée

$$\mathcal{B}^2-\mathcal{A}\mathcal{C}=0.$$

VI. Nous ne nous sommes occupé jusqu'ici de la formation des équations aux différences partielles que dans le cas d'une fonction de deux variables. Considérons maintenant, par exemple, une fonction u de x, y, z, en la définissant par ces trois équations, où entrent deux paramètres α, β et un nombre quelconque n de fonctions arbitraires A, B, ..., L de ces paramètres, savoir :

$$\varphi(x,y,z,u,\alpha,\beta,\mathrm{A},\mathrm{B},\ldots,\mathrm{L})=0,$$
$$\psi(x,y,z,u,\alpha,\beta,\mathrm{A},\mathrm{B},\ldots,\mathrm{L})=0,$$
$$\theta(x,y,z,u,\alpha,\beta,\mathrm{A},\mathrm{B},\ldots,\mathrm{L})=0.$$

L'élimination des fonctions arbitraires s'effectuera par la même méthode que précédemment, et donnera pour résultat une équation aux différences partielles d'ordre n. La même conclusion s'obtiendra aussi en considérant les relations

$$f(x, y, z, u, \alpha, \beta, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{L}) = 0, \qquad \frac{df}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{df}{d\beta} = 0;$$

mais elle n'a plus lieu si l'on pose seulement deux équations avec un seul paramètre variable, savoir

$$\varphi(x, y, z, u, \alpha, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{L}) = 0,$$
$$\psi(x, y, z, u, \alpha, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{L}) = 0,$$

car alors on peut former une équation aux différences partielles d'ordre n, représentant le résultat de l'élimination d'un nombre de fonctions arbitraires supérieur à n et égal à $\frac{1}{2}n(n+1)$. Et quand le nombre des quantités A, B, ..., L n'est point compris dans cette formule, par exemple lorsqu'on le prend égal à quatre, de sorte qu'on ne puisse pas obtenir une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre, on parviendra, en introduisant les dérivées du troisième ordre, à plusieurs relations distinctes au lieu d'une seule. C'est là une circonstance que présente souvent l'élimination des fonctions arbitraires, et je vais en donner un exemple en considérant l'expression

$$z = f[x, y, \mathrm{F}_1(u), \mathrm{F}_2(v)],$$

où $\mathrm{F}_1(u)$ et $\mathrm{F}_2(v)$ sont deux fonctions arbitraires de u et v, qui sont des fonctions déterminées de x et y. Qu'on forme, en effet, les dérivées partielles du premier et du deuxième ordre de z, on obtiendra six équations où entrent les quantités

$$\mathrm{F}_1(u), \qquad \mathrm{F}'_1(u), \qquad \mathrm{F}''_1(u).$$
$$\mathrm{F}_2(v), \qquad \mathrm{F}'_2(v), \qquad \mathrm{F}''_2(v),$$

dont l'élimination ne sera pas possible, en général. Mais, en s'élevant aux dérivées partielles du troisième ordre, on ajoute quatre équations en introduisant seulement deux nouvelles quantités $\mathrm{F}'''_1(u)$, $\mathrm{F}'''_2(u)$, de sorte qu'il deviendra possible de former autant d'équations du troisième ordre qu'il y a de manières d'éliminer huit inconnues entre dix équations. On doit donc avoir en

vue principalement les formes analytiques où l'élimination des fonctions arbitraires donne lieu à une conclusion précise, à une seule et unique équation aux différences partielles, et j'indiquerai encore celle d'Euler, savoir :

$$z = \mathrm{F}_1(x + ay) + \mathrm{F}_2(x + by) + \ldots + \mathrm{F}_n(x + ly).$$

En faisant

$$(x - a)(x - b)\ldots(x - l) = x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots + s,$$

on trouve facilement

$$\frac{d^n z}{dy^n} + p\frac{d^n z}{dx\,dy^{n-1}} + q\frac{d^n z}{dx^2\,dy^{n-2}} + \ldots + s\frac{d^n z}{dx^n} = 0.$$

Ainsi, par exemple, l'expression

$$z = \mathrm{F}_1(x + ay) + \mathrm{F}_2(x - ay)$$

satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 z}{dy^2} - a^2\frac{d^2 z}{dx^2} = 0,$$

qui s'offre dans d'importantes questions de Mécanique et de Physique.

FIN DU TOME II.

ERRATA DU TOME II.

Page 60. — M. H. Weber a bien voulu nous communiquer l'errata suivant : Dans le développement de $2^8.\alpha$ (ligne 16) *il faut écrire* le coefficient 196884 *au lieu* du coefficient 196880.

Page 243. — Dans la formule (21), il doit y avoir alternance de signe, de sorte qu'on *doit lire*

$$\theta_1^2 \frac{\Theta_1'}{\Theta_1} = -\frac{4q \sin 2x}{1-q^2} + \frac{4q^2 \sin 4x}{1-q^4} - \frac{4q^3 \sin 6x}{1-q^6} + \ldots;$$

de même, à la place de la formule (22), *il faut lire :*

$$\theta_1^2 \frac{H_1'}{H_1} = -\operatorname{tang} x - \frac{4q^2 \sin 2x}{1-q^2} + \frac{4q^4 \sin 4x}{1-q^4} - \frac{4q^6 \sin 6x}{1-q^6} + \ldots.$$

Page 246. — Les trois formules du texte, lignes 12, 13, 14, doivent être écrites ainsi :

$$\begin{aligned} \eta^3 &= A\theta_1 + B\theta, \\ \theta_1^3 &= A\eta + C\theta, \\ \theta^3 &= -B\eta + C\theta_1. \end{aligned}$$

Page 435. — Dans le titre et en note, *au lieu de :* Rognet, *lire :* Roguet.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME II.

36423 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.