est différent de zéro, et si aucune des quantités ε n'est nulle. Nommant, en effet, Δ cet invariant, et δ le déterminant relatif aux équations (4), on aura, comme conséquence de l'équation

$$f(u_0, u_1, \ldots, u_n) = \varepsilon_0 x_0^2 + \varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_n x_n^2,$$

la relation

$$\Delta\delta^2 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n,$$

d'où il résulte bien que δ ne peut être supposé nul.

La proposition que nous venons de démontrer montre comment la distinction en diverses espèces qui a été faite de polynomes à trois indéterminées, au point de vue géométrique de la distinction des diverses surfaces du second ordre qui sont douées de centre, peut s'étendre à des polynomes à un nombre quelconque d'indéterminées. Chaque espèce de ces polynomes se trouvera définie par le nombre des carrés qui se présenteront affectés de coefficients positifs ou négatifs, lorsqu'on fera évanouir les rectangles par une substitution réelle. Et la propriété essentielle de cette classification consistera en ce que tous les polynomes qu'on peut déduire les uns des autres par des transformations linéaires à coefficients réels, offriront tous le même caractère spécifique. Mais ces considérations vont recevoir une nouvelle et importante application dans la question suivante.

V. — Sur la détermination du nombre des racines réelles des équations numériques qui sont comprises entre des limites données.

Nous considérerons une équation à coefficients réels quelconques de degré n, $F(\zeta) = 0$, dont les racines, supposées inégales, seront désignées par $a, b, c, \ldots, k$. Cela posé, soient t une indéterminée réelle, et f le polynome homogène suivant :

$$\begin{aligned} f = {} & \frac{1}{a-t}(x + ay + a^2 z + \ldots + a^{n-1} v)^2 \\ & + \frac{1}{b-t}(x + by + b^2 z + \ldots + b^{n-1} v)^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{k-t}(x + ky + k^2 z + \ldots + k^{n-1} v)^2; \end{aligned}$$

nous établirons d'abord cette proposition :

En réduisant f à une somme de carrés par une substitution réelle (ou si l'on veut en cherchant l'espèce à laquelle appartient ce polynome), le nombre des carrés affectés de coefficients positifs sera égal au nombre des couples de racines imaginaires de l'équation proposée, augmenté du nombre des racines réelles qui sont plus grandes que t.

Soit, pour abréger,

$$\varphi(\zeta) = x + \zeta y + \zeta^2 z + \ldots + \zeta^{n-1} v,$$

on pourra écrire f de cette manière,

$$f = \frac{\varphi^2(a)}{a-t} + \frac{\varphi^2(b)}{b-t} + \ldots + \frac{\varphi^2(k)}{k-t},$$

et il est bon tout d'abord de remarquer que la présence des racines imaginaires dans l'équation proposée n'empêchera pas les coefficients de ce polynome d'être réels. Effectivement ces racines devant être conjuguées deux à deux, si l'on a $a = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, une autre racine, b par exemple, aura pour expression $b = \alpha - \beta\sqrt{-1}$, et les termes $\frac{\varphi^2(a)}{a-t}$, $\frac{\varphi^2(b)}{b-t}$, où entrent ces racines, seront également des quantités imaginaires conjuguées de la forme $A + B\sqrt{-1}$ et $A - B\sqrt{-1}$, dont la somme sera réelle.

Cela posé, il nous est nécessaire d'établir qu'en faisant

$$(1) \qquad \begin{cases} x + ay + a^2 z + \ldots + a^{n-1} v = X, \\ x + by + b^2 z + \ldots + b^{n-1} v = Y, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x + ky + k^2 z + \ldots + k^{n-1} v = V, \end{cases}$$

on en tirera, sans impossibilité ni indétermination, les valeurs de $x, y, z, \ldots$, exprimées linéairement en $X, Y, Z, \ldots$.

Effectivement ces équations peuvent s'écrire ainsi

$$\varphi(a) = X, \qquad \varphi(b) = Y, \qquad \ldots, \qquad \varphi(k) = V,$$

et la formule d'interpolation de Lagrange donnera immédiatement

$$\varphi(\zeta) = \frac{F(\zeta)}{\zeta - a}\,\frac{X}{F'(a)} + \frac{F(\zeta)}{\zeta - b}\,\frac{Y}{F'(b)} + \ldots + \frac{F(\zeta)}{\zeta - k}\,\frac{V}{F'(k)}.$$

Or, en égalant dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de ζ, on obtiendra les expressions linéaires de $x, y, z, \ldots$, en X, Y, Z, ..., sans autres dénominateurs que les quantités $F'(a)$, $F'(b)$, ..., $F'(k)$, dont aucune ne s'évanouit, puisque par hypothèse l'équation proposée n'a pas de racines égales.

Ce point établi, considérons en premier lieu le cas où les racines $a, b, c, \ldots, k$ seraient toutes réelles. On pourra alors employer la substitution (1) pour reconnaître l'espèce à laquelle appartient le polynome f, car, exprimé en X, Y, Z, ..., il devient

$$\frac{1}{a-t}X^2 + \frac{1}{b-t}Y^2 + \frac{1}{c-t}Z^2 + \ldots + \frac{1}{k-t}V^2,$$

et l'on voit que le nombre des carrés affectés de coefficients positifs est précisément égal au nombre des racines qui sont plus grandes que t. La proposition annoncée se trouve ainsi immédiatement démontrée dans ce premier cas.

Supposons, en second lieu, la présence d'un ou de plusieurs couples de racines imaginaires, et soient, pour fixer les idées, $a = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $b = \alpha - \beta\sqrt{-1}$. Alors la substitution (1) n'est plus à coefficients réels, mais nous observons qu'elle le deviendra en mettant, au lieu de X et Y, $X + Y\sqrt{-1}$ et $X - Y\sqrt{-1}$. Effectivement, au lieu des équations $\varphi(a) = X$, $\varphi(b) = Y$, on aura les suivantes :

$$\varphi(a) = \varphi(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = X + Y\sqrt{-1},$$
$$\varphi(b) = \varphi(\alpha - \beta\sqrt{-1}) = X - Y\sqrt{-1},$$

et l'on voit bien que les nouvelles indéterminées X et Y seront la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans l'expression $\varphi(\alpha + \beta\sqrt{-1})$. Semblablement, s'il se présente un autre couple de racines imaginaires conjuguées c et d, au lieu de poser $\varphi(c) = Z$, $\varphi(d) = U$, on écrira

$$\varphi(c) = Z + U\sqrt{-1}, \qquad \varphi(d) = Z - U\sqrt{-1}.$$

Cela posé, effectuons, dans le polynome f, la substitution (1), modifiée comme on vient de l'expliquer par rapport aux racines imaginaires. Les termes de ce polynome qui correspondent aux racines réelles donneront précisément, comme dans le premier

cas, autant de carrés affectés de coefficients positifs, qu'il y aura de racines moindres que t; ainsi nous n'avons plus à considérer que les termes correspondants aux racines imaginaires conjuguées. Soient a et b deux racines de cette espèce; les termes $\frac{1}{a-t}\varphi^2(a) + \frac{1}{b-t}\varphi^2(b)$ deviendront, en effectuant la substitution,

$$\frac{1}{a-t}(X + Y\sqrt{-1})^2 + \frac{1}{b-t}(X - Y\sqrt{-1})^2,$$

expression susceptible d'une réduction remarquable.

Soit en effet $\frac{1}{a-t} = \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$, t étant réel; $\frac{1}{b-t}$ sera la quantité conjuguée, à savoir $\frac{1}{b-t} = \rho(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)$, et notre expression deviendra

$$\rho\left[\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right)(X + Y\sqrt{-1})\right]^2$$
$$+ \rho\left[\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right)(X - Y\sqrt{-1})\right]^2$$

ou bien

$$2\rho\left(X\cos\frac{\varphi}{2} - Y\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 - 2\rho\left(X\sin\frac{\varphi}{2} + Y\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2.$$

Nous sommes donc amenés à cette conclusion, que la présence d'un couple de racines imaginaires conjuguées dans le polynome f donne lieu à deux carrés dont l'un est affecté d'un coefficient positif, et l'autre d'un coefficient négatif, quel que soit t. Et en général, si l'équation proposée contient μ couples de racines imaginaires, les termes du polynome f qui contiennent ces racines donneront lieu à μ carrés affectés de coefficients positifs et à μ carrés affectés de coefficients négatifs. Le nombre total des carrés affectés de coefficients positifs qui s'offriront pour caractériser l'espèce à laquelle appartient le polynome sera donc, comme nous l'avons annoncé, le nombre de couples des racines imaginaires augmenté du nombre des racines réelles de l'équation proposée qui sont plus grandes que t.

Désignons par (t) ce nombre total des carrés affectés de coefficients positifs, et représentons par t_0 et t_1 deux valeurs distinctes de l'indéterminée t dont la première soit plus grande que la seconde. Il est visible que l'expression $(t_1) - (t_0)$ sera précisément le nombre des racines réelles de l'équation proposée $F(\zeta) = 0$, qui sont comprises entre les limites t_0 et t_1. Maintenant il ne nous reste plus que quelques mots à ajouter pour montrer que le polynome f peut s'évaluer au moyen des coefficients de l'équation $F(\zeta) = 0$. Observons, à cet effet, que tous les coefficients de f sont de la forme

$$\frac{a^i}{t-a} + \frac{b^i}{t-b} + \frac{c^i}{t-c} + \ldots + \frac{k^i}{t-k}.$$

Or, en décomposant en fractions simples $\frac{t^i F'(t)}{F(t)}$, on prouvera

$$\frac{t^i F'(t)}{F(t)} = \Pi(t) + \frac{a^i}{t-a} + \frac{b^i}{t-b} + \ldots + \frac{k^i}{t-k},$$

$\Pi(t)$ désignant la partie entière. Si donc on divise $t^i F'(i)$ par $F(t)$, et qu'on désigne par R le reste de la division, on aura précisément

$$\frac{R}{F(t)} = \frac{a^i}{t-a} + \frac{b^i}{t-b} + \ldots + \frac{k^i}{t-k}.$$

La quantité désignée par (t) se trouvera donc en réduisant à une somme de carrés un polynome du second degré entièrement connu; mais cette détermination des coefficients peut être évitée par l'analyse suivante qui se fonde sur la proposition déjà démontrée, que tous les polynomes déduits de f, par des substitutions réelles, appartiennent à la même espèce, c'est-à-dire qu'en les réduisant d'une manière quelconque à une somme de carrés, on arrivera toujours au même nombre de carrés affectés de coefficients positifs ou négatifs.

Soit

$$F(\zeta) = \zeta^n + p_1 \zeta^{n-1} + p_2 \zeta^{n-2} + \ldots + p_n = 0,$$

l'équation proposée. Posons

$$\varphi(\zeta) = x + \zeta y + \zeta^2 z + \ldots + \zeta^{n-1} v,$$
$$\Phi(\zeta) = X + \zeta Y + \zeta^2 Z + \ldots + \zeta^{n-1} V,$$

nous ferons en premier lieu la substitution propre à rendre identique, par rapport à l'indéterminée ζ, l'équation

$$\varphi(\zeta) = (\zeta - t)\Phi(\zeta) - V F(\zeta).$$

En comparant dans les deux membres les coefficients des mêmes

puissances de ζ, on déterminerait effectivement les valeurs de x, y, z, …, en X, Y, Z, …. Mais il suffit de remarquer qu'en mettant à la place de ζ les racines a, b, …, k, on en tire les relations

$$\varphi(a) = (a-t)\Phi(a), \qquad \varphi(b) = (b-t)\Phi(b), \qquad \ldots,$$
$$\varphi(k) = (k-t)\Phi(k).$$

Il s'ensuit que le polynome f, que, pour abréger, nous écrirons ainsi :

$$f = \sum \frac{1}{a-t}\varphi^2(a),$$

se change par cette substitution dans le suivant

$$\mathfrak{f} = \sum (a-t)\Phi^2(a),$$

le signe $\sum$ indiquant la somme de tous les termes relatifs aux diverses racines a, b, …, k.

Cette transformation obtenue, nous en ferons une seconde, en remplaçant X, Y, Z, …, V, par des indéterminées qu'il convient de représenter ainsi : ζ_0, ζ_1, ζ_2, …, ζ_{n-1}, et cela en posant

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X = \zeta_{n-1} + p_1 \zeta_{n-2} + p_2 \zeta_{n-3} + \ldots + p_{n-1} \zeta_0, \\ Y = \zeta_{n-2} + p_1 \zeta_{n-3} + p_2 \zeta_{n-4} + \ldots + p_{n-2} \zeta_0, \\ Z = \zeta_{n-3} + p_1 \zeta_{n-4} + p_2 \zeta_{n-5} + \ldots + p_{n-3} \zeta_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ U = \zeta_1 + p_1 \zeta_0, \\ V = \zeta_0. \end{array} \right.$$

On arrive alors à cette conséquence, que les fonctions linéaires $\Phi(a)$, $\Phi(b)$, …, $\Phi(k)$, peuvent être représentées par les quotients $\frac{F(\zeta)}{\zeta - a}$, $\frac{F(\zeta)}{\zeta - b}$, …, $\frac{F(\zeta)}{\zeta - k}$, si, la division faite, on remplace dans chacun d'eux une puissance quelconque de ζ, telle que ζ^i, par l'indéterminée ζ_i. Nommant donc ζ' une seconde quantité analogue à ζ, il est clair que l'expression

$$\sum (a-t) \frac{F(\zeta)}{\zeta - a} \frac{F(\zeta')}{\zeta' - a}$$

représentera parfaitement, et sans ambiguïté possible, ce que de vient, par la substitution (A), le polynome

$$\mathfrak{f} = \sum (a-t)\,\Phi^2(a),$$

pourvu que, les divisions effectuées, et après avoir ordonné par rapport à ζ, on écrive d'abord ζ_i au lieu de ζ^i, sans toucher d'ailleurs à l'indéterminée ζ'; puis, cette opération faite, qu'on remplace semblablement ζ'^i par ζ_i, après avoir ordonné par rapport à ζ'.

Ceci bien compris, rien ne sera plus facile que de saisir les transformations successivement indiquées dans les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\sum (a-t)\frac{\mathrm{F}(\zeta)}{\zeta-a}\,\frac{\mathrm{F}(\zeta')}{\zeta'-a}\\
&\quad= \mathrm{F}(\zeta)\,\mathrm{F}(\zeta')\sum \frac{a-t}{(\zeta-a)(\zeta'-a)}\\
&\quad= \mathrm{F}(\zeta)\,\mathrm{F}(\zeta')\sum \frac{1}{\zeta-\zeta'}\left(\frac{t-\zeta}{\zeta-a}-\frac{t-\zeta'}{\zeta'-a}\right)\\
&\quad= \frac{\mathrm{F}(\zeta)\,\mathrm{F}(\zeta')}{\zeta-\zeta'}\left(\sum \frac{t-\zeta}{\zeta-a}-\sum \frac{t-\zeta'}{\zeta'-a}\right).
\end{aligned}$$

La dernière nous conduit à employer les relations bien connues

$$\sum \frac{t-\zeta}{\zeta-a} = (t-\zeta)\sum \frac{1}{\zeta-a} = (t-\zeta)\frac{\mathrm{F}'(\zeta)}{\mathrm{F}(\zeta)},$$
$$\sum \frac{t-\zeta'}{\zeta'-a} = (t-\zeta')\sum \frac{1}{\zeta'-a} = (t-\zeta')\frac{\mathrm{F}'(\zeta')}{\mathrm{F}(\zeta')},$$

de sorte que le résultat de la substitution (A) dans le polynome $\mathfrak{f}$ se trouve représenté par cette expression très simple, et de laquelle ont disparu les racines $a, b, \ldots, k$, savoir

$$\frac{(t-\zeta)\,\mathrm{F}'(\zeta)\,\mathrm{F}(\zeta')-(t-\zeta')\,\mathrm{F}'(\zeta')\,\mathrm{F}(\zeta)}{\zeta-\zeta'}.$$

Quelques applications suffiront au lecteur pour se rendre familière cette métamorphose curieuse d'une fonction entière de deux variables ζ et ζ' en un polynome homogène du second degré, et l'on verra sans peine un algorithme pratique, qui permet d'effectuer rapidement cette transmutation de la première expression analytique dans la seconde. Mais, pour abréger, nous supprimerons ces détails et nous nous bornerons à remarquer que, lorsqu'on

donne numériquement les limites t_0, t_1, on doit, pour obtenir les quantités nommées précédemment (t_0) et (t_1), opérer sur les expressions

$$\frac{(t_0-\zeta)\,\mathrm{F}'(\zeta)\,\mathrm{F}(\zeta')-(t_0-\zeta')\,\mathrm{F}'(\zeta')\,\mathrm{F}(\zeta)}{\zeta-\zeta'},$$
$$\frac{(t_1-\zeta)\,\mathrm{F}'(\zeta)\,\mathrm{F}(\zeta')-(t_1-\zeta')\,\mathrm{F}'(\zeta')\,\mathrm{F}(\zeta)}{\zeta-\zeta'},$$

dont les coefficients sont purement numériques, et non pas sur l'expression générale, contenant l'indéterminée t. A la vérité, on trouverait de cette manière (après avoir fait disparaître les rectangles des variables) les coefficients des carrés exprimés par des fonctions de t, dans lesquelles on pourrait substituer *a posteriori* les valeurs t_0 et t_1; mais l'opération serait beaucoup plus embarrassée et plus longue.

Supposons, par exemple, qu'on veuille savoir combien de racines de l'équation

$$\zeta^3 - 3\zeta + 1 = 0$$

sont comprises entre zéro et l'unité. On trouvera d'abord (suppression faite du facteur positif 3) que l'expression

$$\frac{(t-\zeta)(\zeta^2-1)(\zeta'^3-3\zeta'+1)-(t-\zeta')(\zeta'^2-1)(\zeta^3-3\zeta+1)}{\zeta-\zeta'}$$

donne le polynome quadratique à trois indéterminées

$$\mathfrak{F} = t(-3\zeta_0^2-2\zeta_1^2-\zeta_2^2+2\zeta_0\zeta_1+2\zeta_0\zeta_2)+\zeta_0^2-\zeta_1^2-2\zeta_0\zeta_2+4\zeta_1\zeta_2.$$

Ce polynome pour $t = 0$ se réduit à

$$\zeta_0^2-\zeta_1^2-2\zeta_0\zeta_2+4\zeta_1\zeta_2 = (\zeta_0-\zeta_1)^2-(\zeta_1-2\zeta_2)^2+3\zeta_2^2;$$

et, si l'on y fait $t = 1$, il devient

$$-2\zeta_0^2-3\zeta_1^2-\zeta_2^2+2\zeta_1\zeta_0+4\zeta_1\zeta_2 = -(\zeta_2-2\zeta_1)^2+(\zeta_1-\zeta_0)^2-3\zeta_0^2.$$

Dans le premier cas on obtient deux carrés affectés de coefficients positifs, et aucun dans le second; ainsi : $(0) = 2$, $(1) = 1$; de sorte que le nombre des racines de l'équation proposée qui sont comprises entre zéro et l'unité, est égal à 1, différence des quantités (0) et (1). Observez enfin que, pour une valeur de t infiniment grande et positive, $\mathfrak{F}$ se réduit au polynome

$$-(3\zeta_0^2+2\zeta_1^2+\zeta_2^2-2\zeta_0\zeta_1-2\zeta_0\zeta_2),$$

qu'on décompose aisément comme il suit :

$$-(\zeta_2-\zeta_0)^2-2\left(\zeta_1-\frac{1}{2}\zeta_0\right)^2-\frac{3}{2}\zeta_0^2.$$

Donc, comme on n'obtient aucun carré affecté de coefficient positif, le nombre des racines de l'équation proposée qui sont supérieures à l'infini, augmenté de la moitié du nombre des racines imaginaires, c'est-à-dire évidemment le nombre des couples de ces dernières racines, se réduit à zéro. Ainsi l'équation proposée a toutes ses racines réelles.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur les considérations précédentes, qui ont fait voir toute l'importance de cette opération algébrique si simple et si élémentaire, qui consiste à mettre un polynome homogène du second degré sous la forme d'une somme de carrés. Mais, ainsi que nous l'avons promis en commençant, nous reviendrons, pour la compléter, sur le mode particulier de décomposition qui a été donné au paragraphe I.

Considérons, par exemple, un polynome à quatre variables $f(x, y, z, v)$; la méthode dont nous parlons conduit à un résultat de cette forme,

$$\begin{aligned} f(x,y,z,v) = {} & \varepsilon\,(x+ay+bz+cv)^2, \\ & +\varepsilon'(y+a'z+b'v)^2, \\ & +\varepsilon''(z+a''z)^2, \\ & +\varepsilon'''v^2, \end{aligned}$$

et, comme il importe surtout de connaître les facteurs ε, ε', ε'', ε''', dont les signes déterminent l'espèce du polynome, nous allons donner le moyen de les calculer directement.

A cet effet, nous observons que l'invariant du second membre sera, d'après les théorèmes précédemment établis, le produit $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon'''$, multiplié par le carré du déterminant relatif aux fonctions linéaires

$$\begin{aligned} x+ay+bz&+cv, \\ y+a'z&+b'v, \\ z&+a''v, \\ &v. \end{aligned}$$

Or on reconnaît que ce déterminant se réduit à son terme principal, qui est l'unité.

Nous pouvons ainsi regarder comme connu le produit $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon'''$. Cela posé, faisons dans l'équation précédente $v=0$, un raisonnement tout semblable montrera que $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''$ est l'invariant du polynome à trois variables $f(x, y, z, 0)$.

Continuons de même en supposant $v=0$, $z=0$, puis enfin $v=0$, $z=0$, $y=0$, on trouvera successivement que ε, ε' est l'invariant de $f(x, y, 0, 0)$ et ε le coefficient de x^2, dans le polynome proposé. Ces quatre coefficients pourront être calculés d'une manière directe, comme nous l'avons annoncé.

En général, soit $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ un polynome homogène à $n+1$ indéterminées; nommons Δ_i l'invariant du polynome qu'on en déduit en annulant toutes les indéterminées $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$, et Δ_0 le coefficient de x_0^2, on trouvera par la méthode de décomposition en carrés, dont nous nous occupons, le résultat suivant :

$$=\Delta_0 X_0^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_0}X_1^2+\frac{\Delta_2}{\Delta_1}X_2^2+\ldots+\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}X_i^2+\ldots+\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}X_n^2,$$

les fonctions linéaires ayant cette forme,

$$X_i = x_i + a x_{i+1} + b x_{i+2} + \ldots + k x_n,$$

où $a, b, \ldots, k$ sont des constantes réelles.

L'espèce à laquelle appartient le polynome f se détermine donc directement d'après le nombre des termes positifs et négatifs de la suite

$$\Delta_0,\quad \frac{\Delta_1}{\Delta_0},\quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\quad \ldots,\quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

ou, ce qui revient au même, d'après le nombre des variations et des permanences de la suite

$$1,\quad \Delta_0,\quad \Delta_1,\quad \Delta_2,\quad \ldots,\quad \Delta_{n-1},\quad \Delta_n.$$

C'est donc de ces quantités que dépend la détermination de l'expression désignée tout à l'heure par (t) dans le polynome

$$\frac{1}{a-t}\varphi^2(a)+\frac{1}{b-t}\varphi^2(b)+\ldots+\frac{1}{k-t}\varphi^2(k),$$

ou dans celui qui a pour expression symbolique

$$\frac{(t-\zeta)\,\mathrm{F}'(\zeta)\,\mathrm{F}(\zeta')-(t-\zeta')\,\mathrm{F}'(\zeta')\,\mathrm{F}(\zeta)}{\zeta-\zeta'}.$$

Relativement au premier de ces polynomes, on trouve ainsi que

$$\Delta_0=\sum\frac{1}{a-t},\qquad \Delta_1=\sum\frac{(a-b)^2}{(a-t)(b-t)},$$
$$\Delta_2=\sum\frac{(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2}{(a-t)(b-t)(c-t)},\qquad \ldots,$$

le signe $\sum$ représentant la somme des termes qu'on déduirait du premier en y faisant toutes les permutations des racines. Or ces formules sont précisément les fonctions de M. Sturm, sous la forme que leur a donnée M. Sylvester; de sorte que les considérations précédentes peuvent être considérées comme donnant une démonstration nouvelle du théorème de ce célèbre géomètre, démonstration dont le principal caractère est de n'employer aucune considération de continuité.

A ces dernières observations sur la réduction d'un polynome du second degré à une somme de carrés, nous ajouterons un procédé donné par M. *Moutard*, professeur à Paris, pour effectuer l'opération dans un cas où la méthode serait en défaut, par exemple s'il était question du polynome

$$f=\alpha xy+\beta xz+\gamma yz$$

dans lequel les carrés des variables n'existent pas. On observe que

$$\alpha f=(\alpha x+\gamma z)(\alpha y+\beta z)-\beta\gamma z^2,$$

et qu'on peut ensuite écrire

$$\begin{aligned}4(\alpha x+\gamma z)(\alpha y+\beta z)= &\;[\alpha x+\alpha y+(\gamma+\beta)z]^2\\ &-[\alpha x-\alpha y+(\gamma-\beta)z]^2,\end{aligned}$$

ce qui donne bien une décomposition du polynome proposé en trois carrés. Et l'on pourrait opérer d'une manière semblable dans les cas analogues relatifs à un nombre quelconque d'indéterminées.

SUR

LE RAYON DE COURBURE

DES COURBES GAUCHES.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. V, 1866, p. 297.

On donne dans l'enseignement un calcul un peu long pour déduire de la formule

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\varphi}{ds}$$

l'expression du carré de l'inverse du rayon de courbure au moyen des coordonnées x, y, z et de l'arc s, savoir

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{ds^6}[(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2+(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2],$$

la variable indépendante étant quelconque. On peut l'abréger comme il suit.

Soit pour un instant

$$a=\frac{dx}{ds},\qquad b=\frac{dy}{ds},\qquad c=\frac{dz}{ds},$$

et faisons

$$a'=a+da,\qquad b'=b+db,\qquad c'=c+dc,$$

l'angle de contingence $d\varphi$ sera donné par la formule relative au sinus, savoir :

$$\sin^2 d\varphi=(ab'-ba')^2+(ac'-ca')^2+(bc'-cb')^2;$$

de sorte que l'on aura immédiatement $d\varphi^2$ en calculant les expressions $ab' - ba'$, ... Or on trouve

$$\begin{aligned} ab' - ba' &= a(b + db) - b(a + da), \\ &= a\,db - b\,da, \\ &= \frac{dx}{ds}\,d\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}\,d\frac{dx}{ds}, \end{aligned}$$

et cette dernière expression donne lieu à la réduction suivante

$$\frac{dx}{ds}\,\frac{d^2y\,ds - dy\,d^2s}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\,\frac{d^2x\,ds - dx\,d^2s}{ds^2} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3}\,ds.$$

On a donc par un calcul bien facile

$$ab' - ba' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3}\,ds,$$

et semblablement

$$ac' - ca' = \frac{dx\,d^2z - dz\,d^2x}{ds^3}\,ds,$$

$$bc' - cb' = \frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{ds^3}\,ds,$$

d'où suit, comme on voit, la formule annoncée.

SUR L'INTÉGRALE $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Annali di Matematica, t. I (2e série, 1867, p. 155).

L'intégrale $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ présente deux cas bien distincts, suivant que l'exposant m est pair ou impair; dans le premier, elle est transcendante, dans le second, simplement algébrique et de la forme $P\sqrt{1 - x^2}$, P étant un polynome entier en x qu'on obtient ordinairement au moyen du procédé de l'intégration par parties, mais que l'on peut déterminer différemment et de manière à mieux mettre en évidence sa nature analytique.

Je chercherai en premier lieu le degré de P, en développant suivant les puissances décroissantes de la variable les deux membres de l'équation

$$(1) \qquad \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = P\sqrt{1 - x^2}.$$

Dans le premier, le terme le plus élevé en x sera $\frac{x^m}{m\sqrt{-1}}$, et dans le second $\alpha x^{\mu+1}\sqrt{-1}$, si l'on fait $P = \alpha x^\mu + \alpha' x^{\mu-1} + \ldots$; de sorte que l'on a

$$\mu = m - 1,$$

et l'on obtient en même temps la valeur du coefficient α, savoir

$$\alpha = -\frac{1}{m}.$$

Cela fait je poserai, pour obtenir P,

$$\int_0^x \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = P\sqrt{1 - x^2} - C,$$

C étant une constante, et l'on en déduira

$$P = \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^x \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Or, en développant le second membre suivant les puissances ascendantes de la variable, le premier terme donnera la série infinie

$$\frac{C}{\sqrt{1-x^2}} = C\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\ldots+\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}x^{2n}+\ldots\right).$$

Quant au second terme $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^x \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, il donnera également naissance à une série infinie, mais commençant évidemment par la puissance x^{m+1}. Comme P est un polynome fini du degré $m-1$, il est clair qu'en posant $m-1=2n$, l'effet de ce second terme doit être de détruire tous ceux de la série $\frac{C}{\sqrt{1-x^2}}$ venant après $\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}x^{2n}$, d'où cette conclusion :

Dans l'équation (1), *le polynome* P *est, à un facteur constant près, l'ensemble des premiers termes du développement de* $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, *jusqu'au terme en* x^{2n}, *suivant les puissances ascendantes de la variable.*

Pour déterminer le facteur constant C, il suffira de profiter de la remarque faite tout à l'heure que $\alpha = -\frac{1}{m}$; on devra donc poser

$$C\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n} = -\frac{1}{m},$$

d'où

$$C = -\frac{1}{m}\,\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1}.$$

J'observerai enfin que l'équation (1) différentiée donne

$$x^m = \frac{dP}{dx}(1-x^2) - Px,$$

d'où l'on tire aisément une équation linéaire du second ordre sans second membre, car il suffit de différentier une seconde fois, puis d'éliminer le terme indépendant de P et de ses dérivées. On trouve

de la sorte

$$x(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2} + [(m-3)x^2 - m]\frac{dP}{dx} + (m-1)xP = 0.$$

Cette équation est vérifiée en posant $P = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; ainsi, *en partageant d'une manière quelconque le développement ordonné suivant les puissances croissantes de* x *de la série* $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, *les deux parties satisfont à une même équation du second ordre.*

J'arrive au cas de m pair dans l'intégrale $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, et je pose alors

$$(2) \qquad \int_0^x \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathfrak{P}\sqrt{1-x^2} + \varepsilon\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

ε désignant une constante et $\mathfrak{P}$ un nouveau polynome, commençant comme tout à l'heure par le terme $-\frac{x^{m-1}}{m}$. Je n'ajoute pas de constante, le second membre devant être comme le premier une fonction impaire de la variable. La grande différence de nature analytique des relations (1) et (2) va se manifester à l'égard des polynomes P et $\mathfrak{P}$, car, en opérant absolument comme plus haut, on obtient cette conclusion :

Dans l'équation (2) *le polynome* $\mathfrak{P}$ *est, à un facteur près, l'ensemble des premiers termes du développement de la fonction transcendante* $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ *jusqu'au terme en* x^{2n-1}, *suivant les puissances ascendantes de la variable.*

Ce développement bien connu, et que donne immédiatement l'équation

$$\frac{dy}{dx}(1-x^2) - xy = 1,$$

savoir

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2.4}{3.5}x^5 + \ldots + \frac{2.4.6\ldots 2n-2}{3.5.7\ldots 2n-1}x^{2n-1} + \ldots,$$

conduit, en faisant $m = 2n$, à l'expression suivante :

$$\mathfrak{p} = -\varepsilon\left(x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2.4}{3.5}x^5 + \ldots + \frac{2.4.6\ldots 2n-2}{3.5.7\ldots 2n-1}x^{2n-1}\right).$$

Et en même temps on arrive à la détermination de ε en posant

$$\varepsilon\frac{2.4.6\ldots 2n-2}{3.5.7\ldots 2n-1} = \frac{1}{m} = \frac{1}{2n},$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n},$$

c'est-à-dire, précisément, le coefficient de x^{2n} dans le développement considéré plus haut $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

On tire aisément de ce dernier résultat la proposition suivante :

En désignant par $\mathrm{F}(x)$ *un polynome entier, l'intégrale* $\int \frac{\mathrm{F}(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *sera de la forme*

$$\Phi(x)\sqrt{1-x^2} + \varepsilon\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$\Phi(x)$ *désignant aussi un polynome entier, et le coefficient* ε *de la partie transcendante s'obtiendra en calculant le terme indépendant de* x *dans le développement de l'expression*

$$\mathrm{F}(x)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

suivant les puissances décroissantes de la variable.

Mais on peut le démontrer immédiatement en remarquant d'abord que l'on a évidemment $\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{F}(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi\varepsilon$, et ensuite que l'intégrale définie $2\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{F}(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ peut s'obtenir en intégrant $\frac{\mathrm{F}(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$, z décrivant un cercle de rayon infini, ayant son centre à l'origine. Il faut, à cet effet, développer suivant les puissances décroissantes de z l'expression proposée

$$\frac{\mathrm{F}(z)}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{z\sqrt{-1}}\mathrm{F}(z)\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or, $\mathrm{F}(z)$ étant un polynome entier, la quantité $\mathrm{F}(z)\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ne renferme qu'un *nombre fini* de puissances positives, et, en désignant par ρ le terme indépendant de la variable dans cette quantité, l'intégrale cherchée se réduira simplement à celle-ci,

$$\frac{\rho}{\sqrt{-1}}\int\frac{dz}{z} = 2\pi\rho,$$

de sorte que l'on a bien $\rho = \varepsilon$.

On arriverait enfin au résultat, par une voie purement algébrique et très simple, en partant de l'égalité

$$\int\frac{\mathrm{F}(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Phi(x)\sqrt{1-x^2} + \varepsilon\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il suffit en effet de différentier, de développer ensuite les deux membres suivant les puissances décroissantes de la variable, et de comparer les termes en $\frac{1}{x}$.

SUR

LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE

DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES

DE PREMIÈRE ET DE SECONDE ESPÈCE.

Annali di Matematica, t. II (2e série, 1868, p. 97).
(Extrait d'une lettre à Brioschi.)

Au lieu d'effectuer suivant les puissances ascendantes de la variable x le développement des quantités

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad \int_0^x \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

je poserai dans ce qui va suivre

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\sum \alpha_n x^{2n+1},$$

$$\int_0^x \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\sum \beta_n x^{2n+1}.$$

De cette manière on obtient pour les coefficients α_n et β_n des polynomes rationnels et entiers par rapport au module, dont voici quelques propriétés.

En premier lieu, réduisons à un terme algébrique, et aux fonctions de première et de seconde espèce, l'intégrale

$$\int_0^x \frac{x^{2\mu}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

en posant cette égalité, où l'exposant n est entier, P un polynome entier en x, A et B des constantes, savoir :

$$\int_0^x \frac{(k^2x^2)^{n+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \mathrm{P}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} - \mathrm{A}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \mathrm{B}\int_0^x \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

on aura

$$\mathrm{A} = \beta_n, \qquad \mathrm{B} = \alpha_n.$$

Une seconde propriété consiste en ce que les polynomes α_n et β_n sont les dénominateurs et numérateurs des réduites de la fraction continue (1)

$$\cfrac{k^2}{2(1+k^2) - \cfrac{9k^2}{4(1+k^2) - \cfrac{25k^2}{6(1+k^2) - \cfrac{49k^2}{8(1+k^2) - \ldots}}}}$$

représentant le quotient

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}{\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}.$$

Introduisons, au lieu du module, la quantité $k+\frac{1}{k}=2\varepsilon$, et posons

$$\alpha_n = \frac{k^n \mathrm{A}_n}{3.5\ldots 2n+1}, \qquad \beta_n = \frac{k^{n+1}\mathrm{B}_n}{3.5\ldots 2n+1},$$

(1) Cette assertion n'est exacte qu'à des facteurs numériques près. Si l'on désigne par $\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{Q}_n}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite, on a

$$\beta_n = \frac{1}{1.3.5\ldots 2n+1}\mathrm{P}_n,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{1.3.5\ldots 2n+1}\mathrm{Q}_n.$$

E. P

on aura ces relations,

$$2(n+1)\varepsilon\frac{dA_n}{d\varepsilon}-\frac{dB_n}{d\varepsilon}-2n(n+1)A_n=(2n+1)^2\frac{dA_{n-1}}{d\varepsilon},$$

$$2n\varepsilon\frac{dB_n}{d\varepsilon}+\frac{dA_n}{d\varepsilon}-2n(n+1)B_n=(2n+1)^2\frac{dB_{n-1}}{d\varepsilon},$$

et enfin les deux équations simultanées linéaires que voici :

$$\frac{dA_n}{d\varepsilon}=(1-\varepsilon^2)\frac{d^2B_n}{d\varepsilon^2}-\varepsilon\frac{dB_n}{d\varepsilon}+(n+1)^2B_n,$$

$$-\frac{dB_n}{d\varepsilon}=(1-\varepsilon^2)\frac{d^2A_n}{d\varepsilon^2}-3\varepsilon\frac{dA_n}{d\varepsilon}+n(n+2)A_n.$$

SUR L'EXPRESSION

DU

MODULE DES TRANSCENDANTES ELLIPTIQUES

EN FONCTION DU QUOTIENT DES DEUX PÉRIODES.

Annali di Matematica, t. III (2e série, 1869, p. 81).

On sait qu'en posant

$$\omega=\frac{iK'}{K},$$

on a pour le module $k^2=f(\omega)$ cette expression,

$$f(\omega)=\left(\frac{2e^{\frac{i\pi\omega}{4}}+2e^{9\frac{i\pi\omega}{4}}+2e^{25\frac{i\pi\omega}{4}}+\ldots}{1+2e^{i\pi\omega}+2e^{4i\pi\omega}+2e^{9i\pi\omega}+\ldots}\right)^4,$$

où la variable ω entre sous forme transcendante, et j'ai observé ailleurs qu'en appliquant la formule de Maclaurin à la quantité $f(i+\omega)$ pour obtenir un développement algébrique par rapport à ω, les coefficients au lieu d'être rationnels, comme dans les diverses séries élémentaires $\sin\omega$, $\cos\omega$, $\log(1+\omega)$, contiendront la transcendante numérique

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

M'étant proposé de calculer les premiers termes, j'ai été conduit à un autre développement également algébrique, mais où les coefficients sont purement rationnels, comme on va voir.

Partant des formules données par Jacobi dans les *Fundamenta*, § 29, et où l'on fait

$$q = 1 - 2k^2, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

savoir :

$$K' = J\left(1 + \frac{q^2}{2.4} + \frac{5^2.q^4}{2.4.6.8} + \frac{5^2.9^2.q^6}{2.4.6.8.10.12} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{\pi}{2J}\left(\frac{q}{2} + \frac{3^2.q^3}{2.4.6} + \frac{3^2.7^2.q^5}{2.4.6.8.10} + \ldots\right),$$

$$K = J\left(1 + \frac{q^2}{2.4} + \frac{5^2.q^4}{2.4.6.8} + \frac{5^2.9^2.q^6}{2.4.6.8.10.12} + \ldots\right)$$
$$- \frac{\pi}{2J}\left(\frac{q}{2} + \frac{3^2.q^3}{2.4.6} + \frac{3^2.7^2.q^5}{2.4.6.8.10} + \ldots\right),$$

j'en déduis

$$\frac{\frac{q}{2} + \frac{3^2.q^3}{2.4.6} + \frac{3^2.7^2.q^5}{2.4.6.10} + \ldots}{1 + \frac{q^2}{2.4} + \frac{5^2.q^4}{2.4.6.8} + \frac{5^2.9^2.q^6}{2.4.6.8.10.12} + \ldots} = \frac{2J^2}{\pi}\,\frac{K' - K}{K' + K} = \frac{2J^2}{\pi}\,\frac{\omega - i}{\omega + i},$$

et, le retour des suites donnant la valeur de q, on trouvera cette expression où les coefficients sont tous rationnels, savoir :

$$k^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2J^2}{\pi}\,\frac{\omega - i}{\omega + i}\right) + \left(\frac{2J^2}{\pi}\,\frac{\omega - i}{\omega + i}\right)^3$$
$$- \frac{13}{15}\left(\frac{2J^2}{\pi}\,\frac{\omega - i}{\omega + i}\right)^5 + \frac{3}{5}\left(\frac{2J^2}{\pi}\,\frac{\omega - i}{\omega + i}\right)^7 - \ldots.$$

Faisant pour un instant

$$\frac{2J^2}{\pi}\,\frac{\omega - i}{\omega + i} = \zeta,$$

on aura donc

$$f\left(i\,\frac{2J^2 + \pi\zeta}{2J^2 - \pi\zeta}\right) = \frac{1}{2} - \zeta + \zeta^3 - \frac{13}{15}\zeta^5 + \frac{3}{5}\zeta^7 - \ldots,$$

et la série en ζ du second membre aura cette propriété, qu'en y changeant ζ en $\frac{a + bi}{a - bi}\zeta$, où a et b sont entiers, la nouvelle série ainsi obtenue sera liée à la première par une équation algébrique, cette relation entre les deux séries étant l'équation modulaire pour la transformation dont l'ordre est $a^2 + b^2$. Cette remarque, appliquée

au cas le plus simple où l'on suppose $a = 1$, $b = 1$, donne pour conséquence que le développement suivant les puissances de ζ de l'expression

$$\frac{1 - 4k^2k'^2}{1 + 4k^2k'^2}$$

ne contient que les termes dont l'exposant est $\equiv 2 \bmod 4$.

SUR L'INTÉGRALE $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$.

Annali di Matematica, t. III (2e série, 1869, p. 83).

En supposant le radical $\sqrt{1-x^2}$ pris avec le signe $+$, on prouve aisément que l'on a la valeur

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

le second membre ayant le même signe que a dont la valeur absolue doit être supérieure à l'unité. Mais ce résultat suppose a réel, et, si l'on fait en général $a = \mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{-1}$, le signe du radical $\sqrt{a^2-1}$ se détermine par la condition qu'en posant

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-1}} = \mathrm{a} + \mathrm{b}\sqrt{-1},$$

a et A aient le même signe, ou encore que b et B soient de signes contraires, l'une de ces conditions entraînant l'autre.

SUR LA TRANSCENDANTE E_n.

Annali di Matematica, t. III (2e série, 1869, p. 83).

En posant avec Cauchy

$$\mathrm{E}_n = \frac{\varepsilon^n}{3.5.7\ldots 2n-1} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^{2n}\omega \cos(\varepsilon\cos\omega)\, d\omega,$$

l'intégrale définie qui figure dans cette expression étant la transcendante de Bessel, on trouve, lorsque n est un grand nombre, la valeur limite que voici. Posons

$$\varepsilon = \pi \sin\varphi,$$

on aura

$$\mathrm{E}_n = \frac{\left(e^{\cos\varphi} \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)^n}{\sqrt{2n\pi\cos\varphi}}.$$

SUR L'INTÉGRALE $\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

Bulletin des Sciences mathématiques, t. I (1870, p. 320).

Soit

$$f(\alpha)=\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1-2x\cos\alpha+x^2};$$

il est d'abord aisé de voir que l'on a

$$f(\alpha+\pi)=-f(\alpha);$$

car, en faisant, dans l'expression

$$f(\alpha+\pi)=-\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1+2x\cos\alpha+x^2},$$

la substitution $x=-t$, nous obtiendrons sur-le-champ

$$f(\alpha+\pi)=-\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dt}{1-2t\cos\alpha+t^2}=-f(\alpha).$$

La fonction $f(\alpha)$ est donc périodique, et il suffit, pour en obtenir la valeur générale, de la déterminer en supposant α compris entre zéro et π. Faisant à cet effet

$$x-\cos\alpha=u\sin\alpha,$$

ce qui donnera

$$\frac{\sin\alpha\, dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{du}{1+u^2},$$

nous écrirons

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\int_0^{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}} \frac{du}{1+u^2}-\int_0^{\frac{-1-\cos\alpha}{\sin\alpha}} \frac{du}{1+u^2},$$

de sorte que, dans le second membre, les deux intégrales représentent les arcs les plus petits, renfermés entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, ayant respectivement pour tangentes les quantités

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{tang}\frac{\pi+\alpha}{2}.$$

Or, α étant moindre que π par hypothèse, la première intégrale sera par conséquent $\frac{\alpha}{2}$, mais la seconde aura pour valeur l'arc $\frac{\pi+\alpha}{2}$ diminué de π, c'est-à-dire $\frac{\alpha-\pi}{2}$; nous aurons donc

$$f(\alpha)=\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{\pi}{2}$$

entre les limites indiquées pour la variable α. Maintenant la relation

$$f(\alpha+\pi)=-f(\alpha)$$

donne cette conséquence que, entre les limites π et 2π, $f(\alpha)$ a pour valeur $-\frac{\pi}{2}$, de sorte que nous nous trouvons amené à l'expression analytique, par une intégrale définie, d'une fonction *discontinue* égale à $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, selon que la variable est renfermée entre $2n\pi$ et $(2n+1)\pi$, ou entre les limites $(2n-1)\pi$ et $2n\pi$, n étant un nombre quelconque.

On voit donc comment on peut être amené, par les considérations les plus élémentaires du calcul intégral, à la considération si importante en Analyse des fonctions discontinues, et j'ajoute que l'expression en série trigonométrique de cette fonction particulière qui s'est ainsi offerte se tire facilement de l'intégrale définie.

Il suffit, en effet, d'employer ce développement connu, savoir :

$$\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\sin\alpha+x\sin2\alpha+x^2\sin3\alpha+\ldots+x^{n-1}\sin n\alpha+\ldots,$$

et d'observer qu'on a

$$\int_{-1}^{+1} x^{n-1}\, dx=0 \quad \text{ou} \quad =\frac{2}{n},$$

suivant que n est pair ou impair, pour parvenir au résultat que donnerait la formule de Fourier, savoir :

$$f(\alpha)=\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=2\left(\sin\alpha+\frac{\sin 3\alpha}{3}+\frac{\sin 5\alpha}{5}+\ldots\right).$$

Il serait même possible d'établir la convergence de la série, en limitant le développement de la fonction $\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ à ses n premiers termes, et considérant le reste qu'on trouvera sous cette forme, savoir :

$$R_n=\sin(n+1)\alpha\int_{-1}^{+1}\frac{x^n\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}-\sin n\alpha\int_{-1}^{+1}\frac{x^{n+1}\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2};$$

mais je ne m'y arrêterai point.

Une autre intégrale définie élémentaire conduit encore à la même fonction discontinue, c'est celle-ci :

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}},$$

dont la valeur est $\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ ou $-\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, suivant que la constante a, qui, en valeur absolue, doit être supposée supérieure à l'unité, est positive ou négative. Il en résulte, si l'on fait $a=\frac{1}{\cos\alpha}$, qu'on a

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dx}{(1-x\cos\alpha)\sqrt{1-x^2}}=+\pi \quad \text{ou} \quad -\pi,$$

suivant que $\sin\alpha$ est positif ou négatif; mais cette expression ne diffère pas au fond de celle dont nous venons de nous occuper, elle s'y ramène en effet par la substitution $x=\frac{2z}{1+z^2}$, qui sert en général à l'intégration des radicaux de la forme $\sqrt{1-x^2}$. Sous une forme ou sous l'autre, le passage brusque de $f(\alpha)$ d'une valeur nulle à $+\frac{\pi}{2}$, ou $-\frac{\pi}{2}$, semble moins caché dans l'intégrale que dans la série trigonométrique; car, en supposant α infiniment petit, elles offrent, sous le signe d'intégration, aux infiniment petits près du second ordre, l'une le facteur $\frac{1}{(1-x)^2}$, l'autre le facteur $\frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$,

qui, à la limite supérieure $x=1$, rendent les intégrales infinies; c'est du moins par l'intermédiaire de cette forme, du produit d'une quantité infiniment petite par une quantité infiniment grande, que se trouve réalisé le passage brusque d'une valeur nulle à une valeur finie.

Je remarque enfin qu'on a

$$f'(\alpha)=\int_{-1}^{+1}\frac{\cos\alpha(1+x^2)-2x}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^2}\,dx=\int_{-1}^{+}d\left(\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\right),$$

et l'intégrale est nulle, en général, puisque la fonction $\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ prend la même valeur aux deux limites; toutefois, pour $\cos\alpha=\pm 1$, elle est infinie, l'expression à intégrer entre les limites $+1$ et -1 étant $\frac{1}{1\pm x}$.