SUR L'INVARIANT GAUCHE
DES
FORMES DU SIXIÈME DEGRÉ.

SALMON, *Algèbre supérieure*, trad. *O. Chemin*, deuxième édition, 1890, p. 568.

On doit au P. Joubert [1] la découverte intéressante de l'expression de cet invariant, qui est du quinzième ordre, au moyen des racines de la forme proposée. Représentons cette forme par

$$f = a(x - x_\infty y)(x - x_0 y)(x - x_1 y)(x - x_2 y)(x - x_3 y)(x - x_4 y),$$

et posons

$$\begin{aligned}
U_0 &= [x_\infty x_0(x_2 + x_3 - x_1 - x_4) + x_1 x_4(x_\infty + x_0 - x_2 - x_3) \\
&\qquad + x_2 x_3(x_1 + x_4 - x_\infty - x_0)], \\
V_0 &= [x_\infty x_0(x_3 + x_4 - x_1 - x_2) + x_1 x_2(x_\infty + x_0 - x_3 - x_4) \\
&\qquad + x_3 x_4(x_1 + x_2 - x_\infty - x_0)], \\
W_0 &= [x_\infty x_0(x_2 + x_4 - x_1 - x_3) + x_1 x_3(x_\infty + x_0 - x_2 - x_4) \\
&\qquad + x_2 x_4(x_1 + x_3 - x_\infty - x_0)].
\end{aligned}$$

En convenant de désigner par U_i, V_i, W_i ce que deviennent ces expressions, en ajoutant le nombre k aux indices des racines pris suivant le module 5, on aura la valeur suivante de l'invariant gauche du quinzième ordre, savoir :

$$K = a^{15} U_0 U_1 U_2 U_3 U_4 V_0 V_1 V_2 V_3 V_4 W_0 W_1 W_2 W_3 W_4.$$

(1) Voir *Comptes rendus*, t. LXIV, 1867 (I), p. 1026.

SUR
LA THÉORIE DES POLYNOMES HOMOGÈNES
DU SECOND DEGRÉ [1].

Note VI du *Programme détaillé d'un Cours d'Arithmétique, d'Algèbre et de Géométrie analytique*, par GERONO et ROGNET, 4e édition, Paris, Mallet-Bachelier, 1856, p. 154.

Les propriétés des polynomes homogènes du second degré à plusieurs variables sont utiles à connaître dans beaucoup de questions d'Algèbre et de Géométrie analytique. Nous allons exposer dans cette Note, d'après M. Hermite, celles qui nous paraissent les plus importantes, et dont la démonstration n'exige que les premiers éléments du calcul. Voulant d'ailleurs que l'étude de ces démonstrations soit un exercice pour les élèves, nous considérerons le plus souvent un cas particulier de manière à en bien faire saisir l'esprit; après avoir mis ainsi en évidence tout ce qu'il faut connaître pour traiter le cas général, nous laisserons à chercher l'expression analytique la plus étendue des raisonnements et des méthodes exposés dans un cas spécial. On aura de la sorte à traiter des questions d'algèbre faciles en elles-mêmes, car la voie pour arriver au résultat sera bien indiquée à l'avance, et aucun autre exercice ne paraît plus profitable pour arriver à connaître et à employer avec sûreté l'instrument du calcul algébrique. Nous pensons aussi qu'on parviendra par là à mieux saisir et conserver dans son esprit les diverses propositions dont nous allons nous

(1) Nous insérons ici une Note *Sur la théorie des polynomes homogènes du second degré* extraite de l'Ouvrage indiqué de Gerono et Rognet. Cette Note n'est pas signée et porte seulement la mention : « d'après M. Hermite »; mais nous savons qu'elle a été rédigée par Hermite. Quoiqu'elle soit surtout intéressante au point de vue de l'enseignement, il nous a paru qu'elle méritait d'être reproduite. E. P.

occuper. Comme elles reposent en grande partie sur quelques propriétés des quantités qui se présentent dans la résolution d'un système d'équations du premier degré à plusieurs inconnues, nous commencerons par rappeler en quelques mots celles dont nous ferons usage.

I. — Des déterminants.

Considérons $n+1$ équations du premier degré à $n+1$ inconnues, dont les coefficients soient des quantités littérales, savoir :

$$\begin{array}{l}
ax + by + cz + \ldots + hu = \mathrm{K}, \\
a'x + b'y + c'z + \ldots + h'u = \mathrm{K}', \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a^{(n)}x + b^{(n)}y + c^{(n)}z + \ldots + h^{(n)}u = \mathrm{K}^{(n)}.
\end{array}$$

Le dénominateur commun des valeurs des inconnues, qu'on enseigne à former en Algèbre, et qui dépend seulement des coefficients de ces inconnues, a reçu le nom de *déterminant,* et se désigne par la notation abrégée

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a & b & c & \ldots & h \\ a' & b' & c' & \ldots & h' \\ .. & .. & .. & \ldots & .. \\ a^{(n)} & b^{(n)} & c^{(n)} & \ldots & h^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Ainsi, par exemple, pour deux équations à deux inconnues,

$$\begin{array}{l} ax + by = \mathrm{K}, \\ a'x + b'y = \mathrm{K}', \end{array}$$

on écrira

$$(2)\qquad ab' - ba' = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

Pour trois équations à trois inconnues

$$\begin{array}{l} ax + by + cz = \mathrm{K}, \\ a'x + b'y + c'z = \mathrm{K}', \\ a''x + b''y + c''z = \mathrm{K}'', \end{array}$$

on écrira de même

$$(3)\qquad ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - cb'a'' - ac'b'' - ba'c'' = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Parmi les monomes qui entrent dans le déterminant (1) développé, on distingue celui qui sert à former tous les autres par des échanges de lettres, savoir : $ab'c''$, ..., $h^{(n)}$. On lui donne le nom de *terme principal,* et il est toujours affecté du signe $+$. Ainsi ab' et $ab'c''$ sont respectivement les termes principaux des déterminants (2) et (3). Des diverses propriétés des déterminants qui découlent immédiatement de leur loi de formation, nous énoncerons celles-ci, qui seront utiles plus tard :

1° L'expression développée du déterminant (1) a la forme

$$\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c + \ldots + \mathrm{H}h,$$

où A, B, C, ..., H sont des quantités indépendantes de a, b, c, ..., h.

2° Un déterminant s'évanouit identiquement lorsque deux lignes horizontales ou deux colonnes verticales sont composées des mêmes termes. Ainsi, par exemple,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a & a \\ a' & a' \end{vmatrix} = aa' - aa' = 0, \qquad \begin{vmatrix} a & a & c \\ a' & a' & c' \\ a'' & a'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

3° Un déterminant ne change pas de valeur lorsqu'on remplace les colonnes verticales par les lignes horizontales, de manière que le terme principal reste le même. Ainsi, par exemple,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'.$$

Les deux premières de ces propositions se trouvent démontrées dans les Traités de M. Lefébure de Fourcy et de M. Briot; nous laissons comme exercice à trouver la démonstration de la troisième. Mais une autre, qui recevra d'importantes applications, nous reste à établir; et nous allons d'abord la présenter dans le cas le plus simple.

Considérons à cet effet les deux fonctions linéaires

$$\begin{array}{l} ax + by, \\ a'x + b'y, \end{array}$$

et supposons qu'on y remplace x et y par ces expressions,

$$x = \alpha X + \alpha' Y,$$
$$y = \beta X + \beta' Y;$$

elles deviendront respectivement

$$(a\alpha + b\beta) X + (a\alpha' + b\beta') Y,$$
$$(a'\alpha + b'\beta) X + (a'\alpha' + b'\beta') Y,$$

ou, pour abréger,

$$AX + BY,$$
$$A'X + B'Y.$$

Cela posé, je dis que *le déterminant* $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$ *sera égal au produit des deux déterminants* $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ *et* $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}$.

La vérification se fait sans difficulté, dans ce cas très simple, mais on peut éviter tout calcul en raisonnant comme il suit.

Considérons les deux équations

$$(4)\qquad \begin{cases} ax + by = K, \\ a'x + b'y = K'. \end{cases}$$

On sait qu'en les résolvant on trouvera, pour le dénominateur commun des valeurs de x et y, le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, et de la même manière, relativement aux deux autres équations

$$(5)\qquad \begin{cases} AX + BY = K, \\ A'X + B'Y = K', \end{cases}$$

le dénominateur commun des valeurs de X et Y sera le déterminant $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$. Or, on peut trouver X et Y par les équations

$$x = \alpha X + \alpha' Y,$$
$$y = \beta X + \beta' Y,$$

quand on y aura mis, au lieu de x et y, les valeurs fournies par les équations (4). Maintenant, et sans qu'il soit besoin d'effectuer ces calculs, on doit voir qu'en raison des valeurs fractionnaires de x et y, on trouvera pour dénominateur commun de X et Y le pro-

duit des déterminants $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}$. Ainsi ce produit doit être égal au déterminant $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$, qui, d'après les équations (5), représente aussi le dénominateur des valeurs de X et Y.

A la vérité, cette démonstration n'est pas entièrement rigoureuse, mais elle met immédiatement sur la voie du théorème général que nous allons énoncer en prenant pour exemple les trois fonctions linéaires :

$$ax + by + cz,$$
$$a'x + b'y + c'z,$$
$$a''x + b''y + c''z.$$

Concevons qu'on y mette, au lieu de x, y, z,

$$x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z,$$
$$y = \beta X + \beta' Y + \beta'' Z,$$
$$z = \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z;$$

elles deviendront respectivement

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma) X + (a\alpha' + b\beta' + c\gamma') Y + (a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'') Z,$$
$$(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma) X + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma') Y + (a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'') Z,$$
$$(a''\alpha + b''\beta + c''\gamma) X + (a''\alpha' + b''\beta' + c''\gamma') Y + (a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'') Z,$$

ou, pour abréger,

$$AX + BY + CZ,$$
$$A'X + B'Y + C'Z,$$
$$A''X + B''Y + C''Z.$$

Cela posé, on aura comme précédemment l'équation

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

La démonstration complète se déduit de la loi même de formation des déterminants; mais, comme elle offre peu d'intérêt par elle-même, nous l'omettrons, en insistant néanmoins sur la nécessité de bien se pénétrer du théorème qui va bientôt trouver d'importantes applications.

II. — De l'invariant des polynomes homogènes du second degré et du polynome adjoint.

On nomme *polynomes homogènes du second degré* des expressions telles que

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2,$$
$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B y z + 2 B' z x + 2 B'' x y, \quad \ldots;$$

ce sont ces expressions dont nous allons étudier les propriétés, en considérant, comme nous l'avons déjà dit, les cas particuliers les plus simples, et laissant aux élèves à généraliser les énoncés et les démonstrations.

La première que nous allons considérer dans le cas du polynome à deux indéterminées seulement

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2,$$

consiste en ce que, si l'on y remplace x et y par ces formules

$$x = a X + b Y,$$
$$y = a' X + b' Y,$$

il se transformera en un polynome *qui est encore homogène et du second degré par rapport aux nouvelles indéterminées* X *et* Y. Ce polynome sera ainsi de la forme

$$\mathcal{A} X^2 + 2 \mathcal{B} X Y + \mathcal{C} Y^2,$$

les coefficients ayant ces valeurs :

$$\mathcal{A} = A a^2 + 2 B a a' + C a'^2,$$
$$\mathcal{B} = A a b + B(a b' + b a') + C a' b',$$
$$\mathcal{C} = A b^2 + 2 B b b' + C b'^2.$$

Cette propriété très simple conduit naturellement à se proposer la question suivante :

Étant donnés deux polynomes quelconques, tels que

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2,$$
$$\mathcal{A} X^2 + 2 \mathcal{B} X Y + \mathcal{C} Y^2,$$

est-il toujours possible de déduire le second du premier en y faisant une substitution de la forme

$$x = a X + b Y,$$
$$y = a' X + b' Y?$$

Le problème admet-il un nombre fini ou infini de solutions; est-il résoluble en prenant pour les coefficients de la substitution des quantités réelles, les coefficients des polynomes donnés étant eux-mêmes supposés réels?

Notre principal objet dans cette Note sera d'établir quelques-uns des principes qui servent à résoudre ces questions et de montrer comment ils s'appliquent à la Géométrie et à l'Algèbre; faisons aussi observer en passant qu'une branche étendue des Mathématiques, l'Arithmétique supérieure, trouve également son point de départ dans la comparaison des polynomes homogènes du second degré, lorsqu'on suppose que les coefficients des polynomes et ceux des substitutions sont des nombres entiers.

Nous commencerons par établir qu'un polynome du second degré à n indéterminées est toujours réductible à la somme de n carrés de fonctions linéaires de ces indéterminées. Observons pour cela qu'en ordonnant ce polynome par rapport à l'une des indéterminées que nous nommerons x pour fixer les idées, il prendra la forme suivante :

$$A x^2 + 2 B x + C,$$

B étant une fonction linéaire, et C une fonction homogène du second degré des $n - 1$ indéterminées restantes. Or, on peut écrire

$$A x^2 + 2 B x + C = \frac{1}{A}(A x + B)^2 + \frac{1}{A}(AC - B^2),$$

et mettre ainsi en évidence, d'une part le carré de la fonction linéaire $Ax + B$, et de l'autre un polynome homogène à $n - 1$ indéterminées, $AC - B^2$, multiplié par la constante $\frac{1}{A}$. Cela posé, on opérera sur ce nouveau polynome, comme sur le proposé, et on le décomposera encore en deux parties, à savoir : le carré d'une fonction linéaire et un polynome à $n - 2$ indéterminées. Continuant donc de proche en proche les mêmes opérations, il est clair qu'on parviendra à la réduction annoncée quand on aura épuisé toutes les indéterminées. Par exemple, soit le polynome

$$f = x^2 + 2y^2 + z^2 + 4yz + 2zx + 2xy,$$

on écrira successivement

$$f = x^2 + 2x(y+z) + 2y^2 + 4yz + z^2 = (x+y+z)^2 + y^2 + 2yz,$$
$$y^2 + 2yz = (y+z)^2 - z^2,$$

et il viendra

$$f = (x+y+z)^2 + (y+z)^2 - z^2.$$

Plus tard, cette réduction sera étudiée attentivement; actuellement, nous nous bornons à remarquer qu'elle peut s'effectuer de plusieurs manières, en commençant chaque opération par l'une ou par l'autre des indéterminées, et que, pour arriver effectivement à une somme de carrés, de fonctions linéaires, il peut être nécessaire d'introduire des quantités imaginaires dans les coefficients de ces fonctions. Ainsi, dans l'exemple précédent, il faudrait écrire

$$f = (x+y+z)^2 + (y+z)^2 + (z\sqrt{-1})^2.$$

Quoi qu'il en soit, et sans insister sur d'autres particularités, nous allons, comme il suit, en tirer la notion de l'*invariant*.

Considérons le cas le plus simple du polynome

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

que nous mettrons sous la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = (ax+by)^2 + (a'x+b'y)^2.$$

Cette équation ne suffira pas pour déterminer les quatre quantités a, b, a', b'; mais il est très facile de trouver, en fonction de A, B, C, le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$.

En effet, soient pour un instant

$$(1) \qquad \begin{cases} X = ax + by, \\ Y = a'x + b'y, \end{cases}$$

de sorte que l'on ait

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = X^2 + Y^2.$$

En prenant successivement les dérivées des deux membres de cette équation par rapport à x et y, et divisant par 2, il viendra

$$Ax + By = aX + a'Y,$$
$$Bx + Cy = bX + b'Y.$$

Or, X et Y ayant les valeurs définies par les équations (1), on pourra égaler les déterminants relatifs aux fonctions linéaires

$$Ax + By,$$
$$Bx + Cy$$

et

$$aX + a'Y,$$
$$bX + b'Y;$$

mais, d'après un théorème établi au paragraphe I, le second de ces déterminants sera égal au produit

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix},$$

ou même à $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}^2$; car, d'après une proposition énoncée au paragraphe I, un déterminant ne change pas de valeur quand on met les lignes horizontales à la place des colonnes verticales. Nous en conclurons la relation à laquelle nous voulions parvenir, savoir :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}^2.$$

Or, la fonction des coefficients du polynome $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, à laquelle nous sommes ainsi conduits,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2,$$

est ce qu'on appelle l'*invariant* de ce polynome. Cette dénomination, proposée par M. Sylvester, célèbre géomètre anglais, se trouve justifiée par le théorème suivant :

Soit

$$\mathcal{A}X^2 + 2\mathcal{B}XY + \mathcal{C}Y^2$$

la transformée du polynome proposé par la substitution

$$x = \alpha X + \alpha' Y,$$
$$y = \beta X + \beta' Y;$$

je dis qu'on aura

$$\begin{vmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}^2;$$

c'est-à-dire que l'invariant se reproduira dans toute transformée, multiplié par le carré du déterminant de la substitution.

En effet, effectuons la substitution considérée dans les deux membres de l'équation identique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = (ax + by)^2 + (a'x + b'y)^2,$$

et posons, pour abréger,

$$\begin{aligned} a(\alpha X + \alpha' Y) + b(\beta X + \beta' Y) &= pX + qY, \\ a'(\alpha X + \alpha' Y) + b'(\beta X + \beta' Y) &= p'X + q'Y, \end{aligned}$$

on en déduira

$$\mathcal{A}X^2 + 2\mathcal{B}XY + \mathcal{C}Y^2 = (pX + qY)^2 + (p'X + q'Y)^2,$$

et, par suite,

$$\begin{vmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix}^2.$$

Mais, d'après le théorème sur la multiplication des déterminants, on a

$$\begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix},$$

et il en résulte immédiatement, après avoir élevé les deux membres au carré, la relation qu'il s'agissait d'établir

$$\begin{vmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}^2.$$

Avant d'aller plus loin, donnons encore l'énoncé des théorèmes analogues pour les polynomes à trois indéterminées, afin de rendre plus facile la recherche des énoncés les plus généraux.

Soit, à cet effet,

$$f = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy,$$

ce qu'on nommera l'invariant, sera le déterminant relatif aux trois

fonctions linéaires

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} f'_x &= A x + B'' y + B' z, \\ \tfrac{1}{2} f'_y &= B'' x + A' y + B z, \\ \tfrac{1}{2} f''_z &= B' x + B y + A'' z; \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2,$$

et l'on aura le théorème suivant :

Soit

$$\mathcal{A}X^2 + \mathcal{A}'Y^2 + \mathcal{A}''Z^2 + 2\mathcal{B}YZ + 2\mathcal{B}'ZX + 2\mathcal{B}''XY$$

la transformée déduite de f par la substitution

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z, \\ y &= \beta X + \beta' Y + \beta'' Z, \\ z &= \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z, \end{aligned}$$

l'invariant de cette transformée sera égal à l'invariant de f, multiplié par le carré du déterminant de la substitution.

Ainsi on aura

$$\begin{vmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}'' & \mathcal{B}' \\ \mathcal{B}'' & \mathcal{A}' & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}' & \mathcal{B} & \mathcal{A}'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}^2.$$

Les applications que nous ferons plus tard de ces théorèmes en montreront toute l'importance, mais dès à présent nous allons en faire voir l'usage, en nous proposant de calculer l'invariant de cette forme particulière

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2.$$

Au lieu d'appliquer la formule (2), après avoir développé le carré de $\alpha x + \beta y + \gamma z$, pour mettre en évidence les coefficients des carrés et des rectangles des variables, on fera

$$x = \mathrm{X},$$
$$y = \mathrm{Y},$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \mathrm{Z};$$

d'où résultera cette conséquence, que le polynome proposé est la transformée de

$$\mathrm{A}\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{B}\mathrm{X}\mathrm{Y} + \mathrm{C}\mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2, \tag{3}$$

par la substitution précédente, dont le déterminant se réduit, comme on le reconnaît aisément, à γ.

L'invariant cherché sera donc celui du polynome (3) multiplié par γ^2, c'est-à-dire, en appliquant la formule (2), égal à

$$\gamma^2(\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2).$$

La notion d'invariant bien comprise, passons à celle du polynome *adjoint*, qu'il importe également d'établir.

Pour cela, nous considérerons encore le cas le plus simple des polynomes à deux indéterminées, $f = \mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2$, et nous rappellerons en premier lieu le théorème bien connu qui est exprimé par cette relation

$$2f = xf'_x + yf'_y.$$

Cela posé, cherchons ce que devient f, quand on y remplace x et y par les indéterminées x_0 et y_0, liées aux précédentes par les relations

$$\frac{1}{2}f'_x = x_0, \qquad \frac{1}{2}f'_y = y_0.$$

En nommant φ le résultat cherché, qui sera un nouveau polynome du second degré, aux indéterminées x_0 et y_0, on aura ces trois équations,

$$\frac{1}{2}f'_x = x_0,$$
$$\frac{1}{2}f'_y = y_0,$$
$$\varphi = xx_0 + yy_0,$$

entre lesquelles il s'agit d'éliminer x et y. Pour cela, multiplions membre à membre successivement la première et la troisième, la

seconde et la troisième, il viendra ainsi

$$\frac{1}{2}\varphi f'_x = x_0(xx_0 + yy_0),$$
$$\frac{1}{2}\varphi f'_y = y_0(xx_0 + yy_0);$$

équations homogènes et du premier degré en x et y.

Le résultat de l'élimination de ces deux indéterminées s'obtiendra donc en égalant à zéro le déterminant relatif aux deux fonctions linéaires

$$\frac{1}{2}\varphi f'_x - x_0(xx_0 + yv_0),$$
$$\frac{1}{2}\varphi f'_y - y_0(xx_0 + yy_0);$$

de sorte que φ sera déterminé par cette équation :

$$\begin{vmatrix} \varphi\mathrm{A} - x_0^2 & \varphi\mathrm{B} - x_0 y_0 \\ \varphi\mathrm{B} - x_0 y_0 & \varphi\mathrm{C} - y_0^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans un instant il sera prouvé que ce déterminant contient le facteur φ. Ainsi l'on arrive bien, après la suppression de ce facteur, à une équation linéaire; mais ce qu'il importe tout d'abord de bien saisir, ce sont les propriétés du polynome en x_0 et y_0, déterminé par l'équation que nous venons d'obtenir.

Observons à cet effet qu'en posant

$$\psi = \varphi(\mathrm{A}x^2 - 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2) - (xx_0 + yy_0)^2,$$

on aura

$$\frac{1}{2}\psi'_x = \frac{1}{2}\varphi f'_x - x_0(xx_0 + yy_0),$$
$$\frac{1}{2}\psi'_y = \frac{1}{2}\varphi f'_y - y_0(xx_0 + yy_0).$$

Le déterminant ci-dessus n'est donc autre chose que l'invariant de ψ, considéré comme fonction de x et y. D'après cela, faisons dans ce polynome la substitution quelconque

$$x = \alpha\mathrm{X} + \alpha'\mathrm{Y},$$
$$y = \beta\mathrm{X} + \beta'\mathrm{Y},$$

et supposons alors que le polynome f devienne

$$\mathcal{A}X^2 + 2\mathcal{B}XY + \mathcal{C}Y^2,$$

il en résultera pour le polynome ψ cette nouvelle forme

$$\Psi = \varphi(\mathcal{A}X^2 + 2\mathcal{B}XY + \mathcal{C}X^2) - [(\alpha x_0 + \beta x_0)X + (\alpha' x_0 + \beta' y_0)Y]^2.$$

Cela posé, formons l'invariant de ψ et égalons-le à zéro; on reproduira ainsi l'équation dont dépend la quantité φ, car ces deux invariants sont égaux, à un facteur près; de là résulte ce théorème :

Le polynome φ reste invariable, si l'on y remplace les coefficients A, B, C, *qui y entrent, respectivement par* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, *pourvu qu'au lieu des indéterminées x_0, y_0 on mette en même temps*

$$\alpha x_0 + \beta x_0 \quad \text{et} \quad \alpha' x_0 + \beta' y_0.$$

Revenons maintenant au déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi A - x_0^2 & \varphi B - x_0 y_0 \\ \varphi B - x_0 y_0 & \varphi C - y_0^2 \end{vmatrix},$$

pour établir, comme nous l'avons annoncé, qu'il contient φ en facteur. A cet effet, considérons le polynome suivant à trois indéterminées

$$\chi = \psi + (xx_0 + yy_0 + z\varphi)^2,$$

qu'on trouvera aisément, en substituant la valeur de ψ, se réduire à

$$\chi = \varphi(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) + z\varphi(2xx_0 + 2yy_0 + 2\varphi).$$

Il résulte d'une remarque faite plus haut, que l'invariant de ce polynome χ, c'est-à-dire le déterminant relatif au système des trois fonctions linéaires

$$\frac{1}{2}\chi'_x, \quad \frac{1}{2}\chi'_y, \quad \frac{1}{2}\chi'_z,$$

est égal au produit de φ^2 multiplié par l'invariant du polynome ψ. En développant les expressions des trois dérivées, on parvient ainsi à la relation

$$\begin{vmatrix} \varphi A & \varphi B & \varphi x_0 \\ \varphi B & \varphi C & \varphi y_0 \\ \varphi x_0 & \varphi y_0 & \varphi^2 \end{vmatrix} = \varphi^2 \begin{vmatrix} \varphi A - x_0^2 & \varphi B - x_0 y_0 \\ \varphi B - x_0 y_0 & \varphi C - y_0^2 \end{vmatrix},$$

et, par suite, à celle-ci, après avoir divisé par φ^2,

$$\begin{vmatrix} A & B & x_0 \\ B & C & y_0 \\ x_0 & y_0 & \varphi \end{vmatrix} \times \varphi = \begin{vmatrix} \varphi A - x_0^2 & \varphi B - x_0 y_0 \\ \varphi B - x_0 y_0 & \varphi C - y_0^2 \end{vmatrix}.$$

Cette transformation de déterminants nous montre que le terme indépendant de φ, dans l'équation

$$\begin{vmatrix} \varphi A - x_0^2 & \varphi B - x_0 y_0 \\ \varphi B - x_0 y_0 & \varphi C - y_0^2 \end{vmatrix} = 0,$$

doit disparaître de lui-même. Cela posé, soit pour un instant

$$\begin{vmatrix} A, & B \\ B, & C \end{vmatrix} = \theta(A, B, C);$$

cette équation pourra s'écrire

$$\theta(\varphi A - x_0^2, \varphi B - x_0 y_0, \varphi C - y_0^2) = 0,$$

et l'on tirera, en développant,

$$\varphi^2 \theta(A, B, C) - \varphi \{ \theta'_A x_0^2 + \theta'_B x_0 y_0 + \theta'_C y_0^2 \} = 0;$$

d'où enfin

$$\varphi = \frac{\theta'_A x_0^2 + \theta'_B x_0 y_0 + \theta'_C y_0^2}{\theta(A, B, C)}.$$

C'est là le résultat définitif auquel nous voulions parvenir; et le polynome en x_0 et y_0 qui se présente comme numérateur de φ est ce que nous nommerons avec Gauss le polynome adjoint de $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$. Maintenant il ne nous reste plus, pour terminer ce sujet, qu'à donner quelques indications propres à faciliter aux élèves l'extension au cas général des raisonnements et des calculs précédents.

Soit, par exemple, le polynome à trois indéterminées

$$f = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

En prenant pour point de départ la relation

$$2f = xf'_x + yf'_y + zf'_z,$$

il s'agira de trouver ce qu'il devient en substituant à x, y, z les indéterminées nouvelles

$$x_0 = \frac{1}{2} f'_x, \qquad y_0 = \frac{1}{2} f'_y, \qquad z_0 = \frac{1}{2} f'_z.$$

Nommons φ le résultat cherché ; on sera conduit aux quatre équations

$$x_0 = \frac{1}{2} f'_x,$$

$$y_0 = \frac{1}{2} f'_y,$$

$$z_0 = \frac{1}{2} f'_z,$$

$$\varphi = x x_0 + y y_0 + z z_0,$$

desquelles on déduira d'abord

$$\frac{1}{2} \varphi f'_x = x_0 (x x_0 + y y_0 + z z_0),$$

$$\frac{1}{2} \varphi f'_y = y_0 (x x_0 + y y_0 + z z_0),$$

$$\frac{1}{2} \varphi f'_z = z_0 (x x_0 + y y_0 + z z_0).$$

On observera ensuite qu'en posant

$$\psi = \varphi f - (x x_0 + y y_0 + z z_0)^2,$$

elles deviennent simplement

$$\frac{1}{2} \psi'_x = 0, \qquad \frac{1}{2} \psi'_y = 0, \qquad \frac{1}{2} \psi'_z = 0,$$

et l'on en conclura que l'équation pour déterminer φ s'obtiendra en égalant à zéro l'invariant du polynome ψ. D'ailleurs cet invariant, à savoir

$$\begin{vmatrix} \varphi A - x_0^2 & \varphi B'' - x_0 y_0 & \varphi B' - x_0 z_0 \\ \varphi B'' - x_0 y & \varphi A' - y_0^2 & \varphi B - y_0 z_0 \\ \varphi B' - x_0 z_0 & \varphi B - y_0 z_0 & \varphi A'' - z_0^2 \end{vmatrix},$$

sera susceptible de la transformation exprimée par l'équation suivante

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & x_0 \\ B'' & A' & B & y_0 \\ B & B & A'' & z_0 \\ x_0 & y_0 & z_0 & \varphi \end{vmatrix} \times \varphi^2 = \begin{vmatrix} \varphi A - x_0^2 & \varphi B'' - x_0 y_0 & \varphi B' - z_0 x_0 \\ \varphi B'' - x_0 y_0 & \varphi A' - y_0^2 & \varphi B - y_0 z_0 \\ \varphi B' - z_0 x_0 & \varphi B - y_0 z_0 & \varphi A'' - z_0^2 \end{vmatrix},$$

à laquelle on parviendra en cherchant l'invariant du polynome à quatre indéterminées

$$\chi = \psi + (x x_0 + y y_0 + z z_0 + \varphi u)^2.$$

Les choses ainsi préparées, en posant

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = \theta(A, A', A'', B, B', B''),$$

on donnera à l'équation en φ la forme suivante

$$\theta(\varphi A - x_0^2, \varphi A' - y_0^2, \varphi A'' - z_0^2, \varphi B - y_0 z_0, \varphi B' - x_0 z_0, \varphi B'' - x_0 y_0) = 0.$$

Or, dans cette équation, les termes φ^3 et φ^2 existeront seuls, et, après avoir développé, on en tirera

$$\varphi = \frac{\theta'_A x_0^2 + \theta'_{A'} y_0^2 + \theta'_{A''} z_0^2 + \theta'_B y_0 z_0 + \theta'_{B'} z_0 x_0 + \theta'_{B''} x_0 y_0}{\theta(A, A', A'', B, B', B'')}.$$

Cela posé, le numérateur de cette expression sera le *polynome adjoint* de f, et φ lui-même donnera lieu au théorème suivant :

Supposons qu'en faisant la substitution

$$x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z,$$
$$y = \beta X + \beta' Y + \beta'' Z,$$
$$z = \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z,$$

f se change en

$$F = \mathcal{A} X^2 + \mathcal{A}' Y^2 + \mathcal{A}'' Z^2 + 2 \mathcal{B} YZ + 2 \mathcal{B}' ZX + 2 \mathcal{B}'' XY,$$

φ restera invariable, si l'on y remplace les coefficients de f par ceux de F, *et qu'on y mette en même temps, au lieu de x_0, y_0, z_0, les fonctions linéaires*

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0, \quad \alpha' x_0 + \beta' y_0 + \gamma' z_0, \quad \alpha'' x_0 + \beta'' y_0 + \gamma'' z_0.$$

En terminant, nous remarquerons que la forme explicite du polynome adjoint de

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2$$

est

$$C x_0^2 - 2 B x_0 y_0 + A y_0^2,$$

et que la forme explicite du polynome adjoint de

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$

est

$$(A'A'' - B^2)x_0^2 + (A''A - B'^2)y_0^2 + (AA' - B''^2)z_0^2$$
$$+ 2(B'B'' - AB)y_0 z_0 + 2(B''B - A'B')z_0 x_0 + 2(BB' - A''B'')x_0 y_0.$$

Elles nous seront utiles dans les questions suivantes.

III. — Applications à la géométrie analytique.

La recherche des axes principaux dans les courbes du second degré dépend de ce problème.

Étant proposé le polynome

$$f = AX^2 + 2BXY + CY^2,$$

déterminer les coefficients de la substitution

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \alpha X + \alpha' Y, \\ y = \beta X + \beta' Y, \end{cases}$$

et les quantités ε, ε', *de manière qu'on ait identiquement*

$$(2) \qquad AX^2 + 2BXY + CY^2 = \varepsilon x^2 + \varepsilon' y^2$$

et

$$(3) \qquad X^2 + Y^2 = x^2 + y^2.$$

Il s'agit, comme on voit, de trouver les valeurs de six quantités inconnues, ε et ε' d'une part, et de l'autre les coefficients de la substitution; et pour cela on a, en effet, six équations qui résultent de l'identification des termes semblables dans les relations (2) et (3). Mais nous éviterons comme il suit la considération de ce système compliqué d'équations.

Désignons par λ une quantité indéterminée; on aura

$$(4) \qquad f - \lambda(X^2 + Y^2) = (\varepsilon - \lambda)x^2 + (\varepsilon' - \lambda)y^2.$$

Cela fait, cherchons l'invariant du second membre.

L'invariant du polynome $(\varepsilon - \lambda)x^2 + (\varepsilon' - \lambda)y^2$, en y considérant x et y comme les indéterminées indépendantes, sera

$(\varepsilon - \lambda)(\varepsilon' - \lambda)$; donc, si l'on fait la substitution (1), l'invariant du polynome transformé sera

$$(\varepsilon - \lambda)(\varepsilon' - \lambda) \times \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}^2.$$

Maintenant, si on l'égale à celui du premier membre, on arrivera à la relation

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ B & C - \lambda \end{vmatrix} = (\varepsilon - \lambda)(\varepsilon' - \lambda) \times \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}^2.$$

Or, il en résulte immédiatement que les deux quantités ε et ε' sont les racines de l'équation du second degré en λ

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ B & C - \lambda \end{vmatrix} = (A - \lambda)(C - \lambda) - B^2 = 0.$$

Une autre conséquence à remarquer, c'est que, le coefficient de λ^2 dans le premier membre étant l'unité, on a

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}^2 = 1.$$

Pour achever la solution, en regardant ε et ε' comme connus, on fera successivement, dans l'équation (4), $\lambda = \varepsilon$, $\lambda = \varepsilon'$, et l'on en déduira les valeurs de x^2 et y^2, de sorte que les fonctions linéaires $\alpha X + \alpha' Y$, $\beta X + \beta' Y$ peuvent dès lors être regardées comme complètement déterminées.

Passons à la question analogue pour les surfaces du second ordre.

Le problème est alors :

Étant proposé un polynome à trois indéterminées

$$f = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY,$$

déterminer les coefficients de la substitution

$$(5) \qquad \begin{cases} x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z, \\ y = \beta X + \beta' Y + \beta'' Z, \\ z = \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z, \end{cases}$$

et les quantités ε, ε', ε'', *de manière qu'on ait identiquement*

$$f = \varepsilon x^2 + \varepsilon' y^2 + \varepsilon'' z^2,$$
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Soit, comme précédemment, λ une indéterminée, et déduisons de ces deux relations la suivante

$$(6) \qquad f - \lambda(X^2 + Y^2 + Z^2) = (\varepsilon - \lambda)x^2 + (\varepsilon' - \lambda)y^2 + (\varepsilon'' - \lambda)z^2.$$

Nous commencerons encore par chercher l'invariant du second membre. Observons, à cet effet, qu'en considérant x, y, z comme les indéterminées indépendantes, l'invariant du polynome

$$(\varepsilon - \lambda)x^2 + (\varepsilon' - \lambda)y^2 + (\varepsilon'' - \lambda)z^2$$

est simplement

$$(\varepsilon - \lambda)(\varepsilon' - \lambda)(\varepsilon'' - \lambda);$$

d'où il résulte qu'en faisant la substitution (5), l'invariant du polynome transformé sera

$$(\varepsilon - \lambda)(\varepsilon' - \lambda)(\varepsilon'' - \lambda) \times \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}^2.$$

Maintenant, si on l'égale à celui du premier membre, on arrivera à la relation

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B'' & B' \\ B'' & A' - \lambda & B \\ B' & B & A'' - \lambda \end{vmatrix} = (\varepsilon - \lambda)(\varepsilon' - \lambda)(\varepsilon'' - \lambda) \times \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}^2.$$

Ainsi, les quantités ε, ε', ε'' sont les racines de l'équation du troisième degré en λ

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} A - \lambda & B'' & B' \\ B'' & A' - \lambda & B \\ B' & B & A'' - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (A - \lambda)(A' - \lambda)(A'' - \lambda) \\ &\quad + 2BB'B'' - (A - \lambda)B^2 - (A' - \lambda)B'^2 - (A'' - \lambda)B''^2 = 0, \end{aligned}$$

et l'on obtient encore, comme précédemment, cette conséquence

que le carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

a pour valeur l'unité, de sorte que l'invariant du second membre de la relation (6) se réduit à

$$(\varepsilon - \lambda)(\varepsilon' - \lambda)(\varepsilon'' - \lambda).$$

Il nous reste à déterminer les coefficients de la substitution (5), c'est à quoi nous parviendrons en égalant les polynomes adjoints des deux membres de la relation (6). Mais nous avons d'abord une observation importante à faire. De l'identité

$$x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

résultent les six relations suivantes

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, & \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, & \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0, \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1, & \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0. \end{array} \right.$$

Or il s'ensuit, qu'étant proposé le système d'équations

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha u + \beta v + \gamma w = x_0, \\ \alpha' u + \beta' v + \gamma' w = y_0, \\ \alpha'' u + \beta'' v + \gamma'' w = z_0, \end{array} \right.$$

on en tire

$$u = \alpha x_0 + \alpha' y_0 + \alpha'' z_0.$$
$$v = \beta x_0 + \beta' y_0 + \beta'' z_0,$$
$$w = \gamma x_0 + \gamma' y_0 + \gamma'' z_0.$$

Substituons, en effet, ces valeurs dans les équations proposées, on les trouvera immédiatement identiques, en vertu des relations (7). En nous bornant, par exemple, à faire la substitution dans la première équation

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = x_0,$$

on trouvera pour le premier membre

$$\alpha(\alpha x_0 + \alpha' y_0 + \alpha'' z_0) + \beta(\beta x_0 + \beta' y_0 + \beta'' z_0) + \gamma(\gamma x_0 + \gamma' y_0 + \gamma'' z_0),$$

ou bien

$$x_0(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+y_0(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')+z_0(\alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma),$$

ce qui se réduit bien à x_0.

Cette remarque faite, passons à la recherche du polynome adjoint du second membre de la relation (6). Pour cela nous aurons à effectuer la substitution suivante

$$(9)\qquad \begin{cases} \alpha\,(\varepsilon-\lambda)x+\beta\,(\varepsilon'-\lambda)y+\gamma\,(\varepsilon''-\lambda)z=x_0,\\ \alpha'(\varepsilon-\lambda)x+\beta'(\varepsilon'-\lambda)y+\gamma'(\varepsilon''-\lambda)z=y_0,\\ \alpha''(\varepsilon-\lambda)x+\beta''(\varepsilon'-\lambda)y+\gamma''(\varepsilon''-\lambda)z=z_0,\end{cases}$$

dont les premiers membres sont les moitiés des dérivées du polynome $(\varepsilon-\lambda)x^2+(\varepsilon'-\lambda)y^2+(\varepsilon''-\lambda)z^2$ prises par rapport aux indéterminées indépendantes X, Y, Z. Et, comme nous avons remarqué que l'invariant de ce polynome est $(\varepsilon-\lambda)(\varepsilon'-\lambda)(\varepsilon''-\lambda)$, en nommant φ le résultat de la substitution précédente, le polynome adjoint sera, d'après la définition même, égal à

$$\varphi\times(\varepsilon-\lambda)(\varepsilon'-\lambda)(\varepsilon''-\lambda).$$

Or, en représentant pour un instant par u, v, w les quantités $(\varepsilon-\lambda)x$, $(\varepsilon'-\lambda)y$, $(\varepsilon''-\lambda)z$, les équations (9) coïncideront avec les équations (8), ainsi, d'après la résolution qui a été effectuée de ces dernières, nous trouverons

$$\begin{aligned} u&=(\varepsilon-\lambda)x=\alpha x_0+\alpha' y_0+\alpha'' z_0,\\ v&=(\varepsilon'-\lambda)y=\beta x_0+\beta' y_0+\beta'' z_0,\\ w&=(\varepsilon''-\lambda)z=\gamma x_0+\gamma' y_0+\gamma'' z_0.\end{aligned}$$

Il en résulte pour la transformée en x_0, y_0, z_0 du polynome

$$(\varepsilon-\lambda)x^2+(\varepsilon'-\lambda)y^2+(\varepsilon''-\lambda)z^2,$$

l'expression

$$\begin{aligned}\varphi=\;&\frac{1}{\varepsilon-\lambda}(\alpha x_0+\alpha' y_0+\alpha'' z_0)^2\\ &+\frac{1}{\varepsilon'-\lambda}(\beta x_0+\beta' y_0+\beta'' z_0)^2+\frac{1}{\varepsilon''-\lambda}(\gamma x_0+\gamma' y_0+\gamma'' z_0)^2,\end{aligned}$$

et l'on voit qu'en mettant X, Y, Z au lieu de x_0, y_0, z_0, on pourra

écrire simplement

$$\varphi=\frac{x^2}{\varepsilon-\lambda}+\frac{y^2}{\varepsilon'-\lambda}+\frac{z^2}{\varepsilon''-\lambda},$$

d'où suit, pour le polynome adjoint du second membre de l'équation (6), l'expression

$$\begin{aligned}\varphi\times(\varepsilon-\lambda)(\varepsilon'-\lambda)(\varepsilon''-\lambda)=\;&(\varepsilon'-\lambda)(\varepsilon''-\lambda)x^2\\ &+(\varepsilon''-\lambda)(\varepsilon-\lambda)y^2+(\varepsilon-\lambda)(\varepsilon'-\lambda)z^2.\end{aligned}$$

Cela posé, faisons successivement

$$\begin{aligned}\lambda&=\varepsilon,\\ \lambda&=\varepsilon',\\ \lambda&=\varepsilon'',\end{aligned}$$

dans le polynome adjoint du premier membre de l'équation (6), savoir $f-\lambda(X^2+Y^2+Z^2)$, on trouvera qu'il se réduit :

Dans le premier cas à $(\varepsilon'-\varepsilon)(\varepsilon''-\varepsilon)x^2$,
Dans le deuxième cas à $(\varepsilon''-\varepsilon')(\varepsilon-\varepsilon')y^2$,
Dans le troisième cas à $(\varepsilon-\varepsilon'')(\varepsilon'-\varepsilon'')z^2$,

de sorte que les carrés des trois fonctions linéaires qui nous restaient à déterminer étant connus par les seules quantités ε, ε', ε'', ces fonctions elles-mêmes et les coefficients de la substitution (5) sont complètement déterminés.

L'analyse que nous venons d'employer s'étend d'elle-même au cas d'un polynome à un nombre quelconque d'indéterminées, et nous pensons n'avoir besoin de rien ajouter pour que les élèves puissent faire eux-mêmes cette généralisation. Mais il nous reste à démontrer que toutes les quantités dont nous avons donné la détermination ont des valeurs toujours réelles.

Rien n'est plus facile pour le cas des polynomes à deux indéterminées

$$f=AX^2+2BXY+CY^2.$$

En effet, nous avons trouvé sous la forme suivante l'équation en λ, savoir

$$(A-\lambda)(C-\lambda)-B^2=0;$$

et en supposant, pour fixer les idées, $A>C$, on voit immédiatement qu'en substituant dans le premier membre les valeurs

$$+\infty,\quad A,\quad C,\quad -\infty,$$

il prendra les signes

$$+,\quad -,\quad -,\quad +.$$

L'équation proposée a donc deux racines réelles : l'une plus grande que A, l'autre plus petite que C, et nous pourrons supposer que la première soit ε et la seconde ε'. Cela posé, les valeurs obtenues pour les carrés x^2 et y^2 donnent, en y faisant, par exemple, $Y = 0$, les équations suivantes

$$\alpha^2 = \frac{A-\varepsilon'}{\varepsilon-\varepsilon'}, \qquad \beta^2 = \frac{\varepsilon - A}{\varepsilon-\varepsilon'},$$

et, d'après ce que nous venons de dire, on reconnaît qu'elles sont positives; donc α et β sont réels, et il en serait de même pour α' et β'.

Abordons maintenant la même question dans le cas plus difficile des polynomes à trois variables.

Afin d'indiquer complètement tout ce qu'il est nécessaire de connaître pour étendre au cas général la méthode que nous allons suivre, nous démontrerons d'abord ce lemme, qui est important en lui-même :

Lorsque l'invariant d'un polynome homogène du second degré se réduit à zéro, le polynome adjoint est un carré parfait.

Considérons, par exemple, les polynomes à trois variables

$$f = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY,$$

et prenons, mais sans supposer les coefficients réels, la substitution que nous avons précédemment déterminée :

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z,\\ y &= \beta X + \beta' Y + \beta'' Z,\\ z &= \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z, \end{aligned}$$

de telle sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} f &= \varepsilon x^2 + \varepsilon' y^2 + \varepsilon'' z^2,\\ X^2 + Y^2 + Z^2 &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Nous avons trouvé, quelle que soit l'indéterminée λ, le polynome adjoint de

$$f - \lambda(X^2 + Y^2 + Z^2)$$

égal à

$$(\varepsilon'-\lambda)(\varepsilon''-\lambda)x^2 + (\varepsilon''-\lambda)(\varepsilon-\lambda)y^2 + (\varepsilon-\lambda)(\varepsilon'-\lambda)z^2;$$

donc, supposant $\lambda = 0$ et désignant par F le polynome adjoint de f, on voit que la substitution ci-dessus donnera en même temps

$$\begin{aligned} f &= \varepsilon x^2 + \varepsilon' y^2 + \varepsilon'' z^2,\\ F &= \varepsilon'\varepsilon'' x^2 + \varepsilon''\varepsilon y^2 + \varepsilon\varepsilon' z^2. \end{aligned}$$

Cela posé, si l'invariant de f est nul, l'équation qui a pour racines ε, ε', ε'', savoir

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B'' & B' \\ B'' & A'-\lambda & B \\ B' & B & A''-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

sera vérifiée pour $\lambda = 0$, de sorte que l'une de ses racines s'évanouira. Or on voit qu'alors des trois carrés dont se compose F un seul subsistera, ce qui démontre la proposition annoncée.

Observons que dans le cas du polynome à deux variables

$$f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

cette proposition serait évidente, car le polynome adjoint étant alors $Ay^2 - 2Bxy + Cx^2$ est un carré parfait en même temps que f, lorsque l'invariant $AC - B^2$ est nul. Ce seul cas nous suffira même pour ce qui va suivre, comme on va voir.

Mettons l'équation en λ, en employant la valeur développée du déterminant sous cette forme

$$(10)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(A''-\lambda)[(A-\lambda)(A'-\lambda) - B''^2]\\ &\quad -[(A-\lambda)B^2 - 2B''BB' + (A'-\lambda)B'^2] = 0, \end{aligned} \right.$$

et considérons l'équation du second degré

$$(11)\qquad (A-\lambda)(A'-\lambda) - B''^2 = 0.$$

On a établi tout à l'heure la réalité de ses racines, et l'on a démontré qu'en supposant, par exemple, $A > A'$ l'une d'elles η était plus grande que A, et l'autre η' plus petite que A'. Cela posé, substituons dans le premier membre de l'équation les valeurs

$$\lambda = +\infty, \qquad \eta, \qquad \eta', \qquad -\infty,$$

les signes correspondants aux valeurs extrêmes seront $-\infty$ et $+\infty$, et nous allons prouver que pour $\lambda = \eta$ il est positif, et pour $\lambda = \eta'$, négatif. Dans ces deux cas, en effet, la première partie de l'équation (10) s'évanouit, et la seconde, en y considérant, pour un instant, B et B' comme deux indéterminées, représente un polynome à deux variables, dont l'invariant égal à $(A-\lambda)(A'-\lambda)-B''^2$ s'évanouit par hypothèse. Quels que soient donc B et B', ce polynome sera du signe de son premier terme; mais nous savons que l'on a

$$A-\eta < 0, \qquad A-\eta' > 0;$$

les résultats des substitutions ont donc les signes que nous avons annoncés. Il s'ensuit que l'équation en λ a ses trois racines réelles; la plus grande, ε, supérieure à η; la moyenne, ε', comprise entre η et η'; la plus petite, ε'', moindre que η'. Et en même temps on obtient cette conséquence que les racines de l'équation (11) étant comprises, l'une entre ε et ε', l'autre entre ε et ε'', le polynome

$$(A-\lambda)(A'-\lambda)-B''^2$$

possède exactement la propriété caractéristique de la fonction dérivée du premier membre de l'équation (9). On remarquera aussi qu'il suit du mode de détermination précédemment obtenu pour les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, qu'on a ces valeurs

$$\alpha''^2 = \frac{(A-\varepsilon)(A'-\varepsilon)-B''^2}{(\varepsilon'-\varepsilon)(\varepsilon''-\varepsilon)},$$

$$\beta''^2 = \frac{(A-\varepsilon')(A'-\varepsilon')-B''^2}{(\varepsilon-\varepsilon')(\varepsilon''-\varepsilon')},$$

$$\gamma''^2 = \frac{(A-\varepsilon'')(A'-\varepsilon'')-B''^2}{(\varepsilon-\varepsilon'')(\varepsilon'-\varepsilon'')}.$$

Or, d'après ce qu'on vient de dire, et en ayant égard à l'ordre de grandeur des quantités $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$, on reconnaît immédiatement que ces valeurs sont positives. Maintenant il suffit d'avoir prouvé que α'' est réel, par exemple, pour en conclure que α' et α le sont aussi. Comparant, en effet, les termes en YZ et ZX dans le développement de $(\alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z)^2$ et du polynome adjoint de

$f - \varepsilon(X^2+Y^2+Z^2)$, on trouvera pour $\alpha'\alpha''$ et $\alpha''\alpha$ des expressions réelles; donc, etc.; et l'on raisonnerait de même par rapport aux quantités β', β'' et γ', γ''.

Nous terminerons ce sujet en faisant remarquer que la méthode suivie pour établir la réalité des racines de l'équation du troisième degré en λ a déjà été donnée par M. Cauchy, mais sous une forme un peu différente, dans le troisième Volume des *Exercices mathématiques*. Nous ferons voir aussi, en peu de mots, qu'elle s'étend immédiatement aux équations générales relatives à des polynomes homogènes du second degré à un nombre quelconque de variables, équations qui s'offrent dans la détermination des inégalités séculaires des éléments du mouvement elliptique des planètes.

Considérons à cet effet l'équation en λ de degré $n+1$, dont le premier membre serait le déterminant

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \ldots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n}-\lambda & a_{n,n+1} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \ldots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1}-\lambda \end{vmatrix},$$

les quantités $a_{i,j}$ vérifiant pour toutes les valeurs des indices la condition $a_{i,j} = a_{j,i}$. Nous supposerons qu'on ait démontré la réalité des racines de l'équation analogue, mais de degré n, dont le premier membre serait le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix},$$

et nous nommerons ces racines, rangées par ordre croissant de grandeur,

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \ldots, \quad \eta_n.$$

Nous supposerons aussi qu'on ait démontré que le déterminant déduit du précédent, en supprimant la dernière colonne verticale et la dernière ligne horizontale, savoir

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n-1} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \ldots & a_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n-1}-\lambda \end{vmatrix},$$

possède la propriété caractéristique de la dérivée première de Δ_n, prise par rapport à λ, c'est-à-dire que, si l'on y fait les substitutions

$$\lambda = \eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \ldots, \quad \eta_n,$$

les signes des résultats seront respectivement

$$+, \quad -, \quad +\ldots, \quad -(-1)^n,$$

et ne présenteront que des variations. Cela posé, nous décomposerons Δ_{n+1} en deux parties comme il suit :

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \ldots & a_{2,n} & 0 \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n+1,n+1}-\lambda \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & .. & a_{1,n} & a_{n,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \ldots & a_{2,n} & a_{2,i+1} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n}-\lambda & a_{n,n+1} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \ldots & a_{n+1,n} & 0 \end{vmatrix}.$$

La première sera évidemment le produit de $a_{n+1,n+1}-\lambda$ par le déterminant Δ_n, et la seconde, en y considérant pour un instant $a_{1,n+1}, a_{2,n+1}, \ldots, a_{n,n+1}$ comme n indéterminées, sera au signe près le polynome adjoint du polynome suivant :

$$\begin{aligned} & X_1[(a_{1,1}-\lambda)X_1 + a_{1,2}X_2 + \ldots + a_{1,n}X_n] \\ + & X_2[a_{2,1}X_1 + (a_{2,2}-\lambda)X_2 + \ldots + a_{2,n}X_n] \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + & X_n[a_{n,1}X_1 + a_{n,2}X_2 + \ldots + (a_{n,n}-\lambda)X_n], \end{aligned}$$

dont l'invariant est précisément Δ_n. Or, en substituant au lieu de λ, dans Δ_{n+1}, la série des racines η_i de l'équation $\Delta_n = 0$, cet invariant s'évanouira, et alors le polynome adjoint, se réduisant à un carré parfait, sera toujours du même signe, quelles que soient les valeurs des quantités $a_{1,n+1}, a_{2,n+1}, \ldots, a_{n,n+1}$. Maintenant il est aisé de voir que le coefficient de $a_{n,n+1}^2$ sera le déterminant Δ_{n-1}, affecté du signe $-$. Donc pour les valeurs

$$\lambda = \eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \ldots, \quad \eta_n$$

les signes correspondants de Δ_{n+1} seront ceux de $-\Delta_{n-1}$, c'est-à-dire, d'après ce qu'on admet,

$$-, \quad +, \quad -, \quad \ldots, \quad (-1)^n.$$

Joignons enfin à ces substitutions les suivantes : $\lambda = -\infty$ et $\lambda = +\infty$; en observant que le premier terme de Δ_{n+1} est $(-\lambda)^{n+1}$, on trouvera finalement que les signes de cette fonction pour

$$\lambda = -\infty, \quad \eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \ldots, \quad \eta_n, \quad +\infty$$

seront

$$+, \quad -, \quad +, \quad -, \quad \ldots, \quad (-1)^n, \quad (-1)^{n+1}.$$

De là résulte que, sous les hypothèses admises, l'équation $\Delta_{n+1} = 0$ a toutes ses racines réelles. Et de plus on voit par les limites entre lesquelles sont comprises ces racines que Δ_n jouirait, par rapport à cette équation, de la même propriété que la fonction dérivée du premier membre. Dès lors, les propriétés que nous voulions établir dans toute leur généralité découlent immédiatement de ce qu'elles ont été démontrées dans le cas particulier que nous avons eu en vue pour la recherche des axes principaux des surfaces du second ordre.

IV. — Théorème général sur la réduction des polynomes homogènes du second degré par des substitutions à coefficients réels, à des sommes de carrés.

Ce théorème s'énonce ainsi :

De quelque manière qu'on transforme un polynome du second degré à coefficients réels en une somme de carrés de fonctions linéaires réelles, ces carrés étant affectés de coefficients numériques également réels, le nombre de ces coefficients qui auront un signe donné sera toujours le même.

Ainsi, par exemple, étant proposé le polynome

$$(1) \qquad -x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + \ldots + x_n^2,$$

on ne pourra par aucune substitution réelle de la forme

$$(2)\qquad \begin{cases} x_0 = \alpha_0 X_0 + \beta_0 X_1 + \ldots + \varkappa_0 X_n, \\ x_1 = \alpha_1 X_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \varkappa_1 X_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \alpha_n X_0 + \beta_n X_1 + \ldots + \varkappa_n X_n, \end{cases}$$

le transformer en un autre polynome tel que

$$(3)\qquad -X_0^2 - X_1^2 - \ldots - X_k^2 + X_{k+1}^2 + X_{k+2}^2 + \ldots + X_n^2,$$

k étant différent de i. C'est ce cas particulier auquel se ramène immédiatement le théorème général que nous allons établir.

Et d'abord on peut supposer $k > i$, car, s'il en était autrement, on résoudrait les équations (2) par rapport aux indéterminées X, et l'on raisonnerait sur cette nouvelle substitution à coefficients réels comme ceux de la proposée. Cette résolution d'ailleurs n'est jamais impossible, car, en nommant pour un instant δ le déterminant relatif aux équations (2), on sait que l'invariant du polynome (1), à savoir $(-1)^{i+1}$, sera le produit de l'invariant du polynome (2) dont la valeur est $(-1)^{k+1}$, multiplié par le carré de δ; et cette relation montre que δ n'est jamais nul.

Cela posé, parmi les diverses équations auxquelles les coefficients de la substitution (2) doivent satisfaire, on voit s'offrir en premier lieu celle-ci :

$$-\alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \ldots - \alpha_i^2 + \alpha_{i+1}^2 + \alpha_{i+2}^2 + \ldots + \alpha_n^2 = -1,$$

qui ne pourrait évidemment être vérifiée que par des valeurs imaginaires des quantités α, si l'on avait

$$\alpha_0 = 0, \qquad \alpha_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \alpha_i = 0.$$

Or on va voir comment, en admettant la substitution (2), il est possible d'en déduire une nouvelle, qui, changeant le polynome (1) en le polynome (3), ait ses coefficients réels, et de plus présente ce caractère que l'indéterminée X_0 ait disparu dans les expressions de $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$. Comme on suppose $k > i$, $k-1$ sera au moins égal à i, et, les conditions précédemment énoncées se trouvant réalisées, notre théorème se trouve par là même démontré.

A cet effet, nous commencerons par remarquer qu'on peut,

sans changer le polynome (3), y remplacer X_0 et X_1 par $X_0 \cos\varphi + X_1 \sin\varphi$, $X_0 \sin\varphi - X_1 \cos\varphi$, et introduire par là un angle arbitraire φ dans les formules (2), qui deviendront

$$\begin{aligned} x_0 &= (\alpha_0 \cos\varphi + \beta_0 \sin\varphi) X_0 + (\alpha_0 \sin\varphi - \beta_0 \cos\varphi) X_1 + \ldots, \\ x_1 &= (\alpha_1 \cos\varphi + \beta_1 \sin\varphi) X_0 + (\alpha_1 \sin\varphi - \beta_1 \cos\varphi) X_1 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Maintenant, et quels que soient les coefficients $\alpha, \beta, \ldots$, on pourra disposer de cet angle de manière à avoir

$$\alpha_0 \cos\varphi + \beta_0 \sin\varphi = 0,$$

et l'on sera amené à une nouvelle substitution également réelle où l'indéterminée X_0 aura déjà disparu dans la valeur de x_0. Cela fait, partons de cette nouvelle substitution pour y introduire de nouveau un angle arbitraire, en remplaçant X_1 et X_2 par $X_1 \cos\varphi + X_2 \sin\varphi$, $X_1 \sin\varphi - X_2 \cos\varphi$, ce qui se fera encore sans changer le polynome (3). On voit, en raisonnant comme tout à l'heure, qu'on pourra annuler le coefficient de X_1, dans l'expression de x_0. Or des calculs analogues pourront être continués jusqu'à ce qu'on soit amené à remplacer X_{k-1} et X_k par $X_{k-1} \cos\varphi + X_k \sin\varphi$, $X_{k-1} \sin\varphi - X_k \cos\varphi$, et en dernière analyse on voit que de la substitution (2) on aura déduit par des opérations toujours possibles une substitution réelle dans laquelle $X_0, X_1, \ldots, X_{k-1}$ auront disparu de l'expression de l'indéterminée x_0. Ce premier point établi, nous concevons qu'on répète, en raisonnant sur la valeur de l'indéterminée suivante x_1, des opérations toutes semblables, mais en se bornant à faire disparaître de proche en proche, dans l'expression de cette indéterminée, les coefficients de X_0, $X_1, \ldots, X_{k-2}$. On n'aura ainsi besoin d'introduire dans les substitutions successives que les indéterminées $X_0, X_1, \ldots, X_{k-1}$, de sorte que, ces calculs faits, on ne verra reparaître dans la valeur de x_0 aucune des indéterminées qui en ont déjà été éliminées. Cela posé, il est clair qu'en raisonnant d'une manière analogue successivement sur $x_2, x_3, \ldots$, on sera en dernier lieu conduit à faire disparaître la seule indéterminée X_0 de la valeur x_{k-1}. Elle ne se trouvera point d'ailleurs, dans les indéterminées précédentes x_{k-2}, $x_{k-3}, \ldots, x_0$, et de la sorte on sera parvenu à une dernière substitution, conséquence de la substitution (2), changeant encore le polynome (1) en le polynome (3) et qui tombe dans le cas indiqué plus haut, où il est manifestement impossible que les coefficients soient des quantités réelles.

Passons maintenant au théorème que nous voulions établir.

Supposons qu'un polynome homogène quelconque du second degré à $n+1$ indéterminées, $f(u_0, u_1, \ldots, u_n)$, soit transformé d'une première manière en une somme de carrés affectés de coefficients numériques, par la substitution réelle

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_0 = a_0 x_0 + b_0 x_1 + \ldots + k_0 x_n, \\ u_1 = a_1 x_0 + b_1 x_1 + \ldots + k_1 x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_n = a_n x_0 + b_n x_1 + \ldots + k_n x_n, \end{array}\right.$$

de sorte qu'on ait

$$f(u_0, u_1, \ldots, u_n) = \varepsilon_0 x_0^2 + \varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_n x_n^2.$$

Si l'on donne une seconde substitution également réelle

$$\begin{array}{l} u_0 = A_0 X_0 + B_0 X_1 + \ldots + K_0 X_n, \\ u_1 = A_1 X_0 + B_1 X_1 + \ldots + K_1 X_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_n = A_n X_0 + B_n X_1 + \ldots + K_n X_n, \end{array}$$

de laquelle résulte la transformation analogue

$$f(u_0, u_1, \ldots, u_n) = \eta_0 X_0^2 + \eta_1 X_1^2 + \ldots + \eta_n X_n^2,$$

il s'agit de prouver que le nombre des quantités ε, qui auront un signe donné, sera égal au nombre de quantités η, qui auront aussi le même signe.

A cet effet, et pour fixer les idées, supposons négatives les quantités $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i$, et positives les suivantes $\varepsilon_{i+1}, \varepsilon_{i+2}, \ldots, \varepsilon_n$. Supposons aussi que $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_k$ soient négatifs, tandis que $\eta_{k+1}, \eta_{k+2}, \ldots, \eta_n$ seront positifs. On aura d'abord, en égalant entre elles les deux expressions du polynome proposé $f(u_0, u_1, \ldots, u_n)$,

$$\varepsilon_0 x_0^2 + \varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_n x_n^2 = \eta_0 X_0^2 + \eta_1 X_1^2 + \ldots + \eta_n X_n^2,$$

les variables étant liées par ces relations,

$$\begin{array}{l} a_0 x_0 + b_0 x_1 + \ldots + k_0 x_n = A_0 X_0 + B_0 X_1 + \ldots + K_0 X_n, \\ a_1 x_0 + b_1 x_1 + \ldots + k_1 x_n = A_1 X_0 + B_1 X_1 + \ldots + K_1 X_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_n x_0 + b_n x_1 + \ldots + k_n x_n = A_n X_0 + B_n X_1 + \ldots + K_n X_n. \end{array}$$

Maintenant remplaçons $x_0, x_1, \ldots, x_i$ d'une part, $x_{i+1}, x_{i+2} \ldots, x_n$ de l'autre, par $\frac{x_0}{\sqrt{-\varepsilon_0}}, \frac{x_1}{\sqrt{-\varepsilon_1}}, \ldots, \frac{x_i}{\sqrt{-\varepsilon_i}}$ et $\frac{x_{i+1}}{\sqrt{\varepsilon_{i+1}}}, \frac{x_{i+2}}{\sqrt{\varepsilon_{i+2}}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon_n}}$. Remplaçons de même $X_0, X_1, \ldots, X_k$ par $\frac{X_0}{\sqrt{-\eta_0}}, \frac{X_1}{\sqrt{-\eta_1}}, \ldots, \frac{X_k}{\sqrt{-\eta_k}}$ et $X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_n$ par $\frac{X_{k+1}}{\sqrt{\eta_{k+1}}}, \frac{X_{k+2}}{\sqrt{\eta_{k+2}}}, \ldots, \frac{X_n}{\sqrt{\eta_n}}$, on se trouvera amené à la relation

$$\begin{array}{l} -x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + \ldots + x_n^2 \\ = -X_0^2 - X_1^2 - \ldots - X_k^2 + X_{k+1}^2 + X_{k+2}^2 + \ldots + X_n^2, \end{array}$$

les variables x dépendant des variables X, par les relations à coefficients réels

$$\begin{array}{l} \frac{a_0}{\sqrt{-\varepsilon_0}} x_0 + \frac{b_0}{\sqrt{-\varepsilon_1}} x_1 + \ldots + \frac{k_0}{\sqrt{\varepsilon_n}} x_n \\ = \frac{A_0}{\sqrt{-\eta_0}} X_0 + \frac{B_0}{\sqrt{-\eta_1}} X_1 + \ldots + \frac{K_0}{\sqrt{\eta_n}} X_n, \\ \frac{a_1}{\sqrt{-\varepsilon_0}} x_0 + \frac{b_1}{\sqrt{-\varepsilon_1}} x_1 + \ldots + \frac{k_1}{\sqrt{\varepsilon_n}} x_n \\ = \frac{A_1}{\sqrt{-\eta_0}} X_0 + \frac{B_1}{\sqrt{-\eta_1}} X_1 + \ldots + \frac{K_1}{\sqrt{\eta_n}} X_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \frac{a_n}{\sqrt{-\varepsilon_0}} x_0 + \frac{b_n}{\sqrt{-\varepsilon_1}} x_1 + \ldots + \frac{k_n}{\sqrt{\varepsilon_n}} x_n \\ = \frac{A_n}{\sqrt{-\eta_0}} X_0 + \frac{B_n}{\sqrt{-\eta_1}} X_1 + \ldots + \frac{K_n}{\sqrt{\eta_n}} X_n. \end{array}$$

Or, en résolvant ces équations par rapport aux indéterminées x, on sera conduit à une substitution réelle, telle que

$$\begin{array}{l} x_0 = \alpha_0 X_0 + \beta_0 X_1 + \ldots + \varkappa_0 X_n, \\ x_1 = \alpha_1 X_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \varkappa_1 X_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \alpha_n X_0 + \beta_n X_1 + \ldots + \varkappa_n X_n, \end{array}$$

et l'impossibilité d'une telle substitution a été démontrée précédemment. Ajoutons encore que la résolution d'équations dont il vient d'être question n'est sujette à aucun cas d'impossibilité ni d'indétermination, si l'invariant du polynome proposé

$$f(u_0, u_1, \ldots, u_n)$$