on établit par l'égalité des formes canoniques celle des expressions proposées elles-mêmes. Après avoir démontré la relation

$$U_\infty = \alpha^6 F[h^3 H^2 + (h^3 + fgh) FH + (h^2 + fg)^2 l],$$

nous en déduirons comme il suit toutes les autres.

Soit pour un instant

$$U_\infty = \Phi(F, H, h, h^2 + fg, l),$$

nous obtiendrons d'abord U_0, en effectuant sur les racines la substitution $\begin{Bmatrix} \xi_\nu \\ \xi_{3\nu^3} \end{Bmatrix}$ qui laisse l invariable et donnera

$$U_0 = \Phi(F, -H, h, h^2 + fg, l).$$

Maintenant, ajoutons aux indices les nombres 1, 2, 3, 4, il viendra, en désignant par l_1, l_2, l_3, l_4 les valeurs correspondantes de l,

$$\begin{aligned}
U_1 &= \Phi(F_1, -H_1, h_1, h_1^2 + f_1 g_1, l_1),\\
U_2 &= \Phi(F_2, -H_2, h_2, h_2^2 + f_2 g_2, l_2),\\
U_3 &= \Phi(F_3, -H_3, h_3, h_3^2 + f_3 g_3, l_3),\\
U_4 &= \Phi(F_4, -H_4, h_4, h_4^2 + f_4 g_4, l_4).
\end{aligned}$$

Effectuons ensuite dans chacune de ces égalités la substitution $\begin{Bmatrix} \xi_\nu \\ \xi_{3\nu^3} \end{Bmatrix}$, on tirera les suivantes :

$$\begin{aligned}
-U_1 &= \Phi(G_3, F_3, f_3, f_3^2 + g_3 h_3, l_3),\\
U_3 &= \Phi(-H_4, -G_4, g_4, g_4^2 + h_4 f_4, l_4),\\
U_2 &= \Phi(-H_1, G_1, g_1, g_1^2 + h_1 f_1, l_1),\\
-U_4 &= \Phi(-G_2, F_2, f_2, f_2^2 + g_2 h_2, l_2).
\end{aligned}$$

Enfin, dans chacune d'elles ajoutons aux indices des racines le nombre nécessaire pour ramener dans la fonction Φ les quantités F, G, H, et l'on obtiendra de cette manière

$$\begin{aligned}
-U_3 &= \Phi(G, F, f, f^2 + gh, l),\\
U_4 &= \Phi(-H, -G, g, g^2 + hf, l),\\
U_1 &= \Phi(-H, G, g, g^2 + hf, l),\\
-U_2 &= \Phi(-G, F, f, f^2 + gh, l);
\end{aligned}$$

d'où l'on conclut, comme l'on voit, les résultats qui concernent les quantités U. A l'égard des quantités V, il suffira d'effectuer dans

les égalités qui précèdent la substitution $\begin{Bmatrix} \xi_\nu \\ \xi_{2\nu} \end{Bmatrix}$, car U_∞, U_0, U_1, U_2, U_3, U_4 deviennent par là $-V_\infty$, V_0, V_2, V_4, V_1, V_3, de sorte que l'on aura

$$\begin{aligned}
-V_\infty &= \Phi(-H, F, -f, f^2 + gh, l),\\
V_0 &= \Phi(-H, -F, -f, f^2 + gh, l),\\
-V_1 &= \Phi(-G, -H, -h, h^2 + fg, l),\\
V_3 &= \Phi(-F, G, -g, g^2 + hf, l),\\
V_2 &= \Phi(-F, -G, -g, g^2 + hf, l),\\
-V_4 &= \Phi(G, -H, -h, h^2 + fg, l),
\end{aligned}$$

et toutes les relations données plus haut se trouvent ainsi démontrées.

XVII.

La considération des quantités U et V ne suffit pas seule à l'objet que nous avons en vue, et aux résultats précédents il est nécessaire de joindre ceux que nous allons tirer des fonctions cycliques du second ordre envisagées par M. Brioschi dans le beau et important travail déjà cité : *Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni di quinto grado*. Voici d'abord les valeurs de ces fonctions, ainsi que leurs formes canoniques en ε et η :

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{u}_\infty &= \alpha^2(\xi_0-\xi_1)(\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_3)(\xi_3-\xi_4)(\xi_4-\xi_0) = 25\mathfrak{a}^2\varepsilon(1-\varepsilon)(1-\eta),\\
\mathfrak{u}_0 &= \alpha^2(\xi_0-\xi_3)(\xi_3-\xi_4)(\xi_4-\xi_1)(\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_0) = 25\mathfrak{a}^2\varepsilon(\eta-\varepsilon),\\
\mathfrak{u}_1 &= \alpha^2(\xi_1-\xi_4)(\xi_4-\xi_0)(\xi_0-\xi_2)(\xi_2-\xi_3)(\xi_3-\xi_1) = 25\mathfrak{a}^2(\varepsilon-\eta)(1-\eta),\\
\mathfrak{u}_2 &= \alpha^2(\xi_2-\xi_0)(\xi_0-\xi_1)(\xi_1-\xi_3)(\xi_3-\xi_4)(\xi_4-\xi_2) = 25\mathfrak{a}^2\eta(1-\varepsilon),\\
\mathfrak{u}_3 &= \alpha^2(\xi_3-\xi_1)(\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_4)(\xi_4-\xi_0)(\xi_0-\xi_3) = 25\mathfrak{a}^2\varepsilon\eta(\eta-1),\\
\mathfrak{u}_4 &= \alpha^2(\xi_4-\xi_2)(\xi_2-\xi_3)(\xi_3-\xi_0)(\xi_0-\xi_1)(\xi_1-\xi_4) = 25\mathfrak{a}^2\eta(\varepsilon-\eta)(\varepsilon-1);
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{v}_\infty &= \alpha^2(\xi_0-\xi_2)(\xi_2-\xi_4)(\xi_4-\xi_1)(\xi_1-\xi_3)(\xi_3-\xi_0) = 25\mathfrak{a}^2\eta(\eta-\varepsilon),\\
\mathfrak{v}_0 &= \alpha^2(\xi_0-\xi_4)(\xi_4-\xi_2)(\xi_2-\xi_3)(\xi_3-\xi_1)(\xi_1-\xi_0) = 25\mathfrak{a}^2\eta(1-\varepsilon)(1-\eta),\\
\mathfrak{v}_1 &= \alpha^2(\xi_1-\xi_0)(\xi_0-\xi_3)(\xi_3-\xi_4)(\xi_4-\xi_2)(\xi_2-\xi_1) = 25\mathfrak{a}^2\varepsilon\eta(\varepsilon-1),\\
\mathfrak{v}_2 &= \alpha^2(\xi_2-\xi_1)(\xi_1-\xi_4)(\xi_4-\xi_0)(\xi_0-\xi_3)(\xi_3-\xi_2) = 25\mathfrak{a}^2\varepsilon(\varepsilon-\eta)(\eta-1),\\
\mathfrak{v}_3 &= \alpha^2(\xi_3-\xi_2)(\xi_2-\xi_0)(\xi_0-\xi_1)(\xi_1-\xi_4)(\xi_4-\xi_3) = 25\mathfrak{a}^2(\varepsilon-\eta)(1-\varepsilon),\\
\mathfrak{v}_4 &= \alpha^2(\xi_4-\xi_3)(\xi_3-\xi_1)(\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_0)(\xi_0-\xi_4) = 25\mathfrak{a}^2\varepsilon(1-\eta).
\end{aligned}\right.$$

Cela posé, et au moyen des formes canoniques, on vérifiera immédiatement les relations suivantes, dont on verra bientôt l'importance, savoir :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll} 2\mathfrak{u}_\infty = +\alpha^2 h(\mathrm{H}+\mathrm{F}), & 2\mathfrak{v}_\infty = +\alpha^2 f(\mathrm{H}-\mathrm{F}),\\ 2\mathfrak{u}_0 = -\alpha^2 h(\mathrm{H}-\mathrm{F}), & 2\mathfrak{v}_0 = -\alpha^2 f(\mathrm{H}+\mathrm{F}),\\ 2\mathfrak{u}_1 = +\alpha^2 g(\mathrm{G}-\mathrm{H}), & 2\mathfrak{v}_1 = +\alpha^2 h(\mathrm{G}+\mathrm{H}),\\ 2\mathfrak{u}_4 = -\alpha^2 g(\mathrm{G}+\mathrm{H}), & 2\mathfrak{v}_4 = -\alpha^2 h(\mathrm{G}-\mathrm{H}),\\ 2\mathfrak{u}_2 = -\alpha^2 f(\mathrm{F}-\mathrm{G}), & 2\mathfrak{v}_2 = -\alpha^2 g(\mathrm{F}+\mathrm{G}),\\ 2\mathfrak{u}_3 = -\alpha^2 f(\mathrm{F}+\mathrm{G}), & 2\mathfrak{v}_3 = -\alpha^2 g(\mathrm{F}-\mathrm{G}). \end{array}\right.$$

J'en déduirai d'abord l'expression des invariants du quatrième, du huitième et du douzième ordre, de la forme du cinquième degré, en fonction de F, G, H et f, g, h. On trouve aisément, en effet,

$$\mathfrak{u}_\infty^2+\mathfrak{u}_0^2+\mathfrak{u}_1^2+\mathfrak{u}_2^2+\mathfrak{u}_3^2+\mathfrak{u}_4^2 = -25(25\mathrm{A}+3\sqrt{5\mathrm{D}}),$$
$$\mathfrak{v}_\infty^2+\mathfrak{v}_0^2+\mathfrak{v}_1^2+\mathfrak{v}_2^2+\mathfrak{v}_3^2+\mathfrak{v}_4^2 = -25(25\mathrm{A}-3\sqrt{5\mathrm{D}}),$$

et, par conséquent,

$$\alpha^4[h^2(\mathrm{F}^2+\mathrm{H}^2)+g^2(\mathrm{H}^2+\mathrm{G}^2)+f^2(\mathrm{G}^2+\mathrm{F}^2)] = -50(25\mathrm{A}+3\sqrt{5\mathrm{D}}),$$
$$\alpha^4[f^2(\mathrm{F}^2+\mathrm{H}^2)+h^2(\mathrm{H}^2+\mathrm{G}^2)+g^2(\mathrm{G}^2+\mathrm{F}^2)] = -50(25\mathrm{A}-3\sqrt{5\mathrm{D}}),$$

d'où

$$\alpha^4[f^2(2\mathrm{F}^2+\mathrm{G}^2+\mathrm{H}^2)+g^2(2\mathrm{G}^2+\mathrm{H}^2+\mathrm{F}^2)+h^2(2\mathrm{H}^2+\mathrm{F}^2+\mathrm{G}^2)] = -2500\,\mathrm{A},$$
$$\alpha^4[f^2(\mathrm{H}^2-\mathrm{G}^2)+g^2(\mathrm{F}^2-\mathrm{H}^2)+h^2(\mathrm{G}^2-\mathrm{F}^2)] = 300\sqrt{5\mathrm{D}}.$$

Considérons ensuite la somme des produits trois à trois, que l'on peut écrire de cette manière :

$$\begin{aligned}(\mathfrak{u}_\infty^2+\mathfrak{u}_0^2)(\mathfrak{u}_1^2+\mathfrak{u}_4^2)(\mathfrak{u}_2^2+\mathfrak{u}_3^2) &+ \mathfrak{u}_\infty^2\mathfrak{u}_0^2(\mathfrak{u}_1^2+\mathfrak{u}_4^2+\mathfrak{u}_2^2+\mathfrak{u}_3^2)\\ &+ \mathfrak{u}_1^2\mathfrak{u}_4^2(\mathfrak{u}_\infty^2+\mathfrak{u}_0^2+\mathfrak{u}_2^2+\mathfrak{u}_3^2)\\ &+ \mathfrak{u}_2^2\mathfrak{u}_3^2(\mathfrak{u}_\infty^2+\mathfrak{u}_0^2+\mathfrak{u}_1^2+\mathfrak{u}_4^2).\end{aligned}$$

Elle est la même pour les deux groupes de quantités $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{v}$, et a pour valeur $4.5^9\left(\frac{80}{9}\mathrm{D}_1-\mathrm{AD}\right)$. C'est donc un des invariants du douzième ordre qui s'évanouissent comme D_1, lorsque la forme proposée admet deux couples de racines doubles; je l'introduirai

en le désignant par $\mathfrak{K}$, de sorte que l'on aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha^{12}}\mathfrak{K} = \frac{1}{8}f^2g^2h^2(\mathrm{G}^2+\mathrm{H}^2)(\mathrm{H}^2+\mathrm{F}^2)(\mathrm{F}^2+\mathrm{G}^2)\\ +\frac{1}{32}f^4(\mathrm{F}^2-\mathrm{H}^2)^2[g^2(\mathrm{F}^2+\mathrm{G}^2)+h^2(\mathrm{G}^2+\mathrm{H}^2)]\\ +\frac{1}{32}g^4(\mathrm{G}^2-\mathrm{F}^2)^2[h^2(\mathrm{G}^2+\mathrm{H}^2)+f^2(\mathrm{H}^2+\mathrm{F}^2)]\\ +\frac{1}{32}h^4(\mathrm{H}^2-\mathrm{G}^2)^2[f^2(\mathrm{H}^2+\mathrm{F}^2)+g^2(\mathrm{F}^2+\mathrm{G}^2)].\end{aligned}$$

Mais ces diverses expressions ne sont pas sous leur forme définitive; observant en effet que F, G, H n'y entrent que par leurs carrés, on pourra, au moyen des relations

$$\mathrm{G}^2-\mathrm{H}^2 = 4lf,$$
$$\mathrm{H}^2-\mathrm{F}^2 = 4lg,$$
$$\mathrm{F}^2-\mathrm{G}^2 = 4lh,$$

auxquelles je joindrai

$$f+g+h = 0,$$

les faire uniquement dépendre des quatre quantités F^2, g, h et l. On trouvera ainsi

$$\frac{5^4\mathrm{A}}{\alpha^4} = -2(g^2+gh+h^2)\mathrm{F}^2-(g-h)(2g^2+gh+2h^2)l,$$
$$\frac{5^2\sqrt{5\mathrm{D}}}{\alpha^4} = fghl = -(g+h)ghl,$$
$$\frac{5^5\mathrm{D}}{\alpha^8} = (g+h)^2g^2h^2l^2,$$
$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{K}}{\alpha^{12}} = (g+h)^2g^2h^2\mathrm{F}^6+4(g-h)(g+h)^2g^2h^2l\mathrm{F}^4\\ +(g^8+4g^7h+12g^6h^2+6g^5h^3-5g^4h^4+6g^3h^5+12g^2h^6+4gh^7+h^8)l^2\mathrm{F}^2\\ -2gh(g-h)(g^6+3g^5h+8g^4h^2+11g^3h^3+8g^2h^4+3gh^5+h^6)l^3,\end{aligned}$$

et la valeur de $\mathfrak{K}$ montre bien effectivement qu'il s'évanouit pour $l=0$ et $g=0$, c'est-à-dire lorsque deux couples de racines deviennent égales entre elles.

Les équations (1) peuvent aussi servir à démontrer immédiatement ces identités remarquables données par M. Brioschi, savoir :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2+\mathfrak{u}_3+\mathfrak{u}_4&=\mathfrak{u}_\infty+2\mathfrak{v}_\infty,\\
\mathfrak{u}_\infty-\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2+\mathfrak{u}_3-\mathfrak{u}_4&=\mathfrak{u}_0+2\mathfrak{v}_0,\\
\mathfrak{u}_\infty-\mathfrak{u}_0-\mathfrak{u}_2+\mathfrak{u}_3+\mathfrak{u}_4&=\mathfrak{u}_1+2\mathfrak{v}_1,\\
\mathfrak{u}_\infty+\mathfrak{u}_0-\mathfrak{u}_1-\mathfrak{u}_3+\mathfrak{u}_4&=\mathfrak{u}_2+2\mathfrak{v}_2,\\
\mathfrak{u}_\infty+\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u}_1-\mathfrak{u}_2-\mathfrak{u}_4&=\mathfrak{u}_3+2\mathfrak{v}_3,\\
\mathfrak{u}_\infty-\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2-\mathfrak{u}_3&=\mathfrak{u}_4+2\mathfrak{v}_4.
\end{aligned}$$

Mais nous les employons principalement à l'étude des nouvelles fonctions cycliques du sixième ordre formées en élevant $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{v}$ au cube, et que nous allons joindre à U et V.

XVIII.

Je montrerai en premier lieu que ces deux groupes de quantités U et $\mathfrak{u}^3$, de natures si différentes au premier abord, peuvent être compris dans la même forme algébrique. Pour cela, je remplace les carrés F^2 et H^2, dans l'équation

$$8\mathfrak{u}_\infty^3=\alpha^6 h^3(F^3+3F^2H+3FH^2+H^3),$$

par H^2-4lg et F^2+4lg, après avoir divisé par 4, il viendra ainsi :

$$2\mathfrak{u}_\infty^3=\alpha^6(h^3F^3+h^3H^3+3gh^3lF-3gh^3lH).$$

J'opère de même dans la relation

$$U_\infty=\alpha^6[h^3FH^2+(h^3+fgh)F^2H+(h^2+fg)^2lF],$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
U_\infty=\alpha^6[&h^3F^3+(h^2-fh-f^2)hH^3\\
&+(f^4+2f^3h-f^2h^2-6fh^3-3h^4)lF-4(f^3h+2f^2h^2-h^4)lH].
\end{aligned}$$

On voit donc que les deux fonctions cycliques du sixième ordre sont comprises dans cette forme

$$\varphi(f,h)F^3+\psi(f,h)H^3+\varphi_1(f,h)lF+\psi_1(f,h)lH,$$

φ et ψ étant deux polynomes homogènes du troisième degré, φ_1 et ψ_1 du quatrième, et il y aurait lieu sans doute d'en faire l'étude

en recherchant l'expression la plus générale de ces polynomes qui permette d'obtenir ainsi des fonctions cycliques. Mais, pour ne pas trop m'étendre, je me borne aux quantités U et $\mathfrak{u}^3$, et, observant que l'expression

$$fghl(\mu\mathfrak{u}_\infty+\nu\mathfrak{v}_\infty),$$

où $fghl$ est proportionnel à la racine carrée du déterminant, est aussi du sixième ordre, j'envisagerai seulement les expressions de cette forme

$$mU+n\mathfrak{u}^3+fghl(\mu\mathfrak{u}+\nu\mathfrak{v}),$$

où m, n, μ, ν sont des constantes. Cela étant, je me suis arrêté à la combinaison suivante :

$$U-2\mathfrak{u}^3-fghl(6\mathfrak{u}+4\mathfrak{v})=\mathfrak{V},$$

d'où l'on tire

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{V}_\infty&=\alpha^6[+fghH^3+(h-2f)g^2hlH+f^4lF],\\
\mathfrak{V}_0&=\alpha^6[-fghH^3-(h-2f)g^2hlH+f^4lF],
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{V}_1&=\alpha^6[+fghG^3+(g-2h)f^2glG-h^4lH],\\
\mathfrak{V}_4&=\alpha^6[-fghG^3-(g-2h)f^2glG-h^4lH],
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{V}_2&=\alpha^6[-fghF^3-(f-2g)h^2flF+g^4lG],\\
\mathfrak{V}_3&=\alpha^6[-fghF^3-(f-2g)h^2flF-g^4lG].
\end{aligned}\right.$$

En opérant ensuite dans $\mathfrak{V}$ la substitution $\left\{\begin{matrix}\xi_\nu\\ \xi_{2\nu}\end{matrix}\right\}$, j'en déduis ce second système, savoir :

$$\left\{\begin{aligned}
\mathcal{V}_\infty&=\alpha^6[-fghF^3+(f-2h)g^2flF-h^4lH],\\
\mathcal{V}_0&=\alpha^6[-fghF^3+(f-2h)g^2flF+h^4lH],
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\mathcal{V}_1&=\alpha^6[+fghH^3-(h-2g)f^2hlH-g^4lG],\\
\mathcal{V}_4&=\alpha^6[+fghH^3-(h-2g)f^2hlH+g^4lG],
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\mathcal{V}_2&=\alpha^6[-fghG^3+(g-2f)h^2glG+f^4lF],\\
\mathcal{V}_3&=\alpha^6[+fghG^3-(g-2f)h^2glG+f^4lF].
\end{aligned}\right.$$

Maintenant je prendrai pour la fonction u cette expression où figurent quatre constantes qui tout à l'heure se réduiront à deux seulement, savoir :

$$u=p\mathfrak{V}+p'\mathcal{V}+2\alpha^4fghl(q\mathfrak{u}+q'\mathfrak{v}).$$

C'est dans cette détermination que se trouve le point le plus difficile et le plus important de mon travail, et elle ne pourra être justifiée que par les résultats qui en sont les conséquences, et que je vais exposer.

XIX.

Je reviens maintenant, pour en effectuer la détermination, aux quantités précédemment désignées par R, S, T, et qui figurent dans la formule de transformation propre à la méthode de M. Kronecker, savoir :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} &= u_\infty + u_0 + \omega(u_2 + u_3),\\
\mathrm{S} &= u_1 + u_4 + \omega(u_\infty - u_0),\\
\mathrm{T} &= u_3 - u_2 + \omega(u_1 - u_4).
\end{aligned}$$

On se rappelle qu'on a posé $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; faisant d'après cela, pour abréger,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f} &= -2gh\mathrm{F}^2 - (f^2 + 2gh)(g-h)l + \sqrt{5}f^3 l,\\
\mathfrak{g} &= -2hf\mathrm{G}^2 - (g^2 + 2hf)(h-f)l + \sqrt{5}g^3 l,\\
\mathfrak{h} &= -2fg\mathrm{H}^2 - (h^2 + 2fg)(f-g)l + \sqrt{5}h^3 l,
\end{aligned}$$

on trouvera immédiatement

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathcal{U}_\infty + \mathcal{U}_0 + \omega(\mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3) &= +\,\omega\alpha^6 f\mathfrak{f}\mathrm{F},\\
\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_4 + \omega(\mathcal{U}_\infty - \mathcal{U}_0) &= -\,\omega\alpha^6 h\mathfrak{h}\mathrm{H},\\
\mathcal{U}_3 - \mathcal{U}_2 + \omega(\mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_4) &= -\,\omega\alpha^6 g\mathfrak{g}\mathrm{G},\\
\mathcal{V}_\infty + \mathcal{V}_0 + \omega(\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3) &= +\,\alpha^6 f\mathfrak{f}\mathrm{F},\\
\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_4 + \omega(\mathcal{V}_\infty - \mathcal{V}_0) &= -\,\alpha^6 h\mathfrak{h}\mathrm{H},\\
\mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_2 + \omega(\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_4) &= -\,\alpha^6 g\mathfrak{g}\mathrm{G}.
\end{aligned}\right.$$

Soit en second lieu

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}' &= (h - g - \sqrt{5}f)ghl,\\
\mathfrak{g}' &= (f - h - \sqrt{5}g)hfl,\\
\mathfrak{h}' &= (g - f - \sqrt{5}h)fgl,
\end{aligned}$$

et l'on aura de même

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
2fghl[\mathfrak{u}_\infty + \mathfrak{u}_0 + \omega(\mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u}_3)] &= +\,\alpha^6 f\mathfrak{f}'\mathrm{F},\\
2fghl[\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_4 + \omega(\mathfrak{u}_\infty - \mathfrak{u}_0)] &= -\,\alpha^6 h\mathfrak{h}'\mathrm{H},\\
2fghl[\mathfrak{u}_3 - \mathfrak{u}_2 + \omega(\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_4)] &= -\,\alpha^6 g\mathfrak{g}'\mathrm{G},\\
2fghl[\mathfrak{v}_\infty + \mathfrak{v}_0 + \omega(\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3)] &= +\,\omega\alpha^6 f\mathfrak{f}'\mathrm{F},\\
2fghl[\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_4 + \omega(\mathfrak{v}_\infty - \mathfrak{v}_0)] &= -\,\omega\alpha^6 h\mathfrak{h}'\mathrm{H},\\
2fghl[\mathfrak{v}_3 - \mathfrak{v}_2 + \omega(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_4)] &= -\,\omega\alpha^6 g\mathfrak{g}'\mathrm{G}.
\end{aligned}\right.$$

Or il résulte des équations (1) que p et p' n'entreront dans R, S, T que par la combinaison $\omega p + p'$, et des relations (2) que q et q' se réuniront dans l'expression analogue $q + \omega q'$; posant, en conséquence,

$$\omega p + p' = \mathfrak{p}, \qquad q + \omega q' = \mathfrak{q},$$

on trouvera simplement

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} &= \alpha^6 f\,\mathrm{F}(\mathfrak{p}\mathfrak{f} + \mathfrak{q}\mathfrak{f}'),\\
-\mathrm{T} &= \alpha^6 g\,\mathrm{G}(\mathfrak{p}\mathfrak{g} + \mathfrak{q}\mathfrak{g}'),\\
-\mathrm{S} &= \alpha^6 h\,\mathrm{H}(\mathfrak{p}\mathfrak{h} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}').
\end{aligned}$$

La formule de transformation $z = \mathrm{RST}$ peut donc être présentée comme le produit de ces deux facteurs, qui, l'un et l'autre, sont des invariants, savoir

$$\alpha^6 fgh\,\mathrm{FGH} \qquad \text{et} \qquad \alpha^{12}(\mathfrak{p}\mathfrak{f} + \mathfrak{q}\mathfrak{f}')(\mathfrak{p}\mathfrak{g} + \mathfrak{q}\mathfrak{g}')(\mathfrak{p}\mathfrak{h} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}').$$

Le premier, qu'on peut écrire ainsi

$$\alpha^6 fghl\,\frac{\mathrm{FGH}}{l} = 5^2\sqrt{5\mathrm{D}}\,\frac{\alpha^2\,\mathrm{FGH}}{l},$$

met immédiatement en évidence une fonction rationnelle de la racine ξ_0; mais il reste encore à donner explicitement au second cette même forme, et c'est ce que je vais faire, après avoir ajouté cette remarque, facile à vérifier, que la substitution $\begin{Bmatrix}\xi_\nu\\ \xi_{2\nu}\end{Bmatrix}$ n'a d'autre effet que d'y changer le signe du radical $\sqrt{5}$.

XX.

Comme élément essentiel de l'importante transformation qu'il s'agit d'opérer, j'introduirai l'expression suivante :

$$\lambda = \alpha^4 (f-g)(g-h)(h-f)l.$$

C'est un invariant, comme on le voit de suite, et de plus une fonction rationnelle de la racine ξ_0, car le facteur $\alpha^3(f-g)(g-h)(h-f)$ représente l'invariant cubique de la forme du quatrième degré obtenu en divisant la proposée par $\xi - \xi_0$. Désignant donc par λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 les cinq déterminations qui correspondent ainsi aux racines ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, on aura ces relations remarquables, savoir :

$$\begin{aligned}
\lambda_0 - \lambda_1 &= +2\alpha^4(\xi_0 - \xi_1) H_2 G_3 H_4, \\
\lambda_0 - \lambda_2 &= -2\alpha^4(\xi_0 - \xi_2) G_1 F_3 F_4, \\
\lambda_0 - \lambda_3 &= -2\alpha^4(\xi_0 - \xi_3) F_1 F_2 G_4, \\
\lambda_0 - \lambda_4 &= +2\alpha^4(\xi_0 - \xi_4) H_1 G_2 H_3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 - \lambda_3 &= -2\alpha^4(\xi_1 - \xi_3) F G_2 F_4, & \lambda_2 - \lambda_4 &= -2\alpha^4(\xi_2 - \xi_4) F F_1 G_3, \\
\lambda_1 - \lambda_4 &= -2\alpha^4(\xi_1 - \xi_4) G F_2 F_3, & \lambda_2 - \lambda_3 &= +2\alpha^4(\xi_2 - \xi_3) G H_1 H_4, \\
\lambda_3 - \lambda_4 &= +2\alpha^4(\xi_3 - \xi_4) H G_1 H_2, & \lambda_1 - \lambda_2 &= +2\alpha^4(\xi_1 - \xi_2) H H_3 G_4.
\end{aligned}$$

Pour les établir il suffit, par exemple, de démontrer celles-ci :

$$\begin{aligned}
\lambda_0 - \lambda_1 &= +2\alpha^4(\xi_0 - \xi_1) H_2 G_3 H_4, \\
\lambda_0 - \lambda_2 &= -2\alpha^4(\xi_0 - \xi_2) G_1 F_3 F_4,
\end{aligned}$$

les autres s'en déduisant par une simple permutation cyclique des racines ; or elles se vérifient au moyen des formes canoniques en ε et η des facteurs de l'invariant du dix-huitième ordre et des quantités λ elles-mêmes, dont voici le Tableau complet :

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= (5\mathfrak{a})^4 (1-\varepsilon)(1-\eta)(\varepsilon+\eta)(\varepsilon-2\eta)(2\varepsilon-\eta), \\
\lambda_1 &= (5\mathfrak{a})^4 \varepsilon(1-\varepsilon)(\varepsilon-\eta)(1+\eta)(1-2\eta)(\eta-2), \\
\lambda_2 &= (5\mathfrak{a})^4 \varepsilon\eta(\varepsilon+\eta-2)(\varepsilon-2\eta+1)(\eta-2\varepsilon+1), \\
\lambda_3 &= (5\mathfrak{a})^4 (\varepsilon+\eta-2\varepsilon\eta)(\varepsilon-2\eta+\varepsilon\eta)(\eta-2\varepsilon+\varepsilon\eta), \\
\lambda_4 &= (5\mathfrak{a})^4 \eta(1-\eta)(\eta-\varepsilon)(1+\varepsilon)(1-2\varepsilon)(\varepsilon-2).
\end{aligned}$$

Cela posé, et en se rappelant que l'on a désigné par K l'invariant du dix-huitième ordre, on tire des premières multipliées membre à membre

$$(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_0 - \lambda_3)(\lambda_0 - \lambda_4) = \frac{16\, l \mathrm{K}}{\alpha^2 \mathrm{FGH}},$$

ou bien

$$\Pi'(\lambda_0) = \frac{16\, l \mathrm{K}}{\alpha^2 \mathrm{FGH}},$$

en faisant, pour abréger,

$$\Pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4),$$

et, par suite,

$$\Pi'(\lambda_\nu) = \frac{16\, l_\nu \mathrm{K}}{\alpha^2 \mathrm{F}_\nu \mathrm{G}_\nu \mathrm{H}_\nu},$$

pour les diverses valeurs de l'indice. C'est ce qui va permettre d'établir la proposition suivante :

Tout invariant donné sous forme de fonction entière des racines, symétrique par rapport à ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 *et dont le degré en* ξ_0 *est multiple de* 4, *s'exprime par*

$$\mathrm{L}_0 + \lambda_0 \mathrm{L}_1 + \lambda_0^2 \mathrm{L}_2 + \lambda_0^3 \mathrm{L}_3 + \lambda_0^4 \mathrm{L}_4,$$

les coefficients L_1, L_2, ... *étant des fonctions entières des invariants fondamentaux* A, B, C.

Soient en effet, pour un instant, Θ_0, Θ_1, ... les cinq valeurs de cette fonction ; j'observe que le polynome du quatrième degré en λ

$$\Theta = \sum_0^4 {}_\nu \frac{\Theta_\nu}{\Pi'(\lambda_\nu)} \frac{\Pi(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu},$$

qui se réduit à Θ_0, Θ_1, ..., pour $\lambda = \lambda_0$, $\lambda = \lambda_1$, ..., peut, d'après la valeur de $\Pi'(\lambda_\nu)$, s'écrire ainsi :

$$\Theta = \frac{1}{16\mathrm{K}} \sum_0^4 {}_\nu \frac{\alpha^3 \mathrm{F}_\nu \mathrm{G}_\nu \mathrm{H}_\nu \Theta_\nu}{\alpha l_\nu} \frac{\Pi(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu}.$$

Or αl_ν étant la dérivée du premier membre de l'équation proposée pour $\xi = \xi_\nu$, on sait par un théorème élémentaire que $16\mathrm{K}\Theta$ s'exprimera en fonction entière des coefficients de cette équation. D'ailleurs les quantités Θ_ν et $\frac{\alpha^3 \mathrm{F}_\nu \mathrm{G}_\nu \mathrm{H}_\nu}{\alpha l_\nu}$ sont des invariants, donc il en est de même des coefficients des puissances de λ. Or, d'après la supposition faite sur le degré de Θ_ν, leur ordre sera $\equiv 0$, mod 4 ; ainsi ils seront tous le produit de K par une fonction entière de A, B, C, l'invariant du dix-huitième ordre disparaissant ainsi comme facteur commun, et l'on en conclut relativement à Θ la proposition annoncée.

Je vais l'appliquer à l'expression

$$\alpha^{12}(\mathfrak{p}\mathfrak{f}+\mathfrak{q}\mathfrak{f}')(\mathfrak{p}\mathfrak{g}+\mathfrak{q}\mathfrak{g}')(\mathfrak{p}\mathfrak{h}+\mathfrak{q}\mathfrak{h}'),$$

préalablement mise sous la forme

$$\Theta+\alpha^4 fghl\sqrt{5}\,\Theta',$$

où Θ et Θ' restent invariables quand on fait la substitution $\begin{Bmatrix} \xi_\nu \\ \xi_{2\nu} \end{Bmatrix}$; mais, avant de commencer le calcul, j'ajouterai quelques remarques sur le système des quantités λ.

XXI.

Je considère à cet effet la combinaison suivante :

$$(\mathfrak{v}_\infty\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_4-\mathfrak{v}_2\mathfrak{v}_3)-(\mathfrak{u}_\infty\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_4-\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3);$$

en employant les relations (1) du paragraphe XVII, on trouvera qu'elle devient

$$\frac{1}{4}[f^2(F^2-H^2)+g^2(G^2-F^2)+h^2(H^2-G^2)]$$

$$-\frac{1}{4}[f^2(G^2-F^2)+g^2(H^2-G^2)+h^2(F^2-H^2)],$$

ou encore

$$(-f^2g-g^2h-h^2f+f^2h+g^2f+h^2g)l=(f-g)(g-h)(h-f)l,$$

et, par suite, que sa valeur est λ_0. En partant de là et effectuant sur les racines ξ_0, ξ_1, ... une permutation cyclique, on en conclut cet ensemble de relations, savoir :

$$\begin{aligned}
\lambda_0&=(\mathfrak{v}_\infty\mathfrak{v}_0+\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_4-\mathfrak{v}_2\mathfrak{v}_3)-(\mathfrak{u}_\infty\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_4-\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3),\\
\lambda_1&=(\mathfrak{v}_\infty\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2\mathfrak{v}_0-\mathfrak{v}_3\mathfrak{v}_4)-(\mathfrak{u}_\infty\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_0-\mathfrak{u}_3\mathfrak{u}_4),\\
\lambda_2&=(\mathfrak{v}_\infty\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_3\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_4\mathfrak{v}_0)-(\mathfrak{u}_\infty\mathfrak{u}_2+\mathfrak{u}_3\mathfrak{u}_1-\mathfrak{u}_4\mathfrak{u}_0),\\
\lambda_3&=(\mathfrak{v}_\infty\mathfrak{v}_3+\mathfrak{v}_4\mathfrak{v}_2-\mathfrak{v}_0\mathfrak{v}_1)-(\mathfrak{u}_\infty\mathfrak{u}_3+\mathfrak{u}_4\mathfrak{u}_2-\mathfrak{u}_0\mathfrak{u}_1),\\
\lambda_4&=(\mathfrak{v}_\infty\mathfrak{v}_4+\mathfrak{v}_0\mathfrak{v}_3-\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2)-(\mathfrak{u}_\infty\mathfrak{u}_4+\mathfrak{u}_0\mathfrak{u}_3-\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2).
\end{aligned}$$

Or, en faisant usage de nouveau des relations (1), on voit que l'on pourra exprimer les seconds membres au moyen de F, G, H

et f, g, h. Ainsi, nous avons déjà

$$4\lambda_0=\alpha^4[f^2(2F^2-G^2-H^2)+g^2(2G^2-F^2-H^2)+h^2(2H^2-F^2-G^2)],$$

et, en faisant, pour abréger,

$$f'=f^2+gh,\qquad g'=g^2+hf,\qquad h'=h^2+fg,$$
$$\Phi(x,y,z)=-f^2x^2-g^2y^2-h^2z^2+2f'yz+2g'zx+2h'xy,$$

on parviendra à ces expressions fort simples :

$$\begin{aligned}
4\lambda_1&=\alpha^4\Phi(F,\ G,\ -H),\\
4\lambda_2&=\alpha^4\Phi(F,\ G,\ H),\\
4\lambda_3&=\alpha^4\Phi(F,\ -G,\ H),\\
4\lambda_4&=\alpha^4\Phi(-F,\ G,\ H).
\end{aligned}$$

On en tire ensuite les relations suivantes

$$\begin{aligned}
\lambda_2-\lambda_4&=\alpha^4F(g'H+h'G), &\qquad \lambda_3-\lambda_1&=\alpha^4F(g'H-h'G),\\
\lambda_2-\lambda_3&=\alpha^4G(h'F+f'H), &\qquad \lambda_1-\lambda_4&=\alpha^4G(h'F-f'H),\\
\lambda_2-\lambda_1&=\alpha^4H(f'G+g'F), &\qquad \lambda_4-\lambda_3&=\alpha^4H(f'G-g'F),
\end{aligned}$$

et par conséquent, en employant les expressions précédemment obtenues pour les différences des quantités λ,

$$\begin{aligned}
2(\xi_4-\xi_2)F_1G_3&=g'H+h'G, &\qquad 2(\xi_1-\xi_3)G_2F_4&=g'H-h'G,\\
2(\xi_2-\xi_3)H_1H_4&=h'F+f'H, &\qquad 2(\xi_4-\xi_1)F_2F_3&=h'F-f'H,\\
2(\xi_2-\xi_1)H_3G_4&=f'G+g'F, &\qquad 2(\xi_4-\xi_3)G_1H_2&=f'G-g'F.
\end{aligned}$$

Ces dernières équations multipliées entre elles conduisent à cette valeur de l'invariant du dix-huitième ordre, savoir :

$$-64fghK=\alpha^{18}FGH(g'^2H^2-h'^2G^2)(h'^2F^2-f'^2H^2)(f'^2G^2-g'^2F^2).$$

Nous parviendrons à l'égard de la même quantité à un autre résultat en considérant les différences $\lambda_0-\lambda_1$, $\lambda_0-\lambda_2$, ..., et employant l'équation

$$(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_0-\lambda_3)(\lambda_0-\lambda_4)=\frac{16lK}{\alpha^2FGH},$$

on trouve, en effet, après quelques réductions faciles, qu'en faisant pour un instant

$$\Phi_1(x,y,z)=f'(x^2-yz)+g'(y^2-zx)+h'(z^2-xy),$$

on a

$$
\begin{aligned}
2(\lambda_0-\lambda_1) &= \alpha^4\Phi_1(F,\ G,\ -H),\\
2(\lambda_0-\lambda_2) &= \alpha^4\Phi_1(F,\ G,\ \ \ H),\\
2(\lambda_0-\lambda_3) &= \alpha^4\Phi_1(F,\ -G,\ H),\\
2(\lambda_0-\lambda_4) &= \alpha^4\Phi_1(-F,\ G,\ H).
\end{aligned}
$$

On en conclut par conséquent, en multipliant membre à membre,

$$
\begin{aligned}
lK = \alpha^{18}FGH&[f'(F^2+GH)+g'(G^2+HF)+h'(H^2-FG)]\\
\times&[f'(F^2-GH)+g'(G^2-HF)+h'(H^2-FG)]\\
\times&[f'(F^2+GH)+g'(G^2-HF)+h'(H^2+FG)]\\
\times&[f'(F^2-GH)+g'(G^2+HF)+h'(H^2+FG)].
\end{aligned}
$$

Enfin, nous joindrons à ces expressions celle du carré de l'invariant du dix-huitième ordre, sous cette forme, savoir

$$
\begin{aligned}
K^2 = \alpha^{36}F^2G^2H^2&[fg(f-g)F^2-f'^2l][fh(f-h)F^2+f'^2l]\\
\times&[gh(g-h)G^2-g'^2l][fg(g-f)G^2+g'^2l]\\
\times&[hf(h-f)H^2-h'^2l][gh(h-g)H^2+h'^2l].
\end{aligned}
$$

Elle se tire de la relation $K^2 = U_\infty U_0,\ U_1U_4,\ U_2U_3$, en employant les égalités

$$
\begin{aligned}
U_\infty U_0 &= \alpha^{12}F^2[hf(h-f)H^2-h'^2l][gh(h-g)H^2+h'^2l],\\
U_2U_3 &= \alpha^{12}G^2[fg(f-g)F^2-f'^2l][fh(f-h)F^2+f'^2l],\\
U_1U_4 &= \alpha^{12}H^2[gh(g-h)G^2-g'^2l][fg(g-f)G^2+g'^2l],
\end{aligned}
$$

qu'il est aisé de vérifier. J'indique ces résultats, bien que je n'aie pas à en faire usage plus tard, pour montrer dans la théorie algébrique des formes du cinquième degré le rôle des deux groupes de quantités F, G, H et f, g, h, qui servent de base au calcul suivant.

XXII.

Un premier point à établir avant de mettre sous forme d'un polynome entier en λ_0 l'expression

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{f}+\mathfrak{q}\mathfrak{f}')(\mathfrak{p}\mathfrak{g}+\mathfrak{q}\mathfrak{g}')(\mathfrak{p}\mathfrak{h}+\mathfrak{q}\mathfrak{h}')$$

est de montrer que la partie multipliée par le radical $\sqrt{5}$, et qui seule, comme on l'a remarqué plus haut, change de signe par la

substitution $\begin{Bmatrix}\xi_\nu\\ \xi_{2\nu}\end{Bmatrix}$, contient dans tous ses termes le facteur $fghl$. Or en faisant, par exemple, $f=0$, et par suite $g=-h$, on trouvera

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{p}\mathfrak{f}+\mathfrak{q}\mathfrak{f}' &= 2\mathfrak{p}h^2(F^2-2hl)-2\mathfrak{q}h^3l,\\
\mathfrak{p}\mathfrak{g}+\mathfrak{q}\mathfrak{g}' &= -\mathfrak{p}h^3l(1+\sqrt{5}),\\
\mathfrak{p}\mathfrak{h}+\mathfrak{q}\mathfrak{h}' &= -\mathfrak{p}h^3l(1-\sqrt{5});
\end{aligned}
$$

d'où

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{f}+\mathfrak{q}\mathfrak{f}')(\mathfrak{p}\mathfrak{g}+\mathfrak{q}\mathfrak{g}')(\mathfrak{p}\mathfrak{h}+\mathfrak{q}\mathfrak{h}') = -8\mathfrak{p}^2h^8l^2[\mathfrak{p}(F^2-2hl)-\mathfrak{q}hl],$$

et l'on verrait que le radical $\sqrt{5}$ disparaît pareillement lorsque l'on suppose $g=0$, $h=0$ et $l=0$. On peut donc écrire

$$\alpha^{12}(\mathfrak{p}\mathfrak{f}+\mathfrak{q}\mathfrak{f}')(\mathfrak{p}\mathfrak{g}+\mathfrak{q}\mathfrak{g}')(\mathfrak{p}\mathfrak{h}+\mathfrak{q}\mathfrak{h}') = \Theta+\alpha^4fghl\Theta',$$

où Θ et Θ' seront invariables par la substitution $\begin{Bmatrix}\xi_\nu\\ \xi_{2\nu}\end{Bmatrix}$, qui change de signe le produit $fghl$, et par suite symétriques par rapport aux quatre racines ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4. Ces quantités, qui sont des invariants, réunissent donc les conditions du théorème donné au paragraphe XX, et, comme elles sont du douzième et du huitième ordre, on est assuré de pouvoir les mettre sous la forme de polynomes en λ_0 du troisième et du second degré. Faisant ainsi

$$\Theta+\alpha^4fghl\Theta' = L_0+\lambda_0L_1+\lambda_0^2L_2+\lambda_0^3L_3, \tag{1}$$

les coefficients L_0, L_1, L_2, L_3 seront respectivement d'ordre 12, 8, 4 et 0, et s'exprimeront au moyen des invariants fondamentaux et de la racine carrée du discriminant par ces formules, où je pose

$$\mathcal{A} = 5^4A,\qquad \Delta = 5^5D,$$

afin de simplifier quelques expressions, savoir :

$$
\begin{aligned}
L_3 &= \mathfrak{a},\\
L_2 &= \mathfrak{b}\mathcal{A}+\mathfrak{m}\sqrt{\Delta},\\
L_1 &= \mathfrak{c}\mathcal{A}^2+\mathfrak{c}'\Delta+\mathfrak{n}\mathcal{A}\sqrt{\Delta},\\
L_0 &= \mathfrak{d}\mathcal{A}^3+\mathfrak{d}'\mathcal{A}\Delta+\mathfrak{d}''\mathcal{B}+\mathfrak{p}\mathcal{A}^2\sqrt{\Delta}+\mathfrak{p}'\sqrt{\Delta^3},
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... étant des constantes numériques qu'il s'agit maintenant de déterminer.

A cet effet, j'observe que le premier membre de l'équation (1) peut être mis sous la forme d'une fonction homogène de F^2 et l, dont les coefficients contiendront seulement g et h, car il suffira d'y remplacer G^2 et H^2 par $F^2 - 4lh$, $F^2 + 4lg$, puis d'éliminer f au moyen de la relation $f + g + h = 0$. D'ailleurs le second membre est immédiatement de cette même forme, en vertu des expressions des invariants fondamentaux obtenus au paragraphe XVII, et de la valeur

$$\lambda_0 = \alpha^4 (f-g)(g-h)(h-f) l = -\alpha^4 (2g+h)(g-h)(2h+g) l.$$

Cela étant, je dis que dans les deux membres les coefficients des diverses puissances de F^2 sont identiquement les mêmes; car autrement on aurait entre F^2 et l une équation homogène qui pourrait donner $\frac{F^2}{l}$ exprimé en g et h, c'est-à-dire une fonction de la racine ξ_0, et par conséquent cette racine elle-même exprimée au moyen des quatre autres, puisque g et h ne contiennent pas ξ_0. On voit donc qu'il suffira de calculer ces coefficients des diverses puissances de F pour arriver par l'identification aux valeurs des constantes α, β, ... En supposant $h = 1$, et n'ayant pas égard aux puissances de g supérieures à la seconde, ce qui rend les opérations faciles, on pourra ainsi les obtenir toutes, à l'exception de $\mathfrak{p}'$, facteur d'un polynome en g commençant par le terme g^3. Mais, afin de simplifier encore, je vais, en considérant le cas particulier de $f = 0$, établir *a priori* que l'on a $\mathfrak{c} = 0$, $\mathfrak{d} = 0$. Cette supposition donne, en effet,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= -2\alpha^4 h^2 (F^2 - 3hl),\\
\Delta &= 0,\\
\mathcal{B} &= \alpha^{12} h^8 l^2 (F^2 - 4hl),\\
\lambda_0 &= -2\alpha^4 h^3 l,
\end{aligned}$$

et tout à l'heure on a obtenu

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{f} + \mathfrak{q}\mathfrak{f}')(\mathfrak{p}\mathfrak{g} + \mathfrak{q}\mathfrak{g}')(\mathfrak{p}\mathfrak{h} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}') = -8\mathfrak{p}^2 h^8 l^2 [\mathfrak{p}(F^2 - 2hl) - \mathfrak{q} hl .$$

L'identité qui en résulte, savoir :

$$\begin{aligned}
&-8\alpha h^9 l^3 - 8\beta h^8 l^2 (F^2 - 3hl)\\
&\quad -8\mathfrak{c} h^7 l (F^2 - 3hl)^2 - 8\mathfrak{d} h^6 (F^2 - 3hl)^3 + \mathfrak{d}'' h^8 l^2 (F^2 - 4hl)\\
&= -8\mathfrak{p}^2 h^8 l^2 [\mathfrak{p}(F^2 - 2hl) - \mathfrak{q} hl],
\end{aligned}$$

conduit immédiatement aux résultats annoncés.

Sans entrer maintenant dans tous les détails du calcul, j'en rapporterai les éléments principaux, qui seront d'abord les expressions suivantes, où l'on n'a gardé que la première puissance et le carré de g, en supposant, pour simplifier, $\alpha = 1$, $h = 1$, $l = 1$, savoir :

$$\begin{aligned}
\lambda_0^3 &= 8 + 36g + 18g^2,\\
\lambda_0^2 \mathcal{A} &= -2(4 + 16g + 13g^2)F^2 + 8 + 20g - 14g^2,\\
\lambda_0^2 \sqrt{\Delta} &= -4g - 16g^2,\\
\lambda_0 \Delta &= 2g^2,\\
\lambda_0 \mathcal{A} \sqrt{\Delta} &= (4g + 14g^2)F^2 - 4g - 8g^2,\\
\mathcal{A}\Delta &= -2g^2 F^2 + 2g^2,\\
\mathcal{B} &= g^2 F^6 - 4g^2 F^4 + (1 + 4g + 12g^2)F^2 + 2g + 4g^2,\\
\mathcal{A}^2 \sqrt{\Delta} &= -(4g + 12g^2)F^4 + (8g + 12g^2)F^2 - 4g,\\
\sqrt{\Delta^3} &= 0.
\end{aligned}$$

En second lieu, si l'on fait

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{f} + \mathfrak{q}\mathfrak{f}')(\mathfrak{p}\mathfrak{g} + \mathfrak{q}\mathfrak{g}')(\mathfrak{p}\mathfrak{h} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}') = LF^6 + MF^4 + NF^2 + P,$$

on aura

$$\begin{aligned}
L &= -8\mathfrak{p}^3 g^2,\\
M &= -8\mathfrak{p}^3 [+\sqrt{5} g - (4 - 3\sqrt{5}) g^2],\\
N &= -8\mathfrak{p}^3 - 16\mathfrak{p}^3 (2 - \sqrt{5}) g - 8[(11 - 3\sqrt{5})\mathfrak{p}^3 + 8\mathfrak{p}^2\mathfrak{q} - 2\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2] g^2,\\
P &= 16\mathfrak{p}^3 - 8\mathfrak{p}^2\mathfrak{q} + 4[14\mathfrak{p}^3 - (9 + 5\sqrt{5})\mathfrak{p}^2\mathfrak{q} + 2\sqrt{5}\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2] g\\
&\qquad + 8[(11 + 4\sqrt{5})\mathfrak{p}^3 + (2 - 10\sqrt{5})\mathfrak{p}^2\mathfrak{q} - (5 - 4\sqrt{5})\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{q}^3] g^2.
\end{aligned}$$

Cela posé, on obtient sans peine :

$$\begin{aligned}
\alpha &= 2\mathfrak{p}^3 - \mathfrak{p}^2\mathfrak{q}, & \mathfrak{m} &= \sqrt{5}(-2\mathfrak{p}^3 + 5\mathfrak{p}^2\mathfrak{q} - 2\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2),\\
\beta &= 0, & \mathfrak{n} &= 0,\\
\mathfrak{c}' &= 46\mathfrak{p}^3 - 15\mathfrak{p}^2\mathfrak{q} - 12\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2 + 4\mathfrak{q}^3, & \mathfrak{p} &= 2\sqrt{5}\mathfrak{p}^3.\\
\mathfrak{d}' &= -4\mathfrak{p}^3 + 32\mathfrak{p}^2\mathfrak{q} - 8\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2,\\
\mathfrak{d}'' &= -8\mathfrak{p}^3,
\end{aligned}$$

La constante $\mathfrak{p}'$ reste donc seule à déterminer; je considérerai pour l'obtenir le cas particulier de $g = 1$, $h = 1$, ce qui donnera, en supposant toujours $\alpha = 1$, $l = 1$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= -6F^2,\\
\Delta &= 4,\\
\mathcal{D} &= 4F^6 + 41F^2,\\
\lambda_0 &= 0;
\end{aligned}$$

on aura d'ailleurs

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{p}\mathfrak{f} + \mathfrak{q}\mathfrak{f}')(\mathfrak{p}\mathfrak{g} + \mathfrak{q}\mathfrak{g}')(\mathfrak{p}\mathfrak{h} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}') = \; &\left[-2\mathfrak{p}(F^2 + 4\sqrt{5}) + 2\mathfrak{q}\sqrt{5}\right]\\
&\times\left[\mathfrak{p}(4F^2 - 7 + \sqrt{5}) + 2\mathfrak{q}(3 + \sqrt{5})\right]\\
&\times\left[\mathfrak{p}(4F^2 + 7 + \sqrt{5}) - 2\mathfrak{q}(3 - \sqrt{5})\right]
\end{aligned}$$

et le terme indépendant de F^2 suffit pour donner immédiatement

$$\mathfrak{f}' = \sqrt{5}(-44\mathfrak{p}^3 + 115\mathfrak{p}^2\mathfrak{q} - 42\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2 + 4\mathfrak{q}^3).$$

Les éléments de la nouvelle formule de transformation de l'équation du cinquième degré, à laquelle conduit la méthode de résolution de M. Kronecker, sont donc maintenant complètement obtenus, et l'on a mis en évidence le mode d'expression de cette formule comme fonction rationnelle et entière de la racine ξ_0, ce qui est un des résultats auxquels je désirais surtout parvenir. On observera que les valeurs de α, β, ... prennent une forme un peu plus simple par le changement de $\mathfrak{q}$ en $\mathfrak{q} + 2\mathfrak{p}$; on trouve alors en effet :

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\mathfrak{p}^2\mathfrak{q}, & \mathfrak{m} &= -\sqrt{5}(3\mathfrak{p}^2\mathfrak{q} + 2\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2),\\
c' &= -15\mathfrak{p}^2\mathfrak{q} + 12\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2 + 4\mathfrak{q}^3, & p &= 2\sqrt{5}\mathfrak{p}^3,\\
\partial' &= +28\mathfrak{p}^3 - 8\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2, & p' &= \sqrt{5}(50\mathfrak{p}^3 - 5\mathfrak{p}^2\mathfrak{q} - 18\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2 + 4\mathfrak{q}^3),\\
\partial'' &= -8\mathfrak{p}^3,
\end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned}
&[\mathfrak{p}(\mathfrak{f} + 2\mathfrak{f}') + \mathfrak{q}\mathfrak{f}'][\mathfrak{p}(\mathfrak{g} + 2\mathfrak{g}') + \mathfrak{q}\mathfrak{g}'][(\mathfrak{p}(\mathfrak{h} + 2\mathfrak{h}') + \mathfrak{q}\mathfrak{h}']\\
&\quad = \mathfrak{p}^3\left(-8\mathcal{D} + 28\mathcal{A}\Delta + 2\mathcal{A}^2\sqrt{5\Delta} + 50\sqrt{5\Delta^3}\right) - \mathfrak{p}^2\mathfrak{q}\left(\lambda_0 + \sqrt{5\Delta}\right)^3\\
&\qquad - 2\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2\left(\lambda_0^2\sqrt{5\Delta} - 6\lambda_0\Delta + 4\mathcal{A}\Delta + 9\sqrt{5\Delta^3}\right) + 4\mathfrak{q}^3\left(\lambda_0\Delta + \sqrt{5\Delta^3}\right),
\end{aligned}$$

et c'est en multipliant ce résultat par $\alpha^6 fgh\mathrm{FGH}$ que s'obtient en résumé la valeur de z. Or on va voir qu'on est ainsi ramené au type

de substitution donné par la formule

$$z = \frac{t\,\varphi_1(x, 1) + u\,\varphi_2(x, 1) + v\,\varphi_3(x, 1) + w\,\varphi_4(x, 1)}{f'_x(x, 1)},$$

que j'ai employée au commencement de mon travail.

XXIII.

Après avoir été précédemment conduit à exprimer en fonction des racines les invariants des formes du cinquième degré, nous allons d'une manière analogue définir quatre covariants cubiques d'ordre 3, 7, 11, 15 qui s'offrent d'eux-mêmes dans la nouvelle formule de transformation à laquelle nous venons de parvenir. N'ayant d'autre but en ce moment que de rattacher à un point de vue commun les deux méthodes de résolution que j'ai étudiées, je ne chercherai pas à étendre au delà de mon objet des considérations qu'il serait peut-être intéressant de généraliser, et je me bornerai aux résultats suivants.

J'observe que, l'expression $\alpha^3\mathrm{FGH}\lambda_0^n$ étant symétrique par rapport à ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, on pourra écrire

$$\alpha^3\mathrm{FGH}\lambda_0^n = \alpha N\xi_0^4 + A\xi_0^3 + 3B\xi_0^2 + 3B'\xi_0 + A',$$

les coefficients N, A, ... étant des fonctions entières de ceux de la forme proposée $f(x, y) = (\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \beta', \alpha')(x, y)^5$. C'est ce que l'on reconnaît par l'égalité

$$\alpha N\xi^4 + A\xi^3 + 3B\xi^2 + 3B'\xi + A' = \sum_0^4{}_{\nu} \frac{\alpha^3 F_\nu G_\nu H_\nu \lambda_\nu^n}{f'_\xi(\xi_\nu, 1)}\,\frac{f(\xi, 1)}{\xi - \xi_\nu},$$

qui a lieu quel que soit ξ, et d'où l'on tire pour le coefficient de ξ^4 cette valeur

$$N = \sum_0^4{}_{\nu} \frac{\alpha^3 F_\nu G_\nu H_\nu \lambda_\nu^n}{f'_\xi(\xi_\nu, 1)},$$

ou, plus simplement,

$$N = \sum_0^4{}_{\nu} \frac{\alpha^2 F_\nu G_\nu H_\nu \lambda_\nu^n}{l_\nu}.$$

Or on a déjà remarqué, paragraphe XX, que la quantité $\frac{\alpha^2 F_\nu G_\nu H_\nu}{l_\nu}$ est, par rapport aux racines, un invariant comme λ_ν. Ce coefficient N se distingue donc de tous les autres en ce qu'il est un invariant dont l'ordre est $4n+2$, de sorte qu'il s'évanouit en supposant n inférieur à 4.

Cela étant, je dis que

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3B'xy^2 + A'y^3$$

est un covariant de la forme du cinquième degré, et je l'établirai en cherchant ce que devient l'égalité

$$\alpha^3 FGH\lambda_0^n = A\xi_0^3 + 3B\xi_0^2 + 3B'\xi_0 + A'$$

appliquée à la transformée $F(X, Y) = f(mX + m'Y, nX + n'Y)$.

Faisant à cet effet $\delta = mn' - m'n$, et remarquant que les racines de l'équation $F(X, 1) = 0$ sont les quantités $\frac{n'\xi_\nu - m'}{m - n\xi_\nu}$, on trouve que le premier membre devient

$$\frac{\alpha^3 FGH\lambda_0^n}{(m - n\xi_0)^3}\delta^{10n+9}.$$

Si l'on désigne par $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... les valeurs de A, B, ..., lorsque l'on y remplace α, β, ... par les coefficients de la transformée $F(X, Y)$, on aura

$$\frac{\alpha^3 FGH\lambda_0^n}{(m - n\xi_0)^3}\delta^{10n+9} = \mathfrak{A}\left(\frac{n'\xi_0 - m'}{m - n\xi_0}\right)^3 + 3\mathfrak{B}\left(\frac{n'\xi_0 - m'}{m - n\xi_0}\right)^2 + 3\mathfrak{B}'\frac{n'\xi_0 - m'}{m - n\xi_0} + \mathfrak{A}'$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}&\frac{A\xi_0^3 + 3B\xi_0^2 + 3B'\xi_0 + A'}{(m - n\xi_0)^3}\delta^{10n+9}\\ &\qquad = \mathfrak{A}\left(\frac{n'\xi_0 - m'}{m - n\xi_0}\right)^3 + 3\mathfrak{B}\left(\frac{n'\xi_0 - m'}{m - n\xi_0}\right)^2 + 3\mathfrak{B}'\frac{n'\xi_0 - m'}{m - n\zeta_0} + \mathfrak{A}'.\end{aligned}$$

Cette égalité, ayant lieu en substituant à ξ_0 l'une quelconque des racines, est identique par rapport à cette quantité, et l'on voit facilement qu'en faisant

$$x = mX + m'Y, \qquad y = nX + n'Y,$$

on en conclut

$$(Ax^3 + 3Bx^2y + 3B'xy^2 + A'y^3)\delta^{10n+6} = \mathfrak{A}X^3 + 3\mathfrak{B}X^2Y + 3\mathfrak{B}'XY^2 + \mathfrak{A}'Y^3,$$

de sorte qu'aux valeurs $n = 0, 1, 2, 3$ correspondent bien, comme on l'a annoncé, quatre covariants cubiques d'ordre 3, 7, 11, 15. Cela posé, et en les désignant pour un instant par $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, $\varphi_3(x, y)$, je reviens à la formule

$$z = \alpha^6 fgh FGH(L_0 + \lambda_0 L_1 + \lambda_0^2 L_2 + \lambda_0^3 L_3), \tag{1}$$

où l'on a, d'après les valeurs de α, β, ...,

$$\begin{aligned}L_3 &= -\mathfrak{p}^2\mathfrak{q},\\ L_2 &= -\sqrt{5\Delta}(3\mathfrak{p}^2\mathfrak{q} + 2\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2),\\ L_1 &= -\Delta(15\mathfrak{p}^2\mathfrak{q} - 12\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2 - 4\mathfrak{q}^3),\\ L_0 &= \mathcal{A}\Delta(28\mathfrak{p}^3 - 8\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2) - 8\mathfrak{C}\mathfrak{p}^3\\ &\quad + \sqrt{5\Delta}[2\mathcal{A}^2\mathfrak{p}^3 + \Delta(50\mathfrak{p}^3 - 5\mathfrak{p}^2\mathfrak{q} - 18\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2 + 4\mathfrak{q}^3)].\end{aligned}$$

Or, en multipliant et divisant par $\alpha l = f'_\xi(\xi_0, 1)$, elle prend cette forme

$$z = \sqrt{\Delta}\,\frac{L_0\varphi_0(\xi_0, 1) + L_1\varphi_1(\xi_0, 1) + L_2\varphi_2(\xi_0, 1) + L_3\varphi_3(\xi_0, 1)}{f'_\xi(\xi_0, 1)},$$

et c'est le type de substitution que je voulais mettre en évidence, les indéterminées t, u, v, w étant remplacées par L_0, L_1, L_2, L_3. De plus, on reconnaît que les covariants $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$ sont précisément ceux du troisième et du septième ordre dont j'ai fait usage, et la relation

$$\varphi_1(\xi_0, 1) = \alpha^3 FGH\lambda_0$$

donne même une démonstration nouvelle de ce fait, établi au paragraphe VII, qu'on a $\varphi_1(\xi_0, 1) = 0$ lorsque ξ_0 est une racine double [1]. Mais je remarque surtout cette conséquence que l'équation transformée en z étant (§ XII)

$$z^5 + \frac{5B}{8}z^3 + \frac{5(9B^2 - AC)}{4^4}z - \frac{1}{4^5}\sqrt[5]{\Pi} = 0, \tag{2}$$

les valeurs en $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ de t, u, v, w, savoir : $t = L_0$, $u = L_1$, ...,

---

[1] A l'égard des formes du troisième et du quatrième degré $f(x, y)$, le covariant quadratique ou Hessien, quand on y fait $x = \xi_0$, $y = 1$, a pour valeur le carré $f'_\xi(\xi_0, 1)$ et le covariant du troisième ordre le cube de la même quantité.

font disparaître le coefficient de z^2, propriété bien remarquable de la forme cubique en t, u, v, w qui représente ce coefficient.

Un autre point de vue sous lequel on peut encore envisager la formule (1) résulte de l'équation

$$\Pi'(\lambda_0) = \frac{16 l \mathrm{K}}{\alpha^2 \mathrm{FGH}},$$

établie au paragraphe XIX, car elle conduit à cette expression où n'entre plus que la quantité λ_0, savoir

$$z = 16 \mathrm{K} \sqrt{\Delta} \frac{\mathrm{L}_0 + \lambda_0 \mathrm{L}_1 + \lambda_0^2 \mathrm{L}_2 + \lambda_0^3 \mathrm{L}_3}{\Pi'(\lambda_0)}.$$

L'équation proposée $f(x, 1) = 0$ disparaît donc pour faire place à celle-ci : $\Pi(\lambda) = 0$, qui est directement ramenée à l'équation (2). Ce résultat obtenu, il ne reste plus, pour arriver à la résolution par les fonctions elliptiques, qu'à calculer l'expression de la quantité A, afin de déterminer par l'équation $\mathrm{A} = 0$ le rapport $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}}$.

XXIV.

J'ai indiqué au paragraphe XII par quelle voie M. Brioschi avait été conduit à l'équation en z, et je rappelle succinctement qu'en désignant par u_∞ une fonction cyclique des racines de l'équation générale du cinquième degré $f(\xi, 1) = 0$, qui change de signe par la substitution $\begin{Bmatrix} \xi_\nu \\ \xi_{4\nu} \end{Bmatrix}$, et nommant u_i ce que devient u_∞ par la substitution $\begin{Bmatrix} \xi_\nu \\ \xi_{3\nu^3+i} \end{Bmatrix}$, l'expression suivante, où ε est numérique, savoir

$$\begin{aligned} z = \varepsilon\,&[u_\infty + u_0 + \omega(u_2 + u_3)] \\ \times&[u_1 + u_4 + \omega(u_\infty - u_0)] \\ \times&[u_3 - u_2 + \omega(u_1 - u_4)], \end{aligned}$$

satisfait à l'équation

$$z^5 + \frac{5\mathrm{B}}{8} z^3 + \frac{z(9\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC})}{4^4} z - \frac{1}{4^5}\sqrt[4]{\Pi} = 0,$$

les quantités A, B, C et Π s'exprimant rationnellement par les

coefficients et la racine carrée du déterminant de la proposée. C'est dans le cas particulier de $\mathrm{A} = 0$ que cette équation est immédiatement résolue par les fonctions elliptiques, et l'on a trouvé qu'en faisant

$$\mathrm{A}_0\sqrt{5} = u_\infty\sqrt{5} + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4,$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{A}_1\sqrt{5} = u_0 + \rho^4 u_1 + \rho^3 u_2 + \rho^2 u_3 + \rho u_4,$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{A}_2\sqrt{5} = u_0 + \rho u_1 + \rho^2 u_2 + \rho^3 u_3 + \rho^4 u_4,$$

où ρ est une racine cinquième de l'unité, donnant

$$\sqrt{5} = \rho^2 + \rho^3 - \rho - \rho^4,$$

on avait

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_0^2 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2.$$

Cela posé, voici comment s'obtient cette quantité si importante lorsque l'on prend pour u l'expression dont j'ai fait usage

$$u = p\mathfrak{U} + p'\mathfrak{V} + 2\alpha^4 fghl(q\mathfrak{u} + q'\mathfrak{v}).$$

On a vu que les quatre indéterminées p, p', q, q' se réduisaient, dans la valeur de z, aux deux suivantes

$$\mathfrak{p} = \omega p + p', \qquad \mathfrak{q} = q + \omega q',$$

de sorte que l'on peut supposer $p = 0$, $q' = 0$, ce qui donne plus simplement

$$u = \mathfrak{p}\mathfrak{V} + 2\alpha^4 fghl\,\mathfrak{q}\mathfrak{u},$$

ou encore, en changeant $\mathfrak{q}$ en $\mathfrak{q} + 2\mathfrak{p}$, comme au paragraphe XXI,

$$u = \mathfrak{p}\mathfrak{V} + 2\alpha^4 fghl(\mathfrak{q} + 2\mathfrak{p})\mathfrak{u}.$$

Or, on a pour les six valeurs de $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{u}$ ces expressions

$$\begin{aligned}
\mathfrak{V}_\infty &= \alpha^6[-fgh\mathrm{F}^3 + (f - 2h)g^2 fl\mathrm{F} - h^4 l\mathrm{H}], & 2\mathfrak{u}_\infty &= +\alpha^2 h(\mathrm{F} + \mathrm{H}),\\
\mathfrak{V}_0 &= \alpha^6[-fgh\mathrm{F}^3 + (f - 2h)g^2 fl\mathrm{F} + h^4 l\mathrm{H}], & 2\mathfrak{u}_0 &= +\alpha^2 h(\mathrm{F} - \mathrm{H}),\\
\mathfrak{V}_1 &= \alpha^6[+fgh\mathrm{H}^3 - (h - 2g)f^2 hl\mathrm{H} - g^4 l\mathrm{G}], & 2\mathfrak{u}_1 &= -\alpha^2 g(\mathrm{H} - \mathrm{G}),\\
\mathfrak{V}_4 &= \alpha^6[+fgh\mathrm{H}^3 - (h - 2g)f^2 hl\mathrm{H} + g^4 l\mathrm{G}], & 2\mathfrak{u}_4 &= -\alpha^2 g(\mathrm{H} + \mathrm{G}),\\
\mathfrak{V}_2 &= \alpha^6[-fgh\mathrm{G}^3 + (g - 2f)h^2 gl\mathrm{G} + f^4 l\mathrm{F}], & 2\mathfrak{u}_2 &= -\alpha^2 f(\mathrm{F} - \mathrm{G}),\\
\mathfrak{V}_3 &= \alpha^6[+fgh\mathrm{G}^3 - (g - 2f)h^2 gl\mathrm{G} + f^4 l\mathrm{F}], & 2\mathfrak{u}_3 &= -\alpha^2 f(\mathrm{F} + \mathrm{G}).
\end{aligned}$$

Elles montrent qu'en supposant $G = 0$ on a

$$\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_4, \qquad \mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_4,$$
$$\mathfrak{V}_2 = \mathfrak{V}_3, \qquad \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}_3,$$

et, par conséquent, $u_1 = u_4$, $u_2 = u_3$, de sorte que l'équation $A = 0$ devient alors une somme de deux carrés, savoir

$$\left(\frac{u_\infty\sqrt{5} + u_0}{2} + u_1 + u_2\right)^2 + [u_0 + (\rho + \rho^4)u_1 + (\rho^2 + \rho^3)u_2]^2 = 0,$$

ou encore, en faisant toujours $\omega = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$,

$$\left(\frac{u_\infty + u_0}{2} + \omega u_2\right)^2 + \left(u_1 + \frac{u_\infty - u_0}{2}\omega\right)^2 = 0.$$

Mais l'hypothèse $G = 0$ revient à supposer nul l'invariant du dix-huitième ordre, ou bien à établir entre les invariants fondamentaux de la forme du cinquième degré une relation du trente-sixième ordre, et, comme la quantité qu'il s'agit d'obtenir est seulement du douzième, cette relation ne pourra la modifier en rien, et c'est en me plaçant dans ce cas particulier que je vais en faire le calcul.

J'observe d'abord que les égalités

$$G^2 - H^2 = 4lf, \qquad H^2 - F^2 = 4lg. \qquad F^2 - G^2 = 4lh$$

donnant pour $G = 0$: $H^2 = -4lf$, $F^2 = 4lh$, il suffit, pour obtenir les invariants, d'employer cette valeur de F^2 dans les expressions du paragraphe XVII. Mais on peut éviter ce calcul, car les invariants, fonctions symétriques des racines, ne changent pas de valeur en effectuant la substitution suivante : $\begin{Bmatrix} \xi_\nu \\ \xi_{3(\nu+1)^3+2} \end{Bmatrix}$ qui change F, G, H, f, g, h en $G, -H, -F, g, h, f$; ainsi l'on a, par exemple,

$$\frac{5^4 A}{\alpha^4} = \frac{\mathcal{A}}{\alpha^4} = -2(g^2 + gh + h^2)F^2 - (g - h)(2g^2 + gh + 2h^2)l$$
$$= -2(h^2 + hf + f^2)G^2 - (h - f)(2h^2 + hf + 2f^2)l.$$

Or cette dernière expression donne immédiatement

$$\frac{\mathcal{A}}{\alpha^4} = -(h - f)(2h^2 + hf + 2f^2)l,$$

et l'on aurait de même

$$\frac{\mathcal{D}}{\alpha^{12}} = -2hf(h - f)(h^6 + 3h^5f + 8h^4f^2 + 11h^3f^3 + 8h^2f^4 + 3hf^5 + f^6)l^3.$$

Cela posé, en faisant $\omega' = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, on trouve pour $G = 0$, après quelques réductions faciles,

$$\frac{u_\infty + u_0}{2} + \omega u_2 = \alpha^6[\omega f^2(f - g\omega)^2\mathfrak{p} + fgh(h - f\omega)\mathfrak{q}]lF,$$
$$u_1 + \frac{u_\infty - u_0}{2}\omega = \alpha^6[\omega' h^2(f - g\omega)^2\mathfrak{p} - fgh(g - h\omega)\mathfrak{q}]lH,$$

et il vient, pour la somme des carrés, après avoir remplacé F^2 et H^2 par $4lh$ et $-4lf$,

$$\left.\begin{aligned} &4\alpha^{12}(f - g\omega)^4[(f^3\omega^2 - h^3\omega'^2)]fhl^3.\mathfrak{p}^2 \\ &- 8\alpha^{12}(f - g\omega)^2[(1 - \omega')h - (1 - \omega)f]f^2g^2h^2l^3.\mathfrak{p}\mathfrak{q} \\ &+ 4\alpha^{12}[h(h - f\omega)^2 - f(g - h\omega)^2]f^2g^2h^2l^3.\mathfrak{q}^2 \end{aligned}\right\} = 0.$$

Soit donc, en me bornant au coefficient de $\mathfrak{p}^2$,

$$4\alpha^{12}(f - g\omega)^4(f^3\omega^2 - h^3\omega'^2)fhl^3$$
$$= \alpha\mathcal{A}^3 + \alpha'\mathcal{A}\Delta + \alpha''\mathcal{D} + \beta\mathcal{A}^2\sqrt{\Delta} + \beta'\sqrt{\Delta^3}.$$

On trouvera d'abord $\alpha = 0$, en supposant $f = 0$, et, après avoir supprimé le facteur fh, il suffira de faire $f = h$, $f = -h$, $f = 0$, et enfin de comparer dans les deux membres les termes en f^6h, pour obtenir bien facilement

$$\alpha' = 2, \qquad \alpha'' = 3, \qquad \beta = -\frac{1}{2}\sqrt{5}, \qquad \beta' = \frac{1}{2}\sqrt{5^3}.$$

Le calcul des deux autres coefficients est plus facile encore, et l'on obtient en définitive l'équation

$$\left(3\mathcal{D} + 2\mathcal{A}\Delta - \frac{\mathcal{A}^2\sqrt{5\Delta} - \sqrt{5^3\Delta^3}}{2}\right)\mathfrak{p}^2$$
$$- 4(\mathcal{A} + \sqrt{5^3\Delta})\Delta\mathfrak{p}\mathfrak{q} - 2(\mathcal{A} - 3\sqrt{5\Delta})\Delta\mathfrak{q}^2 = 0.$$

Ce résultat complète l'étude que je me suis proposé de faire de la méthode de M. Kronecker, en prenant pour point de départ les quantités $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ et je serais au terme de mes recherches si la marche que j'ai suivie ne conduisait encore à une autre fonction cyclique dont je vais dire quelques mots. Aux expressions $U_\infty = \alpha^6 F F_1 F_2 F_3 F_4$ et $V_\infty = \alpha^6 H H_1 H_2 H_3 H_4$, composées avec les facteurs F et H de l'invariant du dix-huitième ordre, on peut joindre celle-ci : $W_\infty = \alpha^6 G G_1 G_2 G_3 G_4$, que la substitution $\begin{Bmatrix} \xi_\nu \\ \xi_{4\nu} \end{Bmatrix}$ laisse invariable, de sorte qu'on en déduit, en la multipliant par $\mathfrak{u}_\infty$ ou par $\mathfrak{u}_\infty$, une fonction du huitième ordre, changeant de signe par cette même substitution, et que l'on peut par conséquent prendre pour u. Soit donc ainsi $u = p\mathfrak{u}W + q\mathfrak{u}$, on aura, à l'égard de l'équation $A = 0$, cette conséquence remarquable que les coefficients de p^2, pq, q^2 étant du seizième, du dixième et du quatrième ordre, cette équation ne contient pas le terme en pq. Mais j'ajourne l'étude de cette nouvelle espèce de fonctions, et je vais terminer en reprenant sous un autre point de vue la question déjà traitée des conditions de réalité des racines de l'équation du cinquième degré.

XXV.

En désignant par A, B, C les invariants fondamentaux et posant

$$\begin{aligned} D &= A^2 + 128B, \\ D_1 &= 25AB + 16C, \\ N &= D_1^2 - 10ABD_1 + 9B^2D, \end{aligned}$$

j'ai donné au paragraphe X, pour les conditions de réalité des cinq racines, ces trois criteria :

$$D > 0, \qquad BD_1 < 0, \qquad N < 0,$$

qui sont du huitième, du vingtième et du vingt-quatrième ordre, et l'on a vu que, les conditions $B > 0$, $D_1 < 0$ ne pouvant jamais avoir lieu simultanément, le second criterium donne à la fois $B < 0$, $D_1 > 0$. Or il est bien remarquable que le théorème de Sturm, appliqué à l'équation en λ, reproduise exactement les mêmes résultats, et c'est ce que je vais établir avant de donner le procédé qui conduira à des criteria d'un ordre moins élevé. Voici d'abord, en posant avec M. Sylvester

$$9\Lambda = 9A^3 - 2^{11}(AB + C),$$

cette équation en λ, qui a été calculée par le P. Joubert,

$$\left(\frac{\lambda}{5^3}\right)^5 - 5A\left(\frac{\lambda}{5^3}\right)^4 + 10D\left(\frac{\lambda}{5^3}\right)^3 - 10(3AD - 2\Lambda)\left(\frac{\lambda}{5^3}\right)^2$$
$$+ 5D(5D - 4A^2)\left(\frac{\lambda}{5^3}\right) - D(108\Lambda - 9AD - 100A^3) = 0.$$

Cela posé, on trouve, par le calcul direct du premier terme des fonctions intermédiaires et en supprimant un facteur numérique,

$$V_2 = B\lambda^3 + \ldots, \qquad V_3 = -N\lambda^2 + \ldots.$$

Mais, pour la quatrième fonction, les expressions des différences des quantités λ, données au paragraphe XX, montrent qu'elle contient en facteur le carré de l'invariant du dix-huitième ordre, et l'on trouve ainsi, pour le coefficient de son premier terme, l'expression

$$K^2 \sum_0^4 {}_\nu (f_\nu g_\nu h_\nu F_\nu G_\nu H_\nu)^2 = 25K^2 D_1.$$

Quant à V_5, on obtient $K^4 D$, d'où il résulte qu'en supprimant les facteurs K^2 et K^4 on retombe bien sur les criteria déduits de la forme quadratique

$$D_1 t^2 - 6BDtv - D(D_1 - 10AB)v^2$$
$$+ D[-Bu^2 + 2D_1 uw + (9BD - 10AD_1)w^2].$$

Je remarque encore que l'équation en λ donne un système simple des covariants doubles en x et x' définis au paragraphe XI, et servant à déterminer par leurs signes le nombre des racines réelles de l'équation proposée $f(x, 1) = 0$ qui sont comprises entre les limites données. En effet, on peut prendre, en désignant toujours ces racines par $x_0, x_1, \ldots$, et posant $V = f(x, 1)$,

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= V\sum \frac{x' - x_0}{x - x_0}, \\ \vartheta_2 &= V\sum \frac{(x' - x_0)(x' - x_1)}{(x - x_0)(x - x_1)}\zeta(\lambda_0, \lambda_1), \\ \vartheta_3 &= V\sum \frac{(x' - x_0)(x' - x_1)(x' - x_2)}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}\zeta(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2). \end{aligned}$$

Quant à ϑ_4, on supprimera le facteur K^2, amené par les symboles ζ qui contiennent quatre des racines λ, et enfin on prendra $\vartheta_5 = f(x', 1)D$. On voit qu'ainsi ϑ_1 sera du premier ordre, ϑ_2 du neuvième, ϑ_3 du vingt-cinquième, ϑ_4 du treizième, et ϑ_5 du neuvième. Mais j'arrive, sans m'arrêter plus longtemps sur ce sujet, a la méthode élémentaire, et qui donne pour les conditions de réalité les criteria du quatrième, du huitième et du douzième ordre, et au nombre de trois seulement. Elle se fonde sur ce que les quantités u_∞, u_0, ... satisfont à l'équation suivante

$$\begin{aligned} u^{12} &+ (\mathcal{A} + 3\sqrt{\Delta})u^{10} + \left[\frac{1}{4}(\mathcal{A} - \sqrt{\Delta})^2 + \Delta\right]u^8 + \mathcal{D}u^6 \\ &+ \left[\frac{1}{4}(\mathcal{A} + \sqrt{\Delta})^2 + \Delta\right]\Delta u^4 + (\mathcal{A} - 3\sqrt{\Delta})\Delta^2 u^2 + \Delta^3 = 0, \end{aligned}$$

que l'on forme très facilement, et dont les coefficients seront tous réels si nous supposons le discriminant Δ positif, ce qui est, dans la question présente, le seul cas à examiner. Or, en revenant à l'expression d'une des racines, par exemple

$$u_\infty = \alpha^4(x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_0),$$

on reconnaît immédiatement que, x_0 étant réel, x_2 et x_3 imaginaires conjugués, ainsi que x_1 et x_4, on obtient pour u_∞ une quantité de la forme $m\sqrt{-1}$, dont le carré est essentiellement négatif. En établissant donc que l'équation en u n'a que des racines positives, c'est-à-dire que son premier membre n'offre que des variations, on aura les conditions à la fois nécessaires et suffisantes pour que les racines de l'équation du cinquième degré soient toutes réelles. Si l'on convient de prendre positivement $\sqrt{\Delta}$, on parvient ainsi à ces résultats fort simples

$$\Delta > 0, \qquad \mathcal{A} + 3\sqrt{\Delta} < 0, \qquad \mathcal{D} < 0,$$

et il est visible que le cas des quatre racines imaginaires sera caractérisé par un changement de signe des deux derniers criteria, en conservant la condition $\Delta > 0$ [1].

---

(1) Nous n'avons pas signalé toutes les erreurs de calcul qui se trouvaient dans ce Mémoire, et qui ont été corrigées par M. Bourget. Celui-ci a refait tous les calculs, sauf en deux points. Il a admis que la réduite du cinquième degré de l'équation du sixième ordre était exacte dans le travail du P. Joubert sur les équations du sixième degré (*Comptes rendus*, t. LXIV). Il a admis comme exacte également la formation de l'équation en $\left(\frac{\lambda}{5^5}\right)$ (p. 423) et le calcul des premières fonctions de Sturm.

E. P.

SUR LES INVARIANTS
DES
FORMES DU CINQUIÈME DEGRÉ.

Salmon, *Algèbre supérieure*, trad. *O. Chemin*, deuxième édition, 1890, p. 557.

C'est dans la théorie des formes du cinquième degré qu'on voit s'offrir pour la première fois un invariant gauche, c'est-à-dire un invariant qui se reproduit changé de signe dans toute transformée de la forme proposée par une substitution au déterminant -1, telle que par exemple

$$\left\{\begin{array}{l} x = -X \\ y = Y \end{array}\right\}$$

ou bien

$$\left\{\begin{array}{l} x = Y \\ y = X \end{array}\right\}.$$

Si la forme du cinquième degré décomposée en ses facteurs linéaires est

$$\Phi = a(x - x_0y)(x - x_1y)(x - x_2y)(x - x_3y)(x - x_4y),$$

son expression en fonction des racines s'obtient comme il suit.

Posons, pour abréger,

$$(mn) = x_m - x_n,$$

on aura

$$\begin{aligned} K = a^{18}&[(01)(04)(32)+(02)(03)(14)][(01)(02)(43)+(03)(04)(12)][(01)(03)(42)+(02)(04)(31)] \\ \times&[(12)(10)(43)+(13)(14)(20)][(12)(13)(04)+(14)(10)(23)][(12)(14)(03)+(13)(10)(42)] \\ \times&[(23)(21)(04)+(24)(20)(31)][(23)(24)(10)+(20)(21)(34)][(23)(20)(14)+(24)(21)(03)] \\ \times&[(34)(32)(10)+(30)(31)(42)][(34)(30)(21)+(31)(32)(40)][(34)(31)(20)+(30)(32)(14)] \\ \times&[(40)(43)(21)+(41)(42)(03)][(40)(41)(32)+(42)(43)(01)][(40)(42)(31)+(41)(43)(20)]. \end{aligned}$$

Cela étant, je vais résumer dans cette Note plusieurs résultats relatifs aux facteurs de l'invariant gauche et qui donneront sous un nouveau point de vue la détermination des invariants dans les formes du cinquième degré.

Soient à cet effet ([1])

$$\begin{aligned} F &= (01)(04)(32)+(02)(03)(14), \\ G &= (01)(02)(43)+(03)(04)(12), \\ H &= (01)(03)(42)+(02)(04)(31), \end{aligned}$$

et convenons de représenter par F_ν, G_ν, H_ν ce que deviennent respectivement ces quantités, en ajoutant le nombre ν aux indices des racines x_0, x_1, ..., pris suivant le module 5. L'expression de l'invariant du dix-huitième ordre sera ainsi

$$K = a^{18}.FGH.F_1G_1H_1.F_2G_2H_2.F_3G_3H_3.F_4G_4H_4,$$

et en premier lieu je donnerai le moyen de connaître comment s'échangent entre eux les quinze facteurs, lorsqu'on effectue sur les racines une substitution quelconque. Or, à l'égard de la substitution $\left\{\begin{matrix} x_\nu \\ x_{2\nu} \end{matrix}\right\}$, on aura pour résultats

$$1^\circ \qquad \left\{\begin{matrix} F, & F_1, & F_2, & F_3, & F_4 \\ -H, & -H_2, & -H_4, & -H_1, & -H_3 \end{matrix}\right\};$$

$$2^\circ \qquad \left\{\begin{matrix} G, & G_1, & G_2, & G_3, & G_4 \\ -G, & -G_2, & -G_4, & -G_1, & -G_3 \end{matrix}\right\};$$

$$3^\circ \qquad \left\{\begin{matrix} H, & H_1, & H_2, & H_3, & H_4 \\ F, & F_2, & F_4, & F_1, & F_3 \end{matrix}\right\}.$$

La substitution $\left\{\begin{matrix} x_\nu \\ x_{3\nu^3} \end{matrix}\right\}$ donnera

$$1^\circ \qquad \left\{\begin{matrix} F, & F_1, & F_2, & F_3, & F_4 \\ F, & G_3, & -H_4, & -H_1, & -G_2 \end{matrix}\right\};$$

$$2^\circ \qquad \left\{\begin{matrix} G, & G_1, & G_2, & G_3, & G_4 \\ -G, & -H_3, & -F_4, & F_1, & H_2 \end{matrix}\right\};$$

$$3^\circ \qquad \left\{\begin{matrix} H, & H_1, & H_2, & H_3, & H_4 \\ -H, & -F_3, & G_4, & -G_1, & -F_2 \end{matrix}\right\}.$$

([1]) *Voyez* mon Mémoire *Sur l'équation du cinquième degré*. Paris, Gauthier-Villars et HERMITE, *Œuvres*, t. II, p. 347.

Et comme toute substitution entre cinq quantités résulte de la composition des substitutions élémentaires

$$\left\{\begin{matrix} x_\nu \\ x_{\nu+1} \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} x_\nu \\ x_{2\nu} \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} x_\nu \\ x_{3\nu^3} \end{matrix}\right\},$$

on pourra, par ce qui précède, connaître l'effet d'une permutation donnée des racines sur l'un quelconque des quinze facteurs.

En même temps que F, G, H, je considérerai les quantités

$$\begin{aligned} f &= (31)(24), \\ g &= (14)(23), \\ h &= (12)(34), \end{aligned}$$

et je désignerai par f_ν, g_ν, h_ν ce qu'elles deviennent en ajoutant ν aux indices des racines. Cela étant, on trouve que la substitution $\left\{\begin{matrix} x_\nu \\ x_{2\nu} \end{matrix}\right\}$ opère les changements que voici :

$$1^\circ \qquad \left\{\begin{matrix} f, & f_1, & f_2, & f_3, & f_4 \\ -h, & -h_2, & -h_4, & -h_1, & -h_3 \end{matrix}\right\};$$

$$2^\circ \qquad \left\{\begin{matrix} g, & g_1, & g_2, & g_3, & g_4 \\ -g, & -g_2, & -g_4, & -g_1, & -g_3 \end{matrix}\right\};$$

$$3^\circ \qquad \left\{\begin{matrix} h, & h_1, & h_2, & h_3, & h_4 \\ -f, & -f_2, & -f_4, & -f_1, & -f_3 \end{matrix}\right\}.$$

Quant à la substitution $\left\{\begin{matrix} x_\nu \\ x_{3\nu^3} \end{matrix}\right\}$, elle donne pour résultats :

$$1^\circ \qquad \left\{\begin{matrix} f, & f_1, & f_2, & f_3, & f_4 \\ f, & g_3, & h_4, & h_1, & g_2 \end{matrix}\right\};$$

$$2^\circ \qquad \left\{\begin{matrix} g, & g_1, & g_2, & g_3, & g_4 \\ g, & h_3, & f_4, & f_1, & h_2 \end{matrix}\right\};$$

$$3^\circ \qquad \left\{\begin{matrix} h, & h_1, & h_2, & h_3, & h_4 \\ h, & f_3, & g_4, & g_1, & f_2 \end{matrix}\right\}.$$

D'où l'on voit que les deux groupes de quinze quantités se permutent de la même manière, sauf certains changements de signes, quand on effectue les mêmes permutations sur les racines de la proposée. Mais le lien que nous établissons entre elles se justifie plus complètement, d'abord par ces relations où, pour abréger, on fait

$$l = (01)(02)(03)(04),$$

savoir

$$\begin{aligned} G^2 - H^2 &= 4lf, \\ H^2 - F^2 &= 4lg, \\ F^2 - G^2 &= 4lh, \end{aligned}$$

et ensuite par cette remarque que les divers produits

$$\begin{matrix} a^2 F_\nu f_\nu, & a^2 F_\nu g_\nu, & a^2 F_\nu h_\nu, \\ a^2 G_\nu f_\nu, & a^2 G_\nu g_\nu, & a^2 G_\nu h_\nu, \\ a^2 H_\nu f_\nu, & a^2 H_\nu g_\nu, & a^2 H_\nu h_\nu, \end{matrix}$$

a étant le coefficient du premier terme de la forme du cinquième degré, *sont des invariants*. Ces produits donnent lieu à ce fait algébrique que neuf d'entre eux, correspondant à la même valeur de l'indice ν, suffisent pour en déduire linéairement tous les autres. On a, en effet, les relations qui suivent :

$$\begin{aligned} 2F_1 f_1 &= \quad Ff - Gh + Hg, \\ 2G_1 g_1 &= \quad Fg + Gf + Hh, \\ 2H_1 h_1 &= \quad Fh - Gg - Hf; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2F_2 f_2 &= -Fh + Gg - Hf, \\ 2G_2 g_2 &= -Ff + Gh + Hg, \\ 2H_2 h_2 &= -Fg - Gf + Hh; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2F_3 f_3 &= -Fh - Gg - Hf, \\ 2G_3 g_3 &= +Ff + Gh - Hg, \\ 2H_3 h_3 &= -Fg + Gf + Hh; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2F_4 f_4 &= +Ff + Gh + Hg, \\ 2G_4 g_4 &= -Fg + Gf - Hh, \\ 2H_4 h_4 &= +Fh + Gg - Hf. \end{aligned}$$

Tous les autres sont d'une forme presque aussi simple, et en voici le type :

$$\begin{aligned} 2F_1 h_1 &= Fh + Gg + H(h - g), \\ 2H_1 g_1 &= F(f - h) - Gf + Hh, \\ 2G_1 f_1 &= -Ff + G(g - f) + Hg, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

De là résulte la possibilité d'exprimer au moyen de F, G, H, d'une part, f, g, h, de l'autre, des fonctions des racines de la forme proposée qui sont des invariants. Considérons, par exemple, l'expression

$$Ff + F_1 f_1 + F_2 f_2 + F_3 f_3 + F_4 f_4,$$

qui est évidemment cyclique. En vertu des relations précédentes, elle prendra cette forme très simple

$$F(2f - h) + H(g - f).$$

Les fonctions $FF_1F_2F_3F_4$, $HH_1H_2H_3H_4$, qui sont également cycliques, s'expriment d'une manière analogue. En faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned} f' &= f^2 + gh, \\ g' &= g^2 + fh, \\ h' &= h^2 + fg, \end{aligned}$$

j'ai montré dans mon Mémoire *Sur l'équation du cinquième degré* qu'on a

$$\begin{aligned} FF_1F_2F_3F_4 &= F(\quad H^2h^3 + FHhh' + h'^2 l), \\ HH_1H_2H_3H_4 &= H(-F^2f^3 + FHff' + f'^2 l). \end{aligned}$$

On obtiendrait pareillement

$$\begin{aligned} GG_1G_2G_3G_4 = G[&-G^2(f-h)g^2 + FH(f^2 + fh + h^2)g \\ &+ (f^4 - 2f^3h - 5f^2h^2 - 2fh^3 + h^4)l]. \end{aligned}$$

Mais, dans ces formes si simples de fonctions compliquées de racines, le caractère cyclique de ces fonctions n'apparaît plus d'une manière évidente, et pour le retrouver il faudrait toute une théorie, qui me mènerait bien au delà de mon objet actuel. Je me propose en effet, en considérant des expressions non seulement cycliques, mais symétriques, d'établir que *tout invariant dont l'ordre est multiple de 4 est une fonction homogène de* F^2 *et* l *ayant pour coefficients des polynomes entiers en* g *et* h.

Dans ce but, je considérerai les diverses déterminations de la fonction suivante

$$u = (01)(12)(23)(34)(40),$$

qui, multipliée par a^2, donne évidemment un invariant. Ces déterminations, au nombre de vingt-quatre, sont deux à deux égales et de signes contraires, et peuvent ainsi se réduire à douze, que je partagerai en deux groupes et désignerai comme il suit :

$$\left\{\begin{array}{l} u_\infty=(01)(12)(23)(34)(40),\\ u_0=(03)(34)(41)(12)(20),\\ u_1=(14)(40)(02)(23)(31),\\ u_2=(20)(01)(13)(34)(42),\\ u_3=(31)(12)(24)(40)(03),\\ u_4=(42)(23)(30)(01)(14);\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} v_\infty=(02)(24)(41)(13)(30),\\ v_0=(04)(42)(23)(31)(10),\\ v_1=(10)(03)(34)(42)(21),\\ v_2=(21)(14)(40)(03)(32),\\ v_3=(32)(20)(01)(14)(43),\\ v_4=(43)(31)(12)(20)(04).\end{array}\right.$$

v_∞ a été tiré de u_∞ par la substitution $\left\{\begin{array}{c} x_\nu \\ x_{2\nu}\end{array}\right\}$; u_0 et v_0 ont été respectivement déduits de u_∞ et v_∞ par la substitution $\left\{\begin{array}{c} x_\nu \\ x_{3\nu}\end{array}\right\}$; enfin u_i et v_i de u_0 et v_0 en ajoutant le nombre i aux indices des racines pris suivant le module 5. On sait qu'à l'origine de la théorie des invariants on a considéré comme fonctions symétriques des carrés de ces douze quantités les invariants fondamentaux du quatrième, du huitième et du douzième ordre des formes du cinquième degré. Ainsi l'on a, en désignant avec M. Sylvester l'invariant du quatrième ordre par J et le déterminant par D,

$$a^4(u_\infty^2+u_0^2+u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2)=-5^4\mathrm{J}-3.5^2\sqrt{5\mathrm{D}},$$
$$a^4(v_\infty^2+v_0^2+v_1^2+v_2^2+v_3^2+v_4^2)=-5^4\mathrm{J}+3.5^2\sqrt{5\mathrm{D}},$$

et la somme des produits trois à trois des carrés conduit à

$$\begin{aligned} a^{12}(u_\infty^2u_1^2u_0^2+\ldots) &= a^{12}(v_\infty^2v_0^2v_1^2+\ldots)\\ &= 4.5^9(48\,\mathrm{JK}-768\,\mathrm{L}-\Lambda),\end{aligned}$$

en adoptant les dénominations du même auteur. Or on a, comme

on le vérifie sans peine, ces deux systèmes de relation, savoir

$$\left\{\begin{array}{ll} 2u_\infty=+h(\mathrm{H}+\mathrm{F}), & 2v_\infty=+f(\mathrm{H}-\mathrm{F}),\\ 2u_0=-h(\mathrm{H}-\mathrm{F}), & 2v_0=-f(\mathrm{H}+\mathrm{F}),\\ 2u_1=+g(\mathrm{G}-\mathrm{H}), & 2v_1=+h(\mathrm{G}+\mathrm{H}),\\ 2u_4=-g(\mathrm{G}+\mathrm{H}), & 2v_4=-h(\mathrm{G}-\mathrm{H}),\\ 2u_2=+f(\mathrm{F}-\mathrm{G}), & 2v_2=-g(\mathrm{F}+\mathrm{G}),\\ 2u_3=-f(\mathrm{F}+\mathrm{G}), & 2v_3=+g(\mathrm{F}-\mathrm{G}).\end{array}\right.$$

On en déduit, en faisant la somme des carrés, l'expression de l'invariant du quatrième ordre J, sous la forme

$$\begin{aligned} a^4[(2\mathrm{F}^2+\mathrm{G}^2+\mathrm{H}^2)f^2+(2\mathrm{G}^2+\mathrm{H}^2+\mathrm{F}^2)g^2&\\ +(2\mathrm{H}^2+\mathrm{F}^2+\mathrm{G}^2)h^2]&=-4.5^4\mathrm{J},\end{aligned}$$

et, si l'on écrit la somme des produits trois à trois, $u_\infty^2u_0^2u_1^2+\ldots$, de cette manière :

$$\begin{aligned} &(u_\infty^2+u_0^2)(u_1^2+u_4^2)(u_2^2+u_3^2)\\ &\quad+u_\infty^2u_0^2(u_1^2+u_4^2+u_2^2+u_3^2)\\ &\quad+u_1^2u_4^2(u_\infty^2+u_0^2+u_2^2+u_3^2)\\ &\quad+u_2^2u_3^2(u_\infty^2+u_0^2+u_1^2+u_4^2),\end{aligned}$$

on parviendra à l'invariant du douzième ordre, exprimé comme il suit :

$$\begin{aligned} &2^7 5^9(48\,\mathrm{JK}-768\,\mathrm{L}-\Lambda)\\ &=4a^{12}(\mathrm{F}^2+\mathrm{G}^2)(\mathrm{G}^2+\mathrm{H}^2)(\mathrm{H}^2+\mathrm{F}^2)f^2g^2h^2\\ &\quad+a^{12}(\mathrm{F}^2-\mathrm{H}^2)^2[(\mathrm{F}^2+\mathrm{G}^2)g^2+(\mathrm{G}^2+\mathrm{H}^2)h^2]f^4\\ &\quad+a^{12}(\mathrm{G}^2-\mathrm{F}^2)^2[(\mathrm{G}^2+\mathrm{H}^2)h^2+(\mathrm{H}^2+\mathrm{F}^2)f^2]g^4\\ &\quad+a^{12}(\mathrm{H}^2-\mathrm{G}^2)^2[(\mathrm{H}^2+\mathrm{F}^2)f^2+(\mathrm{F}^2+\mathrm{G}^2)g^2]h^4.\end{aligned}$$

Adoptant donc le discriminant $5^5\mathrm{D}=a^8f^2g^2h^2l^2$ pour invariant du huitième ordre, la proposition précédemment annoncée se trouvera démontrée à l'égard de ces invariants fondamentaux, en observant que F, G, H n'y entrent que par leurs carrés, de sorte qu'au moyen des relations

$$\mathrm{G}^2-\mathrm{H}^2=4lf,$$
$$\mathrm{H}^2-\mathrm{F}^2=4lg,$$
$$\mathrm{F}^2-\mathrm{G}^2=4lh,$$

et de celle-ci qui en découle

$$f+g+h=0,$$

on pourra effectivement les exprimer par F^2, g, h, l. Nous obtiendrons ainsi

$$5^4 J = -a^4[2F^2(g^2+gh+h^2)+(g-h)(2g^2+gh+2h^2)l],$$
$$5^5 D = a^8(g+h)^2 g^2 h^2 l^2,$$

$$\begin{aligned}
&4.5^9(48JK - 768L - \Lambda)\\
&\quad = a^{12}[F^6(g+h)^2 g^2 h^2 + 4F^4 l(g-h)(g+h)^2 g^2 h^2\\
&\qquad + F^2 l^2(g^8 + 4g^7 h + 12 g^6 h^2 + 6 g^5 h^3 - 5 g^4 h^4\\
&\qquad\qquad + 6 g^3 h^5 + 12 g^2 h^6 + 4 g h^7 + h^8)\\
&\qquad - 2 l^3 gh(g-h)(g^6 + 3g^5 h + 8 g^4 h^2 + 11 g^3 h^3 + 8 g^2 h^4 + 3 g h^5 + h^6)].
\end{aligned}$$

Or, ces expressions sont des fonctions homogènes de F^2 et l, dont les coefficients sont des polynomes entiers en g et h, et il en sera de même par conséquent de leurs combinaisons entières qui représentent tout invariant de la forme du cinquième degré dont l'ordre est multiple de quatre. J'ajoute qu'un invariant donné ne peut être obtenu de deux manières différentes, comme nous venons de le dire; car, en égalant deux expressions de cette nature, on arrive à une équation homogène entre F^2 et l, qui pouvait donner $\frac{F^2}{l}$ en g et h, c'est-à-dire une fonction de la racine x_0, et par conséquent cette racine au moyen des quatre autres, puisque g et h ne contiennent pas x_0.

Je terminerai cette Note par ce qui concerne, au même point de vue, l'invariant gauche, et à cet effet, en posant comme plus haut

$$f' = f^2 + gh,$$
$$g' = g^2 + fh,$$
$$h' = h^2 + fg,$$

j'emploierai les relations suivantes qu'il est aisé de vérifier, savoir

$$2(x_4 - x_2)F_1 G_3 = Hg' + Gh',$$
$$2(x_2 - x_3)H_1 H_4 = Fh' + Hf',$$
$$2(x_2 - x_1)H_3 G_4 = Gf' + Fg',$$
$$2(x_1 - x_3)G_2 F_4 = Hg' - Gh',$$
$$2(x_4 - x_1)F_2 F_3 = Fh' - Hf',$$
$$2(x_4 - x_3)G_1 H_2 = Gf' - Fg'.$$

On en déduit, en les multipliant membre à membre,

$$-64 fgh K = a^{18} FGH(H^2 g'^2 - G^2 h'^2)(F^2 h'^2 - H^2 f'^2)(G^2 f'^2 - F^2 g'^2).$$

Écrivant ensuite

$$H^2 g'^2 - G^2 h'^2 = H^2(g'^2 - h'^2) - 4 l f h'^2,$$
$$F^2 h'^2 - H^2 f'^2 = F^2(h'^2 - f'^2) - 4 l g f'^2,$$
$$G^2 f'^2 - F^2 g'^2 = G^2(f'^2 - g'^2) - 4 l h g'^2,$$

et observant qu'on a

$$g'^2 - h'^2 = 4 fgh(g-h),$$
$$h'^2 - f'^2 = 4 fgh(h-f),$$
$$f'^2 - g'^2 = 4 fgh(f-g),$$

on en conclut immédiatement

$$\begin{aligned}
K = a^{18} FGH &[F^2(h-f)fh - lf'^2]\\
&\times[G^2(f-g)fg - lg'^2]\\
&\times[H^2(g-h)gh - lh'^2],
\end{aligned}$$

et l'on reconnaît que la quantité par laquelle est multipliée FGH peut encore être mise sous la forme d'une fonction homogène de F^2 et l.