savoir :

$$\frac{\Phi(x+az,\,y+bz)}{\mathfrak{F}'(z)} = \Phi + a\,\frac{d\mathrm{F}\,\Phi}{dx} + \frac{a^2}{1.2}\,\frac{d^2\mathrm{F}^2\Phi}{dx^2} + \ldots$$
$$+ b\,\frac{d\mathrm{F}\,\Phi}{dy} + ab\,\frac{d^2\mathrm{F}^2\Phi}{dx\,dy} + \ldots$$
$$+ \frac{b^2}{1.2}\,\frac{d^2\mathrm{F}^2\Phi}{dy^2} + \ldots$$
$$+ \ldots,$$

ou bien

$$\frac{\Phi(x+az,\,y+bz)}{\mathfrak{F}'(z)} = \sum \frac{a^m b^n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}\,\frac{d^{m+n}\mathrm{F}^{m+n}\Phi}{dx^m\,dy^n},$$

l'équation en z étant

$$\mathfrak{F}(z) = z - \mathrm{F}(x+az,\,y+bz) = 0.$$

Cette conséquence de la formule de Lagrange donne le théorème que nous avions en vue d'établir; supposant en effet

$$\mathrm{F}(x,y) = x^2+y^2-1, \qquad \Phi(x,y) = 1,$$

et remplaçant a et b par $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$, l'équation devient

$$\mathfrak{F}(z) = z - \left(x + \frac{az}{2}\right)^2 - \left(y + \frac{bz}{2}\right)^2 + 1 = 0.$$

On en tire

$$\mathfrak{F}'(z) = [1 - 2ax - 2by + a^2(1-y^2) + 2abxy + b^2(1-x^2)]^{\frac{1}{2}},$$

et, par suite,

$$[1 - 2ax - 2by + a^2(1-y^2) + 2abxy + b^2(1-x^2)]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \sum \frac{a^m b^n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n.2^{m+n}}\,\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m\,dy^n}.$$

Voici ce qui résulte de cette expression pour les polynomes $\mathrm{U}_{m,n}$.

V.

En premier lieu, on a comme pour $\mathrm{V}_{m,n}$ la relation

$$\int\!\!\int dx\,dy\,\mathrm{U}_{m,n}\,\mathrm{U}_{\mu,\nu} = 0,$$

avec la condition

$$x^2+y^2 \leqq 1,$$

quand $m+n$ n'est pas égal à $\mu+\nu$. Nous le déduirons de la formule suivante

$$\int \mathrm{F}(x)\,\frac{d^n\Phi(x)}{dx^n}\,dx = \mathrm{F}\,\frac{d^{n-1}\Phi}{dx^{n-1}} - \frac{d\mathrm{F}}{dx}\,\frac{d^{n-2}\Phi}{dx^{n-2}} + \frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2}\,\frac{d^{n-3}\Phi}{dx^{n-3}} - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1}\,\frac{d^{n-1}\mathrm{F}}{dx^{n-1}}\,\Phi + (-1)^n \int \Phi(x)\,\frac{d^n\mathrm{F}(x)}{dx^n}\,dx,$$

qui donne

$$\int_a^b \mathrm{F}(x)\,\frac{d^n\Phi(x)}{dx^n}\,dx = (-1)^n \int_a^b \Phi(x)\,\frac{d^n\mathrm{F}(x)}{dx^n}\,dx,$$

en supposant que a et b annulent $\Phi(x)$ et ses $n-1$ premières dérivées. Considérons, en effet, l'intégrale double

$$\int\!\!\int dx\,dy\,\mathrm{F}(x,y)\,\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m\,dy^n},$$

avec la condition

$$x^2+y^2 \leqq 1,$$

et commençons par rapport à la variable y l'intégration qui devra être faite entre les limites $-\sqrt{1-x^2}$, $+\sqrt{1-x^2}$. On aura

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy\,\mathrm{F}(x,y)\,\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m\,dy^n}$$
$$= (-1)^n \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy\,\frac{d^n\mathrm{F}(x,y)}{dy^n}\,\frac{d^m(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m},$$

de sorte qu'on peut écrire

$$\int\!\!\int dx\,dy\,\mathrm{F}(x,y)\,\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m\,dy^n}$$
$$= (-1)^n \int\!\!\int dx\,dy\,\frac{d^n\mathrm{F}}{dx\,dy}\,\frac{d^m(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m}.$$

Opérant en second lieu sur la variable x, comme on l'a fait sur y, on aura

$$\int\!\!\int dx\,dy\,\mathrm{F}(x,y)\,\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m\,dy^n}$$
$$= (-1)^{m+n} \int\!\!\int dx\,dy\,\frac{d^{m+n}\mathrm{F}(x,y)}{dx^m\,dy^n}\,(x^2+y^2-1)^{m+n},$$

et la proposition annoncée s'ensuit en prenant

$$F(x, y) = U_{\mu,\nu},$$

et supposant $\mu + \nu < m + n$, ce qui annule évidemment le second membre. Il en résulte, comme on le montre aisément, que le polynome $U_{m,n}$ est une fonction linéaire des divers polynomes $V_{m+n,0}$, $V_{m+n-1,1}$, $\ldots$, $V_{0,m+n}$, de degré $m+n$.

Considérons en second lieu le terme général du développement de la fonction quelconque $F(x, y)$ sous la forme

$$F(x, y) = \sum A_{m,n} V_{m,n},$$

savoir :

$$\frac{\pi}{m+n+1} \, \frac{m+1 \,.\, m+2 \ldots m+n}{1 \,.\, 2 \ldots n} A_{m,n} = \int\!\!\int dx\, dy\, F(x, y) U_{m,n}.$$

En appliquant la même formule au second membre, on en déduira

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{m+n+1} \, 1 \,.\, 2 \ldots m+n \,.\, 2^{m+n} A_{m,n} \\
&\quad = (-1)^{m+n} \int\!\!\int dx\, dy \frac{d^{m+n} F(x, y)}{dx^m\, dy^n} (x^2 + y^2 - 1)^{m+n} \\
&\quad = \int\!\!\int dx\, dy \frac{d^{m+n} F(x, y)}{dx^m\, dy^n} (1 - x^2 - y^2)^{m+n},
\end{aligned}$$

ce qui introduit sous les signes d'intégration les puissances d'un facteur moindre que l'unité, et qui sont d'autant plus petites que les indices m et n sont plus grands. Comme on trouve aisément d'ailleurs

$$\int\!\!\int dx\, dy (1 - x^2 - y^2)^{m+n} = \frac{\pi}{m+n+1},$$

on aura, si l'on appelle $\rho_{m,n}$ le maximum de l'expression $\frac{d^{m+n} F(x, y)}{dx^m\, dy^n}$ sous la condition $x^2 + y^2 \leqq 1$, cette limite supérieure fort simple de $A_{m,n}$, savoir

$$A_{m,n} < \frac{\rho_{m,n}}{1 \,.\, 2 \ldots m+n \,.\, 2^{m+n}}.$$

En supposant donc que $\frac{\rho_{m,n}}{1 \,.\, 2 \ldots m+n}$ ne dépasse jamais une

certaine constante k, les termes du développement considéré $\sum A_{m,n} V_{m,n}$ ne dépasseront pas non plus ceux de la série suivante

$$k \sum \frac{1}{2^{m+n}} V_{m,n},$$

représentant la fonction

$$k(1 - 2ax - by + a^2 + b^2)^{-1},$$

dans l'hypothèse

$$a = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{1}{2}.$$

Mais d'autres propriétés du polynome $U_{m,n}$ vont encore nous montrer, et indépendamment de la transformation précédente, que la valeur de $A_{m,n}$ diminue quand les indices augmentent.

VI.

On sait que la fonction X_n de Legendre reste, quel que soit n, numériquement moindre que l'unité lorsqu'on fait varier x de -1 à $+1$, et que l'équation $X_n = 0$ admet entre ces mêmes limites n racines réelles et inégales. Par conséquent, dans l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} F(x) X_n\, dx,$$

$F(x)$ se trouve multiplié par un facteur qui change $n+1$ fois de signe entre les limites et sans dépasser l'unité. Or, aux infiniment petits près du second ordre, une fonction prend des valeurs égales et de signes contraires avant et après son passage par zéro, la fonction $F(x)$ variant alors infiniment peu, on voit que le facteur X_n a pour effet d'amener dans le voisinage de ses racines des éléments de l'intégrale infiniment peu différents et de signes contraires, d'où résulte que l'intégrale diminue de valeur quand le nombre de ces racines augmente. Des considérations semblables s'appliquent à l'intégrale double

$$\int\!\!\int dx\, dy\, F(x, y) U_{m,n},$$

dont les limites sont déterminées par la condition

$$x^2+y^2 \leqq 1,$$

et reposent sur les propriétés suivantes du polynome $U_{m,n}$.

Supposons que les variables x et y représentent des coordonnées rectangulaires, la courbe donnée par l'équation $U_{m,n}=0$, abstraction faite du facteur x ou y, suivant les cas, sera toute comprise dans l'intérieur du cercle $x^2+y^2=1$; de plus, elle sera rencontrée en m points par une parallèle à l'axe des abscisses, et en n points par une parallèle à l'axe des ordonnées. Ce sont les changements de signe du facteur $U_{m,n}$, résultant de ces intersections, qui amèneront dans les intégrations relatives à x ou à y les mêmes conséquences et la même conclusion que précédemment [1].

Le premier point résulte d'une forme de développement de l'expression

$$[1-2ax-2by+a^2(1-y^2)+2abxy+b^2(1-x^2)]^{-\frac{1}{2}},$$

qui s'obtient de la manière suivante. Soit pour un instant

$$u=\frac{1}{1-ax-by};$$

elle pourra s'écrire ainsi

$$u[1-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)u^2]^{-\frac{1}{2}},$$

ce qui donnera la série

$$u+\frac{1}{2}(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)u^3+\frac{1.3}{2.4}(a^2+b^2)^2(x^2+y^2-1)^2u^5+\ldots$$
$$+\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}(a^2+b^2)^n(x^2+y^2-1)^n u^{2n+1}+\ldots.$$

Faisant encore

$$ax+by=z,$$

[1] Je dois faire remarquer toutefois une différence en ce qui concerne le maximum de $U_{m,n}$ égal à l'unité lorsque l'un des indices est supposé nul, et dont l'expression générale est

$$\frac{1.2\ldots m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}\left(\frac{m}{m+n}\right)^{\frac{1}{2}m}\left(\frac{n}{m+n}\right)^{\frac{1}{2}n}.$$

de manière à avoir

$$u=\frac{1}{1-z},$$

et, par suite,

$$\frac{du}{dz}=\frac{1}{(1-z)^2}, \quad \frac{d^2u}{dz^2}=\frac{1.2}{(1-z)^3}, \quad \ldots, \quad \frac{d^nu}{dz^n}=\frac{1.2\ldots n}{(1-z)^{n+1}},$$

ou bien

$$\frac{du}{dz}=u^2, \quad \frac{d^2u}{dz^2}=1.2u^3, \quad \ldots, \quad \frac{d^nu}{dz^n}=1.2\ldots n.u^{n+1};$$

en remplaçant les puissances de u par les dérivées, cette série deviendra

$$u+\frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dz^2}\frac{1}{2}(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)$$
$$+\frac{1}{1.2.3.4}\frac{d^4u}{dz^4}\frac{1.3}{2.4}(a^2+b^2)^2(x^2+y^2-1)^2+\ldots.$$

Cela posé, nous en déduirons l'ensemble homogène des termes de degré k en a et b, en développant, suivant les puissances de z, la quantité

$$u=\frac{1}{1-z}=\sum z^n,$$

ainsi que ses dérivées

$$\frac{du}{dz}=\sum nz^{n-1}, \quad \frac{d^2u}{dz^2}=\sum n(n-1)z^{n-2}, \quad \ldots.$$

Par là on obtiendra cette expression dont la loi est manifeste :

$$z^k+\frac{k(k-1)}{1.2}\frac{1}{2}(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)z^{k-2}$$
$$+\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3.4}\frac{1.3}{2.4}(a^2+b^2)^2(x^2+y^2-1)^2z^{k-4}+\ldots.$$

De sorte qu'en mettant au lieu de z sa valeur $ax+by$, on sera conduit à la relation suivante

$$a^kU_{k,0}+a^{k-1}bU_{k-1,1}+\ldots+ab^{k-1}U_{1,k-1}+b^kU_{0,k}$$
$$=(ax+by)^k+\frac{k(k-1)}{1.2}\frac{1}{2}(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)(ax+by)^{k-2}$$
$$+\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3.4}\frac{1.3}{2.4}(a^2+b^2)^2(x^2+y^2-1)^2(ax+by)^{k-4}+\ldots.$$

Elle met immédiatement ce fait en évidence, que pour des valeurs positives des coordonnées, rendant positive la fonction x^2+y^2-1, toutes les quantités $U_{k,0}$, $U_{k-1,1}$, $\ldots$, $U_{1,k-1}$, $U_{0,k}$ seront également positives. Or $U_{m,n}$, suivant ces quatre cas, savoir:

$$\left.\begin{matrix} m\equiv 0 & m\equiv 1 & m\equiv 0 & m\equiv 1 \\ n\equiv 0 & n\equiv 0 & n\equiv 1 & n\equiv 1 \end{matrix}\right\}\pmod 2,$$

ayant pour expression

$$F(x^2, y^2),\quad x\,F(x^2, y^2),\quad y\,F(x^2, y^2),\quad xy\,F(x^2, y^2),$$

ne pourra par conséquent jamais s'annuler, quel que soit le signe des coordonnées, abstraction faite du facteur x ou y, qu'en supposant $x^2+y^2-1<0$, ce qui démontre notre proposition.

Pour en donner un exemple, considérons la courbe $U_{m,0}=0$; on vérifiera aisément qu'elle est composée, suivant que m est pair ou impair, de $\frac{m}{2}$ ou $\frac{m-1}{2}$ ellipses ayant pour équations $\frac{x^2}{\rho^2}+y^2=1$, où ρ est une des racines du polynome X_m de Legendre. Ces racines étant moindres que l'unité, les diverses ellipses sont bien effectivement comprises dans le cercle

$$x^2+y^2=1.$$

Démontrons en dernier lieu qu'une parallèle à l'axe des y, par exemple, rencontre en n points la courbe $U_{m,n}=0$, et remarquons à cet effet qu'on peut poser

$$\frac{d^m(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m}=(x^2+y^2-1)^n Z,$$

en désignant par Z une fonction entière en x et y. Il en résultera

$$U_{m,n}=\frac{1}{1.2\ldots m.1.2\ldots n.2^{m+n}}\,\frac{d^n(x^2+y^2-1)^n Z}{dy^n},$$

et sous cette forme le théorème de Rolle suffit pour montrer que, par rapport à y, l'équation $U_{m,n}=0$ admet n racines réelles comprises entre les limites $-\sqrt{1-x^2}$, $+\sqrt{1-x^2}$. Notre courbe est donc effectivement rencontrée en n points par l'une quelconque des ordonnées du cercle $x^2+y^2=1$.

La même démonstration s'appliquera d'ailleurs à une parallèle à l'axe des x.

VII.

Nous avons cherché à montrer, dans ce qui précède, l'analogie des polynomes à deux variables $U_{m,n}$ avec les fonctions de Legendre, et sous ce point de vue le fait le plus caractéristique s'est trouvé dans la relation

$$U_{m,n}=\frac{1}{1.2\ldots m.1.2\ldots n.2^{m+n}}\,\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m\,dy^n},$$

si semblable à l'expression donnée par Jacobi,

$$X_n=\frac{1}{1.2\ldots n.2^n}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Maintenant nous devons considérer les fonctions ayant pour origine le développement des quantités

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}[1-2ax-2by+a^2(1-y^2)+2abxy+b^2(1-x^2)]^{-1},$$

et que nous définirons ainsi

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum a^m b^n \vartheta_{m,n},$$

$$\begin{aligned}(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}&[1-2ax-2by+a^2(1-y^2)\\ &+2abxy+b^2(1-x^2)]^{-1}=\sum a^m b^n \mho_{m,n}.\end{aligned}$$

L'équation suivante, que nous établirons bientôt,

$$\mho_{m,n}=\frac{1.2\ldots m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}\,\frac{(-1)^{m+n}(m+n+1)}{1.3.5\ldots 2(m+n)+1}\,\frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n},$$

rapproche par la similitude de forme analytique ces fonctions de deux variables des expressions qui donnent le sinus du multiple d'un arc au moyen du cosinus de cet arc. C'est ce que rend manifeste ce beau résultat dû encore à Jacobi, savoir :

$$\sin[(n+1)\arccos x]=\frac{(-1)^n(n+1)}{1.3.5\ldots 2n+1}\,\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n}.$$

Nous aurons d'ailleurs pour $\mathcal{V}_{m,n}$ et $\mathcal{U}_{m,n}$ des propriétés entièrement semblables aux précédentes, et, comme elles s'établissent de la même manière, il suffira d'indiquer rapidement les plus importantes.

Voici en premier lieu leurs valeurs dans les cas les plus simples

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{V}_{0,0} = 1, & \mathcal{V}_{1,2} = \frac{15}{2}(7xy^2 - x), \\
\mathcal{V}_{1,0} = 3x, & \mathcal{V}_{0,3} = \frac{3}{2}(7y^3 - 3y), \\
\mathcal{V}_{0,1} = 3y, & \mathcal{V}_{4,0} = \frac{15}{8}(21x^4 - 14x^2 + 1), \\
\mathcal{V}_{2,0} = \frac{3}{2}(5x^2 - 1), & \mathcal{V}_{3,1} = \frac{105}{2}(3x^3y - xy), \\
\mathcal{V}_{1,1} = 15xy, & \mathcal{V}_{2,2} = \frac{15}{4}(63x^2y^2 - 7x^2 - 7y^2 + 1), \\
\mathcal{V}_{0,2} = \frac{3}{2}(5y^2 - 1), & \mathcal{V}_{1,3} = \frac{105}{2}(3xy^3 - xy), \\
\mathcal{V}_{3,0} = \frac{5}{2}(7x^3 - 3x), & \mathcal{V}_{0,4} = \frac{15}{8}(21y^4 - 14y^2 + 1), \\
\mathcal{V}_{2,1} = \frac{15}{2}(7x^2y - y), & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

et en posant, pour abréger,

$$\rho = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{U}_{0,0} = \rho, & \mathcal{U}_{1,2} = 4\rho(4xy^2 + x^3 - x), \\
\mathcal{U}_{1,0} = 2\rho x, & \mathcal{U}_{0,3} = 4\rho(2y^3 + x^2y - y), \\
\mathcal{U}_{0,1} = 2\rho y, & \mathcal{U}_{4,0} = \rho(16x^4 + 12x^2y^2 + y^4 - 12x^2 - 2y^2 + 1), \\
\mathcal{U}_{2,0} = \rho(4x^2 + y^2 - 1), & \mathcal{U}_{3,1} = 20\rho(2x^3y + xy^3 - xy), \\
\mathcal{U}_{1,1} = 6\rho xy, & \mathcal{U}_{2,2} = 2\rho(6x^4 + 27x^2y^2 + 6y^4 - 7x^2 - 7y^2 + 1), \\
\mathcal{U}_{0,2} = \rho(4y^2 + x^2 - 1), & \mathcal{U}_{1,3} = 20\rho(2xy^3 + x^3y - xy), \\
\mathcal{U}_{3,0} = 4\rho(2x^3 + xy^2 - x), & \mathcal{U}_{0,4} = \rho(16y^4 + 12x^2y^2 + x^4 - 12y^2 - 2x^2 + 1), \\
\mathcal{U}_{2,1} = 4\rho(4x^2y + y^3 - y), & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Cela posé, les intégrations étant toujours entre les limites déterminées par la condition

$$x^2 + y^2 \leqq 1,$$

on aura

$$\int\int dx\,dy\,\mathcal{V}_{m,n}\mathcal{V}_{\mu,\nu} = 0, \qquad \int\int dx\,dy\,\mathcal{U}_{m,n}\mathcal{U}_{\mu,\nu} = 0;$$

si les degrés $m + n$ et $\mu + \nu$ sont différents, et en outre,

$$\int\int dx\,dy\,\mathcal{V}_{m,n}\mathcal{U}_{\mu,\nu} = 0,$$

lorsque les indices m et μ, n et ν ne sont pas égaux à la fois. Dans le cas contraire, on obtient

$$\int\int dx\,dy\,\mathcal{V}_{m,n}\mathcal{U}_{m,n} = \pi\left(1 - \frac{1}{2m + 2n + 3}\right)\frac{n+1.n+2\ldots n+m}{1.2\ldots m}.$$

Ce dernier point résulte de la considération d'une intégrale double analogue à celles qui ont été précédemment désignées par A et B, savoir :

$$\begin{aligned}
C = \int\int dx\,dy\,&(1 - 2a'x - 2b'y + a'^2 + b'^2)^{-\frac{3}{2}}(1 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\times[1 - 2ax - 2by + a^2(1 - y^2) + 2abxy + b^2(1 - x^2)]^{-1}.
\end{aligned}$$

Nous allons en donner la détermination.

VIII.

Soit, pour abréger,

$$r^2 = a^2 + b^2,$$
$$r'^2 = a'^2 + b'^2.$$

En posant

$$x = \frac{a'\xi + b'\eta}{r'}, \qquad y = \frac{b'\xi - a'\eta}{r'},$$

et introduisant les quantités suivantes

$$\frac{aa' + bb'}{rr'} = \cos\theta, \qquad \frac{ab' - ba'}{rr'} = \sin\theta,$$

nous obtiendrons une transformée en ξ et η, que nous écrirons ainsi

$$\begin{aligned}
C = \int\int d\xi\,d\eta\,&(1 - 2r'\xi + r'^2)^{-\frac{3}{2}}(1 - \xi^2 - \eta^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\times[(1 - r\cos\theta\xi - r\sin\theta\eta)^2 - r^2(\xi^2 + \eta^2 - 1)]^{-1}.
\end{aligned}$$

Ce résultat conduit à intégrer en premier lieu par rapport à η, c'est-à-dire à l'expression

$$\int d\eta(1-\xi^2-\eta^2)^{\frac{1}{2}}[(1-r\cos\theta\xi-r\sin\theta\eta)^2-r^2(\xi^2+\eta^2-1)]^{-1},$$

qu'on peut décomposer de cette manière

$$-\frac{1}{2ir}\int d\eta\left(1-r\cos\theta\xi-r\sin\theta\eta-r\sqrt{\xi^2+\eta^2-1}\right)^{-1}$$
$$+\frac{1}{2ir}\int d\eta\left(1-r\cos\theta\xi-r\sin\theta\eta+r\sqrt{\xi^2+\eta^2-1}\right)^{-1}.$$

En faisant

$$\eta=\sqrt{1-\xi^2}\cos\varphi,$$

on devra, d'après les limites de η, faire croître l'angle φ de zéro à π, et, si l'on pose

$$L=1-r\cos\theta\xi,$$
$$M=r\sin\theta\sqrt{1-\xi^2},$$
$$N=r\sqrt{1-\xi^2},$$

ces intégrales deviendront

$$-\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2ir}\int_0^\pi\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{L-M\cos\varphi-iN\sin\varphi}+\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2ir}\int_0^\pi\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{L-M\cos\varphi+iN\sin\varphi},$$

ce qui peut être évidemment réduit à l'intégrale unique

$$-\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2ir}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{L-M\cos\varphi-iN\sin\varphi}.$$

Introduisant en dernier lieu la variable $e^{i\varphi}=z$, nous serons conduit à intégrer, le long d'un cercle ayant son centre à l'origine et son rayon égal à l'unité, la fraction rationnelle

$$\frac{1-z^2}{z[2Lz-M(z^2+1)-N(z^2-1)]},$$

dont il n'y a plus dès lors qu'à déterminer les résidus.

A cet effet, nous supposerons r et r' moindres que l'unité, restriction permise, puisque l'intégrale doit être développée suivant les puissances ascendantes des quantités a, b, a', b'. Sous cette condition, l'équation

$$2Lz-M(z^2+1)-N(z^2-1)=0$$

admet une racine inférieure à l'unité, car le premier membre prend pour $z=1$ la valeur positive

$$2L-2M=2\left(1-r\cos\theta\xi-r\sin\theta\sqrt{1-\xi^2}\right),$$

et pour $z=-1$ la valeur négative

$$-2L-2M=-2\left(1-r\cos\theta\xi+r\sin\theta\sqrt{1-\xi^2}\right).$$

Or, le résidu de la fraction proposée, relatif à cette racine, a pour expression

$$-\frac{1}{r\cos^2\theta\sqrt{1-\xi^2}}\left(\sin\theta+\frac{1-r\cos\theta\xi}{\sqrt{1-2r\cos\theta\xi+r^2\cos^2\theta}}\right);$$

en l'ajoutant au résidu relatif à la racine $z=0$, savoir :

$$\frac{1}{r(1-\sin\theta)\sqrt{1-\xi^2}},$$

on trouve l'intégrale de la fraction rationnelle

$$\int\frac{(1-z^2)\,dz}{z[2Lz-M(z^2+1)-N(z^2-1)]}$$
$$=\frac{2i\pi}{r\cos^2\theta\sqrt{1-\xi^2}}\left(1-\frac{1-r\cos\theta\xi}{\sqrt{1-2r\cos\theta\xi+r^2\cos^2\theta}}\right),$$

et par conséquent

$$\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2ir}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{L-M\cos\varphi-iN\sin\varphi}$$
$$=\frac{\pi}{r^2\cos^2\theta}\left(1-\frac{1-r\cos\theta\xi}{\sqrt{1-2r\cos\theta\xi+r^2\cos^2\theta}}\right),$$

ce qui réduit l'intégrale double proposée à

$$C=\frac{-\pi}{r^2\cos^2\theta}\int_{-1}^{+1}\frac{d\xi}{(1-2r'\xi+r'^2)^{\frac{3}{2}}}\left(1-\frac{1-r\cos\theta\xi}{\sqrt{1-2r\cos\theta\xi+r^2\cos^2\theta}}\right).$$

Maintenant le calcul s'achève par les procédés élémentaires, et l'on obtient

$$C=\frac{-\pi}{rr'\cos\theta}\left(\frac{1}{1-rr'\cos\theta}-\frac{1}{2\sqrt{rr'\cos\theta}}\log\frac{1+\sqrt{rr'\cos\theta}}{1-\sqrt{rr'\cos\theta}}\right),$$

de sorte qu'il vient en définitive, en remplaçant $rr'\cos\theta$ par sa valeur,

$$C = \frac{-\pi}{aa'+bb'}\left(\frac{1}{1-aa'-bb'} - \frac{1}{2\sqrt{aa'+bb'}}\log\frac{1+\sqrt{aa'+bb'}}{1-\sqrt{aa'+bb'}}\right),$$

et l'on en conclut immédiatement la proposition énoncée sur l'intégrale

$$\int\int dx\,dy\,\vartheta_{m,n}\,\mho_{\mu,\nu},$$

prise entre les limites déterminées par la condition $x^2+y^2 \leqq 1$.

IX.

Nous allons considérer maintenant le développement suivant les puissances ascendantes de a et b de la fonction

$$\begin{aligned}(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}[1-2ax-2by+a^2(1-y^2)\\ +2abxy+b^2(1-x^2)]^{-1} = \sum a^m b^n \mho_{m,n},\end{aligned}$$

afin d'établir l'expression déjà donnée du polynome $\mho_{m,n}$.

Soit à cet effet

$$\begin{aligned}P &= ax+by+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}(x^2+y^2-1)^{\frac{1}{2}},\\ Q &= ax+by-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}(x^2+y^2-1)^{\frac{1}{2}};\end{aligned}$$

on voit aisément que l'on pourra écrire

$$\begin{aligned}&(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}[1-2ax-2by+a^2(1-y^2)+2abxy+b^2(1-x^2)]^{-1}\\ &\quad = \frac{1}{2i\sqrt{a^2+b^2}}[(1-P)^{-1}-(1-Q)^{-1}],\end{aligned}$$

de sorte que l'ensemble homogène des termes de degré k dans ce développement sera

$$\frac{P^{k+1}-Q^{k+1}}{2i\sqrt{a^2+b^2}},$$

et voici comment on parvient à leur expression.

Revenons à la formule

$$\frac{\Phi(x+az,\,y+bz)}{\mathfrak{F}'(z)} = \sum \frac{a^m b^n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}\,\frac{d^{m+n}F^{m+n}\Phi}{dx^m\,dy^n},$$

où z est une racine de l'équation

$$\mathfrak{F}(z) = z - F(x+az,\,y+bz) = 0,$$

en y changeant, comme plus haut, a et b en $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$. Si l'on prend

$$F(x,y) = x^2+y^2-1,$$

$$\Phi(x,y) = (x^2+y^2-1)^{\frac{1}{2}},$$

on retrouvera d'abord la même équation en z, savoir :

$$\frac{1}{4}Gz^2 - Hz + K = 0,$$

en faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned}G &= a^2+b^2,\\ H &= 1-ax-by,\\ K &= x^2+y^2-1.\end{aligned}$$

Nous en tirerons

$$z = 2\,\frac{H-\sqrt{H^2-GK}}{G},$$

de sorte qu'ayant évidemment

$$\Phi\left(x+\frac{az}{2},\,y+\frac{bz}{2}\right) = \sqrt{z},$$

on en conclura par un calcul facile

$$\begin{aligned}&\frac{\Phi\left(x+\frac{az}{2},\,y+\frac{bz}{2}\right)}{\mathfrak{F}'(z)}\\ &\quad = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{H^2-GK}} = \frac{1}{\sqrt{G}}\left[(H-\sqrt{GK})^{-\frac{1}{2}} - (H+\sqrt{GK})^{-\frac{1}{2}}\right].\end{aligned}$$

Mais, d'après les valeurs de G, H, K, cette expression est précisément

$$\frac{(1-P)^{-\frac{1}{2}}-(1-Q)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

et l'ensemble homogène des termes de degré k en a et b sera donné par le développement des puissances fractionnaires sous cette forme

$$\frac{1.3.5\ldots 2k+1}{2.4.6\ldots 2k+2}\,\frac{P^{k+1}-Q^{k+1}}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

de sorte qu'en posant $k=m+n$, on a

$$\frac{1.3.5\ldots 2k+1}{2.4.6\ldots 2k+2}\,\frac{P^{k+1}-Q^{k+1}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$=\sum\frac{a^m b^n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n.2^{m+n}}\,\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n},$$

et, par conséquent, ce résultat auquel nous voulions parvenir,

$$\frac{P^{k+1}-Q^{k+1}}{2i\sqrt{a^2+b^2}}=\sum\frac{n+1.n+2\ldots n+m}{1.2\ldots n}$$
$$\times\frac{(m+n+1)(-1)^{m+n}a^m b^n}{1.3.5\ldots 2(m+n)+1}\,\frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n}.$$

On en tire, pour le coefficient de $a^m b^n$ dans le développement de la fonction proposée, l'expression du polynome $\mathcal{U}_{m,n}$ qu'il s'agissait de démontrer, savoir :

$$\mathcal{U}_{m,n}=\frac{n+1.n+2\ldots n+m}{1.2\ldots n}$$
$$\times\frac{(m+n+1)(-1)^{m+n}}{1.3\ 5\ldots 2(m+n)+1}\,\frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n}.$$

En partant maintenant de cette expression et considérant le développement d'une fonction quelconque sous la forme

$$F(x,y)=\sum A_{m,n}\mathcal{V}_{m,n},$$

on obtiendra évidemment à l'égard de l'intégrale

$$\int\!\!\int dx\,dy\,F(x,y)\,\mathcal{U}_{m,n},$$

prise entre les limites

$$x^2+y^2\leqq 1,$$

ainsi que sur les propriétés de la courbe $\mathcal{U}_{m,n}=0$, les mêmes conséquences que précédemment; je ne m'y arrêterai pas, pour abréger, et je terminerai par une dernière remarque sur les polynomes $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$.

X.

Les dérivées des divers ordres de l'exponentielle $e^{-\varphi(x,y,z,\ldots)}$, dans laquelle $\varphi(x,y,z,\ldots)$ désigne une forme quadratique, conduisent, comme on l'a vu, à un mode de développement d'une fonction quelconque, où les variables peuvent recevoir toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. Or, un pareil mode de développement peut être obtenu comme conséquence de ces formules

$$F(x,y)=\sum A_{m,n}V_{m,n}=\sum B_{m,n}U_{m,n},$$

et de celles où l'on emploie $\mathcal{V}_{m,n}$ et $\mathcal{U}_{m,n}$, et en supposant x et y limités par la condition

$$x^2+y^2\leqq 1.$$

Considérons en effet la substitution

$$x=\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}},\qquad y=\frac{\eta}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}};$$

on en déduit

$$1-x^2-y^2=\frac{1}{1+\xi^2+\eta^2},$$

d'où résulte que les nouvelles variables pourront s'étendre de $-\infty$ à $+\infty$, et l'on est amené par là à rechercher ce que deviennent en fonction de ξ et η les polynomes $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$. Si l'on fait

$$U_{m,n}=R_{m,n}(1+\xi^2+\eta^2)^{-\frac{m+n}{2}},$$
$$V_{m,n}=S_{m,n}(1+\xi^2+\eta^2)^{-\frac{m+n}{2}},$$

on voit tout d'abord que les quantités $R_{m,n}$, $S_{m,n}$ sont rationnelles, entières et du degré $m+n$ en ξ et η; ainsi on aura

$$\begin{array}{ll}
R_{0,0}=1, & R_{3,0}=\frac{1}{2}(2\xi^3-3\xi), \\
R_{1,0}=\xi, & R_{2,1}=\frac{3}{2}(2\xi^2\eta-\eta), \\
R_{0,1}=\eta, & R_{1,2}=\frac{3}{2}(2\eta^2\xi-\xi), \\
R_{2,0}=\frac{1}{2}(2\xi^2-1), & R_{0,3}=\frac{1}{2}(2\eta^3-3\eta), \\
R_{1,1}=2\xi\eta, & R_{4,0}=\frac{1}{8}(8\xi^4-24\xi^2+3), \\
R_{0,2}=\frac{1}{2}(2\eta^2-1), & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
S_{0,0}=1, & S_{3,0}=4(\xi^3-\eta^2\xi-\xi), \\
S_{1,0}=2\xi, & S_{2,1}=4(5\xi^2\eta-\eta^3-\eta), \\
S_{0,1}=2\eta, & S_{1,2}=4(5\eta^2\xi-\xi^3-\xi), \\
S_{2,0}=3\xi^2-\eta^2-1, & S_{0,3}=4(\eta^3-\xi\eta^2-\eta), \\
S_{1,1}=8\xi\eta, & S_{4,0}=5\xi^4-10\xi^2\eta^2+\eta^4-10\xi^2+2\eta^2+1, \\
S_{0,2}=3\eta^2-\xi^2-1, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Mais, pour en reconnaître la nature, revenons aux équations de définition

$$[1-2ax-2by+a^2(1-y^2)+2abxy+b^2(1-x^2)]^{-\frac{1}{2}}=\sum a^m b^n U_{m,n},$$

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1}=\sum a^m b^n V_{m,n}.$$

En posant dans la première

$$x=\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}, \qquad y=\frac{\eta}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}},$$
$$a=\alpha\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}, \qquad b=\beta\sqrt{1+\xi^2+\eta^2},$$

elle prendra cette forme

$$[1-2\alpha\xi-2\beta\eta+\alpha^2(\xi^2+1)+2\alpha\beta\xi\eta+\beta^2(\eta^2+1)]^{-\frac{1}{2}}=\sum \alpha^m\beta^n R_{m,n};$$

par conséquent, $R_{m,n}$, comme on le reconnaît aisément, ne contient que le seul terme $\xi^m\eta^n$ du degré $m+n$; c'est la propriété caractéristique de $V_{m,n}$ qui a été transportée ainsi par le changement de variables au polynome $U_{m,n}$.

Faisons dans la seconde équation

$$x=\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}, \qquad y=\frac{\eta}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}},$$
$$a=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}, \qquad b=\frac{\beta}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}};$$

elle deviendra

$$(1+\xi^2+\eta^2)[1+(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2]^{-1}=\sum \alpha^m\beta^n S_{m,n}(1+\xi^2+\eta^2)^{-(m+n)},$$

et l'on en conclut cette expression qui nous rapproche de la forme analytique de $U_{m,n}$, savoir :

$$S_{m,n}=(-1)^{m+n}\frac{(1+\zeta^2+\eta^2)^{m+n+1}}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}\frac{d^{m+n}(1+\xi^2+\eta^2)^{-1}}{d\xi^m\,d\eta^n}.$$

En posant

$$\mathcal{V}_{m,n}=\mathcal{S}_{m,n}(1+\xi^2+\eta^2)^{-\frac{m+n}{2}},$$

on obtiendra semblablement

$$\mathcal{S}_{m,n}=(-1)^{m+n}\frac{(1+\xi^2+\eta^2)^{m+n+\frac{3}{2}}}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}\frac{d^{m+n}(1+\xi^2+\eta^2)^{-\frac{3}{2}}}{d\xi^m\,d\eta^n}.$$

A l'aide de cette forme, en raisonnant comme je l'ai fait précédemment, on établit que les équations

$$S_{m,n}=0, \qquad \mathcal{S}_{m,n}=0$$

admettent toujours m racines réelles considérées par rapport à ξ et n racines réelles par rapport à η. Sous la condition $\xi>\cot\frac{\pi}{n+1}$, l'équation $S_{m,n}=0$ a même toutes ses racines réelles par rapport à η [1]. Mais je ne m'arrêterai pas à l'étude des polynomes $R_{m,n}$, $S_{m,n}$, ayant voulu seulement indiquer encore un exemple du genre d'expression donné par Jacobi aux fonctions de Legendre. C'est en 1826, dans le second volume du *Journal de Crelle*, que ce grand géomètre a établi la relation

$$X_n=\frac{1}{1.2\ldots n.2^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

(1) Cette affirmation ne paraît pas exacte, comme le montre le cas particulier de $m=2$, $n=1$.

E. P.

Mais bien avant, et dès 1815, un homme du mérite le plus distingué et dont la mémoire est restée chère à ses nombreux amis, M. Olinde Rodrigues, y était parvenu dans une thèse, *Sur l'attraction des sphéroïdes,* présentée à la Faculté des Sciences de Paris. Cette thèse contient encore la relation remarquable

$$\frac{1}{1.2\ldots m-p}\,\frac{d^{m-p}(x^2-1)^m}{dx^{m-p}} = \frac{(x^2-1)^p}{1.2\ldots m+p}\,\frac{d^{m+p}(x^2-1)^m}{dx^{m+p}},$$

donnée également par Jacobi dans le même Mémoire, et qui joue un rôle important dans la théorie des fonctions Y_n. A l'égard des polynomes $U_{m,n}$ la propriété analogue n'a pas une forme aussi simple. On l'obtiendrait en partant de l'équation suivante, facile à démontrer,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1.2\ldots n-p.1.2\ldots m-q}\,\frac{d^{m+n-p-q}(xy-1)^{m+n}}{dx^{n-p}\,dy^{m-q}}\\ &\quad= \frac{(xy-1)^{p+q}}{1.2\ldots m+p.1.2\ldots n+q}\,\frac{d^{m+n+p+q}(xy-1)^{m+n}}{dx^{m+q}\,dy^{n+q}},\end{aligned}$$

et remplaçant les quantités x et y par $x+y\sqrt{-1}$, $x-y\sqrt{-1}$; mais ce changement de variables donnerait un résultat un peu compliqué, et je ne m'y arrêterai pas.

SUR

L'ÉQUATION DU CINQUIÈME DEGRÉ.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LXI, 1865 (II), p. 877, 965 et 1073; t. LXII, 1866 (I), p. 65, 157, 245, 715, 919, 959, 1054, 1161 et 1213.

La théorie des fonctions elliptiques conduit à deux méthodes pour la résolution de l'équation du cinquième degré. La première a pour fondement la possibilité de ramener l'équation proposée à la réduite

$$x^5 - x - \frac{2}{\sqrt[4]{5^5}}\,\frac{1+k^2}{k'\sqrt{k}} = 0$$

de l'équation modulaire relative à la transformation du cinquième ordre. Dans la seconde, qui est due à M. Kronecker ([1]), on prend pour point de départ certaines fonctions cycliques des racines dont les carrés ont seulement six valeurs, et que l'on représente par les quantités

$$\frac{\cos \mathrm{am}\, 2\omega}{\cos \mathrm{am}\, 4\omega} - \frac{\cos \mathrm{am}\, 4\omega}{\cos \mathrm{am}\, 2\omega},$$

ω étant successivement $\frac{K}{5}$, $\frac{iK'}{5}$, $\frac{K \pm iK'}{5}$, $\frac{2K \pm iK'}{5}$. De ces fonctions on déduit ensuite rationnellement les racines elles-mêmes, qui s'obtiennent ainsi sous forme explicite à l'aide des mêmes quantités. Ces deux méthodes ont été pour moi le sujet d'une longue

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. XLVI, année 1858, et *Journal de Crelle,* t. 59, année 1861.

étude, dont j'ai en ce moment l'honneur d'offrir à l'Académie les résultats. Je m'occuperai d'abord de la réduction à la forme trinome $x^5 - x - a = 0$ de l'équation générale du cinquième degré, et, à cette occasion, de la recherche des conditions de réalité des racines sur laquelle M. Sylvester a publié récemment un de ses plus beaux Mémoires (1). J'essayerai ensuite d'approfondir la méthode de M. Kronecker et de la rapprocher de la précédente, en prenant pour base le travail remarquable et plein d'invention dans lequel M. Brioschi en a exposé les principes (2). Cette méthode permet, en effet, de ramener l'équation générale du cinquième degré à celle-ci

$$x^5 - 10x^3 + 45x - 4\frac{(1-2k^2)(1+32k^2k'^2)}{kk'} = 0,$$

qui est la réduite de l'équation

$$z^6 + \frac{5.2^5}{k^2k'^2}z^3 - 2^8\frac{1-16k^2k'^2}{k^4k'^4}z + \frac{5.2^8}{k^4k'^4} = 0,$$

dont les racines sont les quantités $\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\operatorname{am}2\omega}{\cos\operatorname{am}4\omega} - \frac{\cos\operatorname{am}4\omega}{\cos\operatorname{am}2\omega}\right)^2$.

Mon but principal sera d'effectuer complètement le calcul de la substitution qui donne ce résultat si important, et, comme les éléments algébriques invariants et covariants des formes du cinquième degré servent de base à ce calcul, ainsi qu'à la réduction à la forme trinome, je rappellerai d'abord à cet égard les notions dont j'aurai à faire usage.

I.

Soit

$$\begin{aligned} f(x, y) = {} & \alpha x^5 + 5\beta x^4 y + 10\gamma x^3 y^2 \\ & + 10\gamma' x^2 y^3 + 5\beta' x y^4 + \alpha' y^5 = (\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \beta', \alpha')(x, y)^5 \end{aligned}$$

(1) *On the real and imaginary roots of algebraical equations: a trilogy* (*Philosophical Transactions*. Part III, 1864).

(2) *Sul methodo di Kronecker per la risoluzione della equazione di quinto grado* (*Atti dell' Instituto Lombardo*, t. I, 1858, p. 275).

la forme proposée et

$$x = mX + m'Y,$$
$$y = nX + n'Y$$

une substitution S au déterminant *un*, propre à réduire le covariant quadratique

$$(\alpha\beta' - 4\beta\gamma' + 3\gamma^2)x^2 + (\alpha\alpha' - 3\beta\beta' + 2\gamma\gamma')xy + (\alpha'\beta - 4\beta'\gamma + 3\gamma'^2)y^2$$

au monome $\sqrt{A}.XY$, où je pose, pour abréger,

$$A = (\alpha\alpha' - 3\beta\beta' + 2\gamma\gamma')^2 - 4(\alpha\beta' - 4\beta\gamma' + 3\gamma^2)(\alpha'\beta - 4\beta'\gamma + 3\gamma'^2).$$

Cette substitution n'est pas ainsi entièrement déterminée; mais on sait qu'on en aura l'expression générale en la faisant suivre de toutes celles qui reproduisent $\sqrt{A}.XY$. Celles-ci comprennent d'abord la substitution propre

$$X = \omega X',$$
$$Y = \frac{1}{\omega}Y',$$

et la substitution impropre

$$X = \omega Y',$$
$$Y = \frac{1}{\omega}X';$$

mais cette dernière doit être rejetée, si l'on veut conserver le déterminant de la substitution S égal à $+1$. Cela posé, soit pour un instant

$$f(mX + m'Y, nX + n'Y) = F(X, Y) = (a, b, c, c', b', a')(X, Y)^5,$$

de sorte que l'on ait

$$F\left(\omega X, \frac{1}{\omega}Y\right) = (a\omega^5, b\omega^3, c\omega, c'\omega^{-1}, b'\omega^{-3}, a'\omega^{-5})(X, Y)^5.$$

J'achèverai de définir entièrement la substitution en déterminant ω par la condition $c\omega = c'\omega^{-1}$; cela fait, je prendrai $F\left(\omega X, \frac{1}{\omega}Y\right)$ pour transformée *canonique* de la forme générale du cinquième degré, et en posant, pour abréger,

$$a\omega^5 = \lambda, \quad b\omega^3 = \mu, \quad c\omega = \sqrt{k}, \quad c'\omega^{-1} = \sqrt{k}, \quad b'\omega^{-3} = \mu', \quad a'\omega^{-5} = \lambda',$$

je la désignerai par $\mathfrak{F}(X, Y)$, de sorte que l'on aura

$$\mathfrak{F}(X, Y) = (\lambda, \mu, \sqrt{k}, \sqrt{k}, \mu', \lambda')(X, Y)^5.$$

Il est aisé de voir qu'on obtiendra la même forme canonique pour toutes les transformées déduites de la proposée $f(x, y)$ par une substitution quelconque Σ au déterminant *un*; car il suffira d'effectuer dans cette forme la substitution inverse Σ^{-1} qui ramènera à la proposée, et puis de la faire suivre de S, pour retrouver $\mathfrak{F}(X, Y)$, le déterminant de la substitution composée $\Sigma^{-1}S$ étant d'ailleurs égal à l'unité. Il suit de là que les coefficients de la forme canonique sont des invariants de la forme proposée, et il importe d'étudier avec soin ces coefficients.

II.

Je dis, en premier lieu, qu'ils peuvent s'exprimer en fonction des trois quantités $\lambda\lambda' = g$, $\mu\mu' = h$ et k. Effectivement le covariant quadratique de $\mathfrak{F}(X, Y)$ étant devenu $\sqrt{\Lambda}\,.\,XY$, on a les deux relations

$$\lambda\mu' - 4\mu\sqrt{k} + 3k = 0,$$
$$\lambda'\mu - 4\mu'\sqrt{k} + 3k = 0,$$

d'où l'on tire ces deux équations du second degré

$$36\sqrt{k^5}\lambda^2 - [h(g - 16k)^2 - 9k^2(g + 16k)]\lambda + 36g\sqrt{k^5} = 0,$$
$$12\sqrt{k^3}\mu^2 - (9k^2 + 16hk - gh)\mu + 12h\sqrt{k^3} = 0.$$

En les résolvant et posant, pour abréger,

$$\Delta = (9k^2 + 16hk - gh)^2 - 24^2hk^3,$$

on aura un premier système de solutions, savoir

$$72\sqrt{k^5}\lambda = h(g - 16k)^2 - 9k^2(g + 16k) + (g - 16k)\sqrt{\Delta},$$
$$24\sqrt{k^3}\mu = 9k^2 + 16hk - gh - \sqrt{\Delta},$$

et le second s'en déduira en changeant à la fois le signe de $\sqrt{\Delta}$ dans ces deux formules. Mais, d'après le produit des racines des équa-

tions en λ et μ, ce second système pourra aussi se représenter par $\frac{g}{\lambda}$, $\frac{h}{\mu}$, c'est-à-dire par λ' et μ', de sorte que l'on aura

$$72\sqrt{k^5}\lambda' = h(g - 16k)^2 - 9k^2(g + 16k) - (g - 16k)\sqrt{\Delta},$$
$$24\sqrt{k^3}\mu' = 9k^2 + 16hk - gh + \sqrt{\Delta}.$$

Voici donc, comme on l'a annoncé, les coefficients de la forme canonique

$$\mathfrak{F}(X, Y) = (\lambda, \mu, \sqrt{k}, \sqrt{k}, \mu', \lambda')(X, Y)^5$$

exprimés en g, h, k, et l'on va voir que ces quantités s'expriment elles-mêmes par les invariants de la forme proposée.

III.

Je rappellerai d'abord cette proposition : que, $\varphi(x, y)$ et $\varphi_1(x, y)$ désignant deux covariants d'une forme f, si l'on pose

$$\varphi(x, y) = a_0x^\nu + a_1x^{\nu-1}y + \ldots + a_{\nu-1}xy^{\nu-1} + a_\nu y^\nu,$$

d'où

$$\varphi(-y, x) = a_\nu x^\nu - a_{\nu-1}x^{\nu-1}y + \ldots + (-1)^{\nu-1}a_1xy^{\nu-1} + (-1)^\nu a_0y^\nu,$$

l'expression

$$\psi(x, y) = a_\nu\frac{d^\nu\varphi_1}{dx^\nu} - a_{\nu-1}\frac{d^\nu\varphi_1}{dx^{\nu-1}\,dy} + \ldots$$
$$+ (-1)^{\nu-1}a_1\frac{d^\nu\varphi_1}{dx\,dy^{\nu-1}} + (-1)^\nu a_0\frac{d^\nu\varphi_1}{dy^\nu}$$

sera encore un covariant de f, et je dirai suivant l'usage qu'il a été obtenu en *opérant* avec $\varphi(x, y)$ sur $\varphi_1(x, y)$. Cela résulte de ce qu'en faisant

$$\varphi(mX + m'Y, nX + n'Y)$$
$$= A_0X^\nu + A_1X^{\nu-1}Y + \ldots + A_{\nu-1}XY^{\nu-1} + A_\nu Y^\nu = \Phi(X, Y)$$

et

$$\varphi_1(mX + m'Y, nX + n'Y) = \Phi_1(X, Y),$$

l'expression semblable obtenue en opérant avec $\Phi(X, Y)$ sur

$\Phi_1(X, Y)$, savoir :

$$A_\nu \frac{d^\nu \Phi_1}{dX^\nu} - A_{\nu-1} \frac{d^\nu \Phi_1}{dX^{\nu-1}\, dY} + \ldots + (-1)^{\nu-1} A_1 \frac{d^\nu \Phi_1}{dX\, dY^{\nu-1}} + (-1)^\nu A_0 \frac{d^\nu \Phi_1}{dY^\nu},$$

sera

$$\psi(mX + m'Y,\ nX + n'Y)(mn' - m'n)^{\nu_1},$$

où l'exposant ν_1 du déterminant de la substitution est le degré de $\varphi_1(x, y)$. Je ferai usage de cette proposition en prenant pour $\Phi_1(X, Y)$ et $\Phi(X, Y)$ la transformée canonique de la forme du cinquième degré et son covariant quadratique, de sorte que l'on ait

$$\Phi(X, Y) = \sqrt{A}XY, \qquad \Phi_1(X, Y) = \mathfrak{F}(X, Y).$$

On obtiendra ainsi, sous sa forme canonique, un premier covariant du troisième degré (¹)

$$\sqrt{A} \frac{d^2 \mathfrak{F}}{dX\, dY} = 20\sqrt{A}(\mu, \sqrt{k}, \sqrt{k}, \mu')(X, Y)^3,$$

et, en opérant avec le carré de $\Phi(X, Y)$, ce covariant linéaire

$$A \frac{d^4 \mathfrak{F}}{dX^2\, dY^2} = 120\, A(\sqrt{k}X + \sqrt{k}Y).$$

Enfin on sait que le déterminant

$$\psi(x, y) = \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi_1}{dy} - \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d\varphi}{dy}$$

est aussi un covariant, car on a

$$(mn' - m'n)\psi(mX + m'Y,\ nX + n'Y) = \frac{d\Phi}{dX}\frac{d\Phi_1}{dY} - \frac{d\Phi_1}{dX}\frac{d\Phi}{dY}.$$

Faisant donc

$$\Phi(X, Y) = \sqrt{A}XY,$$

et prenant successivement pour Φ_1 les deux covariants auxquels on vient de parvenir, savoir :

(I) $$\sqrt{A}(\mu, \sqrt{k}, \sqrt{k}, \mu')(X, Y)^3,$$

(II) $$A(\sqrt{k}X + \sqrt{k}Y),$$

(¹) Il faudrait mettre le signe — devant le second membre. E. P.

on obtiendra les suivants (¹)

(III) $$A(3\mu, \sqrt{k}, -\sqrt{k}, -3\mu')(X, Y)^3,$$

(IV) $$A\sqrt{A}(\sqrt{k}X - \sqrt{k}Y),$$

qui sont encore du troisième et du premier degré en X et Y. Maintenant on voit qu'en opérant avec (I) sur (III), on est conduit à un invariant du huitième degré (²), $\sqrt{A^3}(\mu\mu' - k)$: je le désignerai par B. En opérant avec (II) sur (IV), on trouve un invariant du douzième degré (³), $\sqrt{A^5}k$, que je représenterai par C. On a d'ailleurs

$$\lambda\lambda' - 3\mu\mu' + 2k = \sqrt{A};$$

de sorte qu'ayant posé

$$\lambda\lambda' = g, \qquad \mu\mu' = h,$$

on peut déterminer g, h et k au moyen de l'invariant du quatrième degré A, et de ceux du huitième et du douzième degré, que l'on vient de définir, par ces relations

$$g - 3h + 2k = \sqrt{A}, \qquad h - k = \frac{B}{\sqrt{A^3}}, \qquad k = \frac{C}{\sqrt{A^5}};$$

d'où l'on tire

$$g = \frac{A^3 + 3AB + C}{\sqrt{A^5}}, \qquad h = \frac{AB + C}{\sqrt{A^5}}.$$

Enfin j'observerai qu'en opérant sur (I) avec le cube du covariant linéaire (II), on obtient un invariant du dix-huitième degré, ayant pour forme canonique $\sqrt{A^7}\sqrt{k^3}(\mu - \mu')$. Je le désignerai par K, en posant (⁴)

$$K = 12\sqrt{A^7}\sqrt{k^3}(\mu - \mu'),$$

et, d'après les valeurs précédemment données de μ et μ' en fonc-

(¹) Les expressions (III) et (IV) devraient être précédées du signe —. E. P.

(²) Un coefficient numérique 36 serait à rétablir devant l'expression qui suit. E. P.

(³) Un coefficient numérique 2 serait à rétablir devant l'expression $\sqrt{A^5}k$. E. P.

(⁴) Le coefficient numérique 12 serait à remplacer par 6 devant l'expression de l'invariant K. E. P.

tion de g, h, k, on voit que

$$K = -\sqrt{A^7}\sqrt{\Delta},$$

et, par conséquent,

$$K^2 = A^7\Delta = A^7[(9k^2 + 16hk - gh)^2 - 24^2 hk^3].$$

Or il vient, en remplaçant g, h, k par les valeurs ci-dessus,

$$K^2 = (A^2 + 3B)^2 AB^2 + 2(A^2 + 3B)(A^2 - 12B)BC + (A^2 - 72B)AC^2 - 48C^3;$$

de sorte que K^2 est une fonction entière des invariants A, B, C. Une dernière et importante proposition nous reste à établir pour terminer ce sujet, c'est que tout invariant, quel qu'il soit, peut être exprimé en fonction entière de A, B, C et K.

IV.

En désignant un invariant quelconque, fonction entière des coefficients de la forme du cinquième degré : $f = (\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \beta', \alpha')(x, y)^5$, par

$$I = \Theta(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \beta', \alpha'),$$

je remarque d'abord que, la transformée canonique

$$\mathfrak{F} = (\lambda, \mu, \sqrt{k}, \sqrt{k}, \mu', \lambda')(X, Y)^5$$

ayant été déduite de f par une substitution au déterminant *un*, on a également

$$I = \Theta(\lambda, \mu, \sqrt{k}, \sqrt{k}, \mu', \lambda'),$$

et l'on en conclut, d'après les expressions des coefficients λ, μ, ..., données précédemment,

$$I = \frac{P + Q\sqrt{\Delta}}{k^n},$$

en désignant par P et Q des fonctions entières en g, h, k. Mais distinguons entre les invariants directs et les invariants gauches, et pour cela considérons la transformée déduite de la forme canonique par la substitution impropre

$$X = Y_1,$$
$$Y = X_1,$$

savoir :

$$\mathfrak{F}_1 = (\lambda', \mu', \sqrt{k}, \sqrt{k}, \mu, \lambda)(X_1, Y_1)^5.$$

On remarque qu'elle ne diffère de $\mathfrak{F}$ que par le signe de $\sqrt{\Delta}$, de sorte que l'expression du même invariant I relative à $\mathfrak{F}_1$ sera

$$I = \frac{P - Q\sqrt{\Delta}}{k^n}.$$

Nous aurons donc, selon qu'il s'agira d'un invariant direct ou d'un invariant gauche,

$$\frac{P + Q\sqrt{\Delta}}{k^n} = \frac{P - Q\sqrt{\Delta}}{k^n},$$

ou bien

$$\frac{P + Q\sqrt{\Delta}}{k^n} = -\frac{P - Q\sqrt{\Delta}}{k^n}.$$

Ainsi, dans le premier cas, $Q = 0$ et, dans le second, $P = 0$. J'ajoute que le dénominateur k^n disparaît dans l'une et l'autre de ces expressions, qui prendront dès lors les formes plus simples P et $Q\sqrt{\Delta}$. On va voir, en effet, que, d'après la nature même de la fonction Θ, aucune de ces quantités ne peut devenir infinie pour $k = 0$; car, quel que soit ω, on peut poser

$$\Theta(\lambda, \mu, \sqrt{k}, \sqrt{k}, \mu', \lambda') = \Theta(\lambda\omega^5, \mu\omega^3, \sqrt{k}\omega, \sqrt{k}\omega^{-1}, \mu'\omega^{-3}, \lambda'\omega^{-5});$$

et, en prenant $\omega = \sqrt{k}$, nous allons reconnaître que dans ce cas le second membre est nécessairement fini. C'est ce qui résulte immédiatement des expressions

$$72\sqrt{k^5}\lambda = h(g - 16k)^2 - 9k^2(g + 16k) + (g - 16k)\sqrt{\Delta},$$
$$24\sqrt{k^3}\mu = 9k^2 + 16hk - gh - \sqrt{\Delta},$$

qui donnent, en supposant $k = 0$,

$$72\sqrt{k^5}\lambda = 2gh,$$
$$24\sqrt{k^3}\mu = -2gh.$$

Ces deux quantités étant limitées, on voit qu'il en est de même de

$$\lambda'\omega^{-5} = \frac{g}{\lambda\omega^5} \quad \text{et} \quad \mu'\omega^{-3} = \frac{h}{\mu\omega^3};$$

on serait d'ailleurs parvenu à la même conclusion, si l'on eût pris un autre signe pour le radical $\sqrt{\Delta}$ dans les expressions générales de λ et μ, car on aurait opéré de même en supposant $\omega = \frac{1}{\sqrt{k}}$, et considérant λ' et μ' au lieu de λ et μ.

Ce qui vient d'être établi fournit une première donnée sur l'expression d'un invariant quelconque des formes du cinquième degré, au moyen de ceux qui ont été définis précédemment et nommés A, B, C, K. Ayant en effet

$$g = \frac{A^3 + 3AB + C}{\sqrt{A^5}}, \qquad h = \frac{AB + C}{\sqrt{A^5}}, \qquad k = \frac{C}{\sqrt{A^5}}, \qquad \sqrt{\Delta} = -\frac{K}{\sqrt{A^7}},$$

on voit l'invariant du dix-huitième ordre figurer comme facteur dans l'expression générale $Q\sqrt{\Delta}$ des invariants gauches, tandis que A, B, C se présentent seuls dans les invariants directs. Mais, pour parvenir à notre conclusion, exprimons en A, B, C, K les coefficients de la forme canonique. En posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} L &= C^3 + \frac{3}{2}ABC^2 + \frac{1}{72}A^2[(3B + A^2)^2(C + AB) \\ &\qquad - 30AC(C + AB) - 9AC^2 - 90B^2C], \\ M &= C^2 + \frac{1}{2}ABC - \frac{1}{24}A^2(3B^2 + AC + A^2B), \\ L' &= +\frac{1}{72}[A(A^2 + 3B) - 15C]K, \\ M' &= -\frac{K}{24}, \end{aligned}$$

on trouvera

$$\lambda\sqrt{C^5} = \frac{L}{\sqrt[4]{A^5}} - L'\sqrt[4]{A}, \qquad \lambda'\sqrt{C^5} = \frac{L}{\sqrt[4]{A^5}} + L'\sqrt[4]{A},$$
$$\mu\sqrt{C^3} = \frac{M}{\sqrt[4]{A^5}} - M'\sqrt[4]{A}, \qquad \mu'\sqrt{C^3} = \frac{M}{\sqrt[4]{A^5}} + M'\sqrt[4]{A};$$

on a d'ailleurs

$$\sqrt{k} = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt[4]{A^5}}.$$

D'après cela, je fais la substitution

$$X = T\sqrt[4]{A} + \frac{U}{\sqrt[4]{A}}, \qquad Y = T\sqrt[4]{A} - \frac{U}{\sqrt[4]{A}},$$

dont le déterminant est numérique; elle donnera le résultat suivant

$$\begin{aligned} &[\lambda + \lambda' + 5(\mu + \mu') + 20\sqrt{k}]\sqrt[4]{A^5}T^5 + 5[\lambda - \lambda' + 3(\mu - \mu')]\sqrt[4]{A^3}T^4U \\ &+ 10[\lambda + \lambda' + \mu + \mu' - 4\sqrt{k}]\sqrt[4]{A}T^3U^2 + 10[\lambda - \lambda' - (\mu - \mu')]\sqrt[4]{A^{-1}}T^2U^3 \\ &+ 5[\lambda + \lambda' - 3(\mu + \mu') + 4\sqrt{k}]\sqrt[4]{A^{-3}}TU^4 + [\lambda - \lambda' - 5(\mu - \mu')]\sqrt[4]{A^{-5}}U^5, \end{aligned}$$

ou bien, d'après les valeurs de λ, μ, λ', μ',

$$\begin{aligned} &2\sqrt{C^{-5}}(L + 5MC + 10C^3)T^5 - 10\sqrt{C^{-5}}(L' + 3M'C)AT^4U \\ &+ 20\sqrt{C^{-5}}(L + MC - 2C^3)A^{-1}T^3U^2 - 20\sqrt{C^{-5}}(L' - M'C)T^2U^3 \\ &+ 10\sqrt{C^{-5}}(L - 3MC + 2C^3)A^{-2}TU^4 - 2\sqrt{C^{-5}}(L' - 5M'C)A^{-1}U^5. \end{aligned}$$

Cette transformée pourra servir, absolument comme la forme canonique, à donner l'expression générale des invariants de la forme du cinquième degré, qui seront des fonctions entières de ses coefficients. Or, on observe que A, dans les termes en T^3U^2, TU^4, U^5, disparaît comme dénominateur; d'après les valeurs de L, M, L', M', on obtient effectivement

$$\begin{aligned} &(L + MC - 2C^3)A^{-1} \\ &\quad = 2BC^2 + \frac{1}{72}A[(3B + A^2)^2(C + AB) \\ &\qquad\qquad - 30AC(C + AB) - 9AC^2 - 90B^2C] \\ &\qquad - \frac{1}{24}AC(3B^2 + AC + A^2B), \\ &(L - 3MC + 2C^3)A^{-2} \\ &\quad = \frac{1}{72}[(3B + A^2)^2(C + AB) - 30AC(C + AB) - 9AC^2 - 90B^2C] \\ &\qquad + \frac{1}{8}C(3B^2 + AC + A^2B), \\ &\qquad\qquad (L' - 5M'C)A^{-1} = +\frac{K(A^2 + 3B)}{72}. \end{aligned}$$

Tous ces coefficients sont ainsi des expressions entières en A, B, C, K, ayant pour diviseur $\sqrt{C^5}$, et par conséquent un invariant quelconque sera une fonction entière des mêmes quantités divisée par une puissance de C. Mais les considérations précédentes ayant déjà conduit aux expressions P et $Q\sqrt{\Delta}$, entières en g, h, k, on voit que ce dénominateur, représenté par une puissance de C, disparaîtra nécessairement comme facteur commun. C'est le résultat que je m'étais proposé d'établir et qui autorise à regarder A, B, C, K comme invariants fondamentaux, puisque tous les autres, quels qu'ils soient, en sont des fonctions rationnelles et entières. M'arrêtant à ce point dans la théorie algébrique des formes du cinquième degré, je reviens à mon objet principal en établissant la proposition suivante, qui sert de fondement à ma méthode, et qui montrera comment les invariants s'introduisent à titre d'éléments analytiques et jouent le principal rôle dans la résolution de l'équation du cinquième degré.

V.

Soient $f(x, y)$ une forme de degré quelconque n et $\varphi(x, y)$ un de ses covariants de degré $n-2$ en x et y; je dis que les coefficients de la transformée en z de l'équation $f(x, 1)=0$, obtenue en posant

$$z = \frac{\varphi(x, 1)}{f'_x(x, 1)},$$

sont tous des invariants de $f(x, y)$.

Avant d'exposer la démonstration, je rappellerai que l'on nomme covariant de

$$f(x, y) = (a, b, c, \ldots)(x, y)^n$$

tout polynome $\varphi(x, y;\ a, b, c, \ldots)$ dont les coefficients sont fonctions entières de $a, b, c, \ldots$ et tel qu'en posant

$$f(mX + m'Y,\ nX + n'Y) = (A, B, C, \ldots)(X, Y)^n$$

on ait

$$\varphi(X, Y;\ A, B, C, \ldots) = (mn' - m'n)^i \varphi(mX + m'Y,\ nX + n'Y;\ a, b, c, \ldots).$$

On voit qu'en faisant, pour abréger,

$$F(X, Y) = f(mX + m'Y,\ nX + n'Y)$$

et

$$\Phi(X, Y) = \varphi(X, Y;\ A, B, C, \ldots),$$

le polynome Φ est déduit de F absolument comme φ de f.

Cela posé, je considère les deux équations homogènes

$$f(x, y) = 0,$$
$$z\frac{df}{dx} - y\,\varphi(x, y) = 0,$$

qui donnent celles de l'énoncé pour $y = 1$, et d'où l'on déduit aisément celles-ci

$$(1)\qquad \begin{cases} z\dfrac{df}{dy} + x\,\varphi(x, y) = 0, \\[2mm] z\dfrac{df}{dx} - y\,\varphi(x, y) = 0, \end{cases}$$

sur lesquelles je vais raisonner. Si l'on y remplace les coefficients $a, b, c, \ldots$ par ceux de la transformée A, B, C, ..., elles deviendront

$$(2)\qquad \begin{cases} z\dfrac{dF}{dY} + X\,\Phi(X, Y) = 0, \\[2mm] z\dfrac{dF}{dX} - Y\,\Phi(X, Y) = 0, \end{cases}$$

et il s'agit de comparer le résultat de l'élimination de x et y entre les équations (1) avec celui de l'élimination de X et Y entre les équations (2). J'observe à cet effet que l'on peut introduire x et y au lieu de X et Y en posant

$$x = mX + m'Y, \qquad y = nX + n'Y,$$

d'où

$$\frac{dF}{dX} = m\frac{df}{dx} + n\frac{df}{dy}, \qquad \frac{dF}{dY} = m'\frac{df}{dx} + n'\frac{df}{dy},$$

de cette manière les équations (2), en y remplaçant $\Phi(X, Y)$ par $(mn' - m'n)^i \varphi(x, y)$, deviennent

$$z\left(m'\frac{df}{dx} + n'\frac{df}{dy}\right) + X(mn' - m'n)^i \varphi(x, y) = 0,$$
$$z\left(m\frac{df}{dx} + n\frac{df}{dy}\right) - Y(mn' - m'n)^i \varphi(x, y) = 0.$$

Or, en multipliant la première par n, la seconde par n' et retranchant, il viendra

$$z(mn' - m'n)\frac{df}{dx} - (nX + n'Y)(mn' - m'n)^i \varphi(x, y) = 0,$$

ou évidemment

$$z\frac{df}{dx} - y(mn' - m'n)^{i-1}\varphi(x, y) = 0.$$

De même, en multipliant la première par m, la seconde par m', et retranchant, on obtient

$$z\frac{df}{dy} + x(mn' - m'n)^{i-1}\varphi(x, y) = 0.$$

Ce sont donc précisément les équations (1) qui se trouvent reproduites, en y multipliant $\varphi(x, y)$ par $(mn' - m'n)^{i-1}$ ou remplaçant z par $\frac{z}{(mn' - m'n)^{i-1}}$, et il va être ainsi prouvé que les coefficients de la transformée sont bien des invariants de $f(x, y)$. En effet, cette équation en z sera, d'après un théorème connu, privée de son second terme, et, si l'on désigne par D le discriminant, elle aura cette forme

$$z^n + \frac{\mathfrak{A}}{\mathrm{D}}z^{n-2} + \frac{\mathfrak{B}}{\mathrm{D}}z^{n-3} + \ldots + \frac{\mathfrak{K}}{\mathrm{D}} = 0,$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., $\mathfrak{K}$ étant des fonctions entières de a, b, c, ... Maintenant, si l'on remplace z par $\frac{z}{(mn' - m'n)^{i-1}}$, elle deviendra

$$\begin{aligned} &z^n + (mn' - m'n)^{2i-2}\frac{\mathfrak{A}}{\mathrm{D}}z^{n-2} \\ &\quad + (mn' - m'n)^{3i-3}\frac{\mathfrak{B}}{\mathrm{D}}z^{n-3} + \ldots + (mn' - m'n)^{ni-n}\frac{\mathfrak{K}}{\mathrm{D}} = 0, \end{aligned}$$

d'où l'on voit que, par le changement de a, b, c, ... en A, B, C, ..., les coefficients $\frac{\mathfrak{A}}{\mathrm{D}}$, $\frac{\mathfrak{B}}{\mathrm{D}}$, ..., $\frac{\mathfrak{K}}{\mathrm{D}}$, et, par conséquent, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., $\mathfrak{K}$, se reproduisent multipliés par une puissance du déterminant de la substitution, et sont bien des invariants.

VI.

Ce qui précède ne peut être appliqué aux formes cubiques et biquadratiques, qui n'ont pas de covariants linéaires ni de covariants quadratiques, mais plus tard on établira, pour toutes les formes de degré n égal ou supérieur à *cinq*, l'existence de divers systèmes de $n-1$ covariants du degré $n-2$. Désignant par

$$\varphi_1(x, y), \quad \varphi_2(x, y), \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1}(x, y)$$

l'un de ces systèmes, et posant

$$\varphi(x, y) = t_1\varphi_1(x, y) + t_2\varphi_2(x, y) + \ldots + t_{n-1}\varphi_{n-1}(x, y),$$

j'introduirai l'expression $z = \frac{\varphi(x, 1)}{f'_x(x, 1)}$, qui contient $n-1$ quantités arbitraires t_1, t_2, ..., t_{n-1}, comme formule générale de transformation à l'égard de l'équation $f(x, 1) = 0$ de degré quelconque supérieur au quatrième. On va voir ainsi disparaître en quelque sorte les coefficients de cette équation, pour faire place aux invariants qui prendront le caractère d'éléments analytiques dans les plus importantes questions de la théorie des équations algébriques. En effet, les quantités $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., $\mathfrak{K}$ deviendront des fonctions homogènes de t_1, t_2, ..., t_{n-1}, du deuxième, du troisième et enfin du $n^{\text{ième}}$ degré, dont les coefficients seront des invariants de la forme $f(x, y)$; et, pour montrer immédiatement comment intervient leur propriété caractéristique, en prenant, par exemple, $\mathfrak{A}$, je vais déterminer le degré de ces coefficients dans les divers termes t_1^2, t_2^2, t_1, t_2, ...

Nommons indice d'un invariant ou d'un covariant $\varphi(x, y)$ l'exposant i, qui figure dans l'équation de définition

$$\begin{aligned} &\varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}; \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots) \\ &\quad = (mn' - m'n)^i\varphi(m\mathrm{X} + m'\mathrm{Y}, n\mathrm{X} + n'\mathrm{Y}; a, b, c, \ldots), \end{aligned}$$

et soient i_1, i_2, ..., i_{n-1} les indices des covariants $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, ..., $\varphi_{n-1}(x, y)$ qui entrent dans la formule générale de transformation. D'après la démonstration donnée (§ V), le changement de a, b, c, ... en A, B, C, ..., dans l'équation en z, revient à remplacer t_1, t_2, ..., par $t_1(mn' - m'n)^{i_1-1}$, $t_2(mn' - m'n)^{i_2-1}$, ..., et il en résulte immédiatement que l'indice du coefficient d'un terme quelconque $t_\alpha t_\beta$ dans $\mathfrak{A}$ sera $i_\alpha + i_\beta - 2$. Mais ce coefficient a pour diviseur le discriminant dont l'indice est $n(n-1)$; par conséquent l'indice du numérateur sera la somme $i_\alpha + i_\beta - 2 + n(n-1)$ et son degré en a, b, c, ... le double de cette quantité divisé par n, c'est-à-dire $\frac{2(i_\alpha + i_\beta - 2)}{n} + 2(n-1)$. En introduisant le degré δ_α du covariant $\varphi_\alpha(x, y)$ en $a, b, c, \ldots$, au lieu de l'indice i_α, d'après la relation $2i_\alpha = n\delta_\alpha - n + 2$, cette formule se simplifie et devient $\delta_\alpha + \delta_\beta + 2n - 4$. On trouvera pour la forme cubique $\mathfrak{B}$, absolument de même, que le degré du coefficient de $t_\alpha t_\beta t_\gamma$ est $\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma + 3n - 6$. Ce sont ces fonctions $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ qui jouent le principal rôle dans la réduction à la forme trinome de l'équation du cinquième degré, car cette réduction dépend de la résolution des équations $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$. Et ici le point qui m'a semblé le plus essentiel et m'a le plus préoccupé consiste à vérifier la première en exprimant t_1, t_2, t_3, t_4 en fonction linéaire de deux indéterminées. La méthode à laquelle j'ai été amené repose en entier sur le choix des quatre covariants du troisième degré qui entrent dans la formule de transformation, et voici comment on les obtient.

VII.

Une remarque facile à établir, et dont j'ai fait usage ailleurs [1], me servira de point de départ. Elle consiste en ce que les coefficients des termes en ξ et η, dans le développement de l'expression

$$\varphi_1\left(\xi x - \eta \frac{d\varphi}{dy},\ \xi y + \eta \frac{d\varphi}{dx}\right), \tag{1}$$

où $\varphi(x, y)$ et $\varphi_1(x, y)$ sont deux covariants d'une forme quelconque $f(x, y)$, sont encore des covariants de la même forme. En supposant $\varphi(x, y)$ du second degré et $\varphi_1(x, y)$ du troisième, on voit ainsi un premier covariant cubique donner naissance à trois autres, et les éléments de la formule de transformation

$$z = \frac{t\,\varphi_1(x, 1) + u\,\varphi_2(x, 1) + v\,\varphi_3(x, 1) + w\,\varphi_4(x, 1)}{f'_x(x, 1)}$$

semblent s'offrir d'eux-mêmes, en partant du covariant quadratique

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) = {} & (\alpha\beta' - 4\beta\gamma' + 3\gamma^2)x^2 \\ & + (\alpha\alpha' - 3\beta\beta' + 2\gamma\gamma')xy + (\alpha'\beta - 4\beta'\gamma + 3\gamma'^2)y^2\end{aligned}$$

[1] Voir Hermite, *Œuvres*, t. III, p. 308.

et du covariant du troisième degré obtenu au paragraphe III, en opérant avec $\varphi(x, y)$ sur la forme proposée $f(x, y)$. Désignons, pour les introduire dans l'expression (1), par $\Phi(X, Y)$ et $\Phi_1(X, Y)$, les transformées canoniques de $\varphi(x, y)$ et $\varphi_1(x, y)$; on aura

$$\begin{aligned}\Phi(X, Y) &= \sqrt{A}\,XY, \\ \Phi_1(X, Y) &= \sqrt{A}(\mu X^3 + 3\sqrt{k}X^2Y + 3\sqrt{k}XY^2 + \mu' Y^3),\end{aligned}$$

et l'on pourra remplacer

$$\varphi_1\left(\xi x - \eta \frac{d\varphi}{dy},\ \xi y + \eta \frac{d\varphi}{dx}\right)$$

par

$$\Phi_1[(\xi - \eta\sqrt{A})X,\ (\xi + \eta\sqrt{A})Y].$$

Posant donc

$$\begin{aligned}&\Phi_1[(\xi - \eta\sqrt{A})X,\ (\xi + \eta\sqrt{A})Y] \\ &\quad = \xi^3\Phi_1(X, Y) - 3\xi^2\eta\,\Phi_2(X, Y) + 3\xi\eta^2\,\Phi_3(X, Y) - \eta^3\,\Phi_4(X, Y),\end{aligned}$$

voici, sous forme canonique, les expressions des covariants que nous sommes tout d'abord amenés à prendre pour $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y), \ldots$, à savoir :

$$\begin{aligned}\Phi_1(X, Y) &= \sqrt{A}\,(\mu X^3 + 3\sqrt{k}X^2Y + 3\sqrt{k}XY^2 + \mu' Y^3), \\ \Phi_2(X, Y) &= A\,(\mu X^3 + \sqrt{k}X^2Y - \sqrt{k}XY^2 - \mu' Y^3), \\ \Phi_3(X, Y) &= \sqrt{A^3}(\mu X^3 - \sqrt{k}X^2Y - \sqrt{k}XY^2 + \mu' Y^3), \\ \Phi_4(X, Y) &= A^2(\mu X^3 - 3\sqrt{k}X^2Y + 3\sqrt{k}XY^2 - \mu' Y^3).\end{aligned}$$

Le premier est du troisième degré par rapport aux coefficients de la forme proposée, ou, si l'on veut, du troisième ordre [1], et a reçu de M. Sylvester la dénomination de *canonisant*. Sous cette forme de déterminant, savoir

$$\varphi_1(x, y) = 3\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \gamma' \\ \beta & \gamma & \gamma' & \beta' \\ \gamma & \gamma' & \beta' & \alpha' \\ y^3 & -y^2x & yx^2 & -x^3 \end{vmatrix},$$

il sert de base au mémorable travail de l'illustre analyste sur les

[1] Pour abréger, je désignerai désormais, sous le nom d'*ordre*, le degré des covariants ou invariants de $f(x, y)$ par rapport aux coefficients de cette forme.