V.

Rappelons, à cet effet, la proposition de Dirichlet sur le nombre des points compris dans l'intérieur d'un contour fermé, et donnés par les formules

$$x = av + \alpha, \qquad y = bw + \beta,$$

où v et w prennent toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$. Si l'on suppose a et b positifs, ainsi qu'on peut toujours le faire en changeant le signe de v et w, et qu'on désigne l'aire du contour par σ, on aura sensiblement $\frac{\sigma}{ab}$ pour la valeur de ce nombre quand σ est très grand. Ce résultat ne contenant pas α et β, si l'on a μ systèmes de valeurs des coordonnées ne différant que par ces constantes, $\frac{\mu\sigma}{ab}$ sera la somme de tous les nombres de points ainsi exprimés et qui sont compris dans l'intérieur du même contour. Cela posé, l'aire de l'ellipse

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = n \quad \text{où} \quad b^2 - ac = -D_1$$

est

$$\frac{n\pi}{\sqrt{D_1}},$$

celle du secteur hyperbolique,

$$\frac{n \log(T + U\sqrt{D})}{2\sqrt{D}};$$

le nombre μ des systèmes

$$x = 2Dv + \alpha, \qquad y = 2Dw + \beta,$$

puisque nous supposons le déterminant impair, est

$$2D_1 \varphi(D_1).$$

Ainsi $\frac{\mu\sigma}{ab}$ sera

$$\frac{n\pi\varphi(D_1)}{2\sqrt{D_1^3}} \quad \text{dans le premier cas,}$$

et

$$\frac{n\varphi(D)\log(T + U\sqrt{D})}{4\sqrt{D^3}} \quad \text{dans le second.}$$

Telles seront donc pour n très grand les expressions approchées de la somme des nombres de représentations par une forme (a, b, c) de déterminant D positif et négatif des entiers positifs, impairs et premiers à D qui sont compris de l'unité à n. Ces expressions ne contiennent pas a, b, c; le déterminant seul y figure, de sorte qu'il suffira de les multiplier respectivement par le nombre h, des classes de l'ordre proprement primitif, pour en conclure la valeur approchée de la fonction précédemment désignée par $F(n)$. Il vient ainsi

$$\frac{n\pi\varphi(D_1)}{2\sqrt{D_1^3}}\, h = 2\sum_{1}^{n}{}_i \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \Phi\left(\frac{n}{i}\right) \quad \text{dans le cas de D négatif,}$$

et

$$\frac{n\varphi(D)\log(T + U\sqrt{D})}{4\sqrt{D^3}}\, h = \sum_{1}^{n}{}_i \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \Phi\left(\frac{n}{i}\right) \quad \text{dans le cas de D positif.}$$

Or on a, ainsi que nous l'avons remarqué en commençant,

$$\Phi(x) = \frac{x}{m}\varphi(m) + 2^{\mu-1}\varepsilon;$$

le nombre m d'ailleurs a été pris égal à $2D_1$, de sorte qu'en divisant par n les deux égalités pour y supposer n infiniment grand, on trouvera les expressions remarquables découvertes pour la première fois par Dirichlet, savoir :

$$h = \frac{2\sqrt{D_1}}{\pi} \sum_{1}^{\infty}{}_i \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right)\frac{1}{i},$$

$$h = \frac{2\sqrt{D}}{\log(T + U\sqrt{D})} \sum_{1}^{\infty}{}_i \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right)\frac{1}{i},$$

la première se rapportant aux déterminants négatifs et la seconde aux déterminants positifs (1).

(1) Je dois m'empresser de déclarer qu'ayant eu occasion de m'entretenir avec M. Liouville de cette manière d'arriver aux résultats de M. Dirichlet, j'ai appris de notre savant confrère qu'il y était parvenu, de son côté, en se servant des propres indications de M. Dirichlet, et l'avait fait connaître à ses auditeurs du Collège de France.

REMARQUES

SUR

LE DÉVELOPPEMENT DE $\cos \operatorname{am} x$.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LVII, 1863 (II), p. 613 et *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. IX, 1864, 2ᵉ s., p. 289.

En développant suivant les puissances de l'argument les trois fonctions $\sin \operatorname{am} x$, $\cos \operatorname{am} x$, $\Delta \operatorname{am} x$, on obtient les séries suivantes :

$$\sin \operatorname{am} x = x - (1 + k^2)\frac{x^3}{1.2.3} + (1 + 14k^2 + k^4)\frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$\cos \operatorname{am} x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + (1 + 4k^2)\frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$\Delta \operatorname{am} x = 1 - k^2\frac{x^2}{1.2} + (k^4 + 4k^2)\frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

où le coefficient d'un terme quelconque, $\frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots 2n+1}$, $\frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}$, est une fonction entière et à coefficients entiers du module k^2. Mais jusqu'ici il n'a pas été possible d'en obtenir l'expression générale, et tout ce que l'on sait à leur égard résulte simplement des relations

$$\sin \operatorname{am}\left(kx, \frac{1}{k}\right) = k \sin \operatorname{am}(x, k),$$

$$\cos \operatorname{am}\left(kx, \frac{1}{k}\right) = \Delta \operatorname{am}(x, k).$$

On reconnaît ainsi que les coefficients de $\sin \operatorname{am} x$ sont des polynomes réciproques et que le développement de $\cos \operatorname{am} x$ donne immédiatement celui de $\Delta \operatorname{am} x$. C'est de cette fonction, $\cos \operatorname{am} x$, que je vais m'occuper en ce moment, me proposant d'établir

à l'égard des coefficients, dont voici les premiers d'après Gudermann :

$$1 + 4k^2,$$
$$1 + 44k^2 + 16k^4,$$
$$1 + 408k^2 + 912k^4 + 64k^6,$$
$$1 + 3\,688k^2 + 30\,768k^4 + 15\,808k^6 + 256k^8,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

la remarque suivante :

Posons $k = \cos\theta$ et introduisons les arcs multiples, au lieu des puissances du cosinus ; en les multipliant chacun par k, on trouvera successivement

$$k + 4k^3 = 4\cos\theta + \cos 3\theta,$$
$$k + 44k^3 + 16k^5 = 44\cos\theta + 16\cos 3\theta + \cos 5\theta,$$
$$k + 408k^3 + 912k^5 + 64k^7 = 912\cos\theta + 408\cos 3\theta + 64\cos 5\theta + \cos 7\theta,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On aperçoit dans ces égalités que les puissances de k et les cosinus des multiples de θ ont précisément les mêmes coefficients. Or, en général, si l'on représente le coefficient de $\frac{x^{2n+2}}{1.2.3\ldots(2n+2)}$ dans le développement de $\cos \operatorname{am} x$ par

$$A_0 + A_1 k^2 + A_2 k^4 + \ldots + A_n k^{2n} = \sum_0^n {}_i A_i k^{2i},$$

on aura cette relation :

$$\sum A_i \cos^{2i+1}\theta = \sum A_i \cos(2n + 1 - 4i)\theta,$$

qu'on peut facilement démontrer, comme on verra. Mais je veux d'abord faire voir, par un exemple, comment elle sert à calculer directement les nombres entiers A_0, A_1, A_2, etc.

Soit $n = 4$: en faisant, pour simplifier, $A_i = 4^i a_i$, et posant $A_0 = 1$, on trouvera, en remplaçant par les arcs multiples les puissances du cosinus

$$\begin{aligned}\cos\theta &+ 4a_1\cos^3\theta + 16a_2\cos^5\theta + 64a_3\cos^7\theta + 256a_4\cos^9\theta \\ &= \cos\theta + a_1(\cos 3\theta + 3\cos\theta) + a_2(\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta) \\ &\quad + a_3(\cos 7\theta + 7\cos 5\theta + 21\cos 3\theta + 35\cos\theta) \\ &\quad + a_4(\cos 9\theta + 9\cos 7\theta + 36\cos 5\theta + 84\cos 3\theta + 126\cos\theta).\end{aligned}$$

On en conclut, entre les quatre inconnues, les cinq équations que voici :

$$\begin{aligned}
1 &= a_4,\\
4a_1 &= a_2 + 7a_3 + 36a_4,\\
16a_2 &= 1 + 3a_1 + 10a_2 + 35a_3 + 126a_4,\\
64a_3 &= a_1 + 5a_2 + 21a_3 + 84a_4,\\
256a_4 &= a_3 + 9a_4.
\end{aligned}$$

Leur somme conduisant à une identité, on peut omettre l'une d'elles, et, si l'on exclut la troisième, un calcul facile donne

$$a_1 = 922, \qquad a_2 = 1923, \qquad a_3 = 247, \qquad a_4 = 1,$$

ce qui conduit en effet au coefficient rapporté plus haut, d'après Gudermann. Laissant de côté l'étude de ces équations considérées en général, et me bornant à remarquer les valeurs

$$\begin{aligned}
A_n &= 4^n,\\
A_{n-1} &= 4^{2n-1} - (2n+1)4^{n-1},\\
A_1 &= \frac{9^{n+1} - 9 - 8n}{16},
\end{aligned}$$

j'arrive à la démonstration de l'égalité

$$\sum A_i \cos^{2i+1}\theta = \sum A_i \cos(2n+1-4i)\theta,$$

et à cette occasion, comme j'aurai à faire usage de la transformation du second ordre, je vais donner diverses formules qui s'y rapportent et qui peuvent être utiles dans bien d'autres circonstances.

La principale, celle dont toutes les autres peuvent être tirées, est

$$\sin\operatorname{am}\left[(1+k)x, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \frac{(1+k)\sin\operatorname{am}x}{1+k\sin^2\operatorname{am}x}.$$

Il suffit pour cela d'opérer tour à tour sur les fonctions au module primitif k et au module transformé, en employant les relations de la transformation du premier ordre; on le démontre en partant de ce théorème arithmétique que tous les systèmes linéaires

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix}$$

dans lesquels $ad - bc$ est un nombre premier p, sont donnés par un seul d'entre eux

$$\begin{vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & p \end{vmatrix}$$

en le composant à droite et à gauche avec des systèmes $\begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix}$ au déterminant 1. Or l'ensemble des relations relatives à la transformation du premier ordre consiste dans ces formules, savoir :

$$\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}\left(kx, \frac{1}{k}\right) &= k\sin\operatorname{am}x,\\
\cos\operatorname{am}\left(kx, \frac{1}{k}\right) &= \Delta\operatorname{am}x,\\
\Delta\operatorname{am}\left(kx, \frac{1}{k}\right) &= \cos\operatorname{am}x.
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}(ix, k') &= \frac{i\sin\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x},\\
\cos\operatorname{am}(ix, k') &= \frac{1}{\cos\operatorname{am}x},\\
\Delta\operatorname{am}(ix, k') &= \frac{\Delta\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x}.
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}\left(ik'x, \frac{1}{k'}\right) &= \frac{ik'\sin\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x},\\
\cos\operatorname{am}\left(ik'x, \frac{1}{k'}\right) &= \frac{\Delta\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x},\\
\Delta\operatorname{am}\left(ik'x, \frac{1}{k'}\right) &= \frac{1}{\cos\operatorname{am}x},
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}\left(ikx, \frac{ik'}{k}\right) &= \frac{ik\sin\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x},\\
\cos\operatorname{am}\left(ikx, \frac{ik'}{k}\right) &= \frac{1}{\Delta\operatorname{am}x},\\
\Delta\operatorname{am}\left(ikx, \frac{ik'}{k}\right) &= \frac{\cos\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x},
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}\left(k'x, \frac{ik}{k'}\right) &= \frac{k'\sin\operatorname{am}r}{\Delta\operatorname{am}x},\\
\cos\operatorname{am}\left(k'x, \frac{ik}{k'}\right) &= \frac{\cos\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x},\\
\Delta\operatorname{am}\left(k'x, \frac{ik}{k'}\right) &= \frac{1}{\Delta\operatorname{am}x}.
\end{aligned}\right.$$

On en tire, par un calcul facile pour la transformation du second ordre, les formes suivantes :

$$\text{I.}\quad\left\{\begin{aligned}
&\sin\operatorname{am}\left[(1+k)x,\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]=\frac{(1+k)\sin\operatorname{am}x}{1+k\sin^2\operatorname{am}x},\\
&\cos\operatorname{am}\left[(1+k)x,\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]=\frac{\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x}{1+k\sin^2\operatorname{am}x},\\
&\Delta\operatorname{am}\left[(1+k)x,\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]=\frac{1-k\sin^2\operatorname{am}x}{1+k\sin^2\operatorname{am}x}.
\end{aligned}\right.$$

$$\text{II.}\quad\left\{\begin{aligned}
&\sin\operatorname{am}\left[(1+k')ix,\ \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}\right]=\frac{i(1+k')\sin\operatorname{am}x\cos\operatorname{am}x}{1-(1+k')\sin^2\operatorname{am}x},\\
&\cos\operatorname{am}\left[(1+k')ix,\ \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}\right]=\frac{\Delta\operatorname{am}x}{1-(1+k')\sin^2\operatorname{am}x},\\
&\Delta\operatorname{am}\left[(1+k')ix,\ \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}\right]=\frac{1-(1-k')\sin^2\operatorname{am}x}{1-(1+k')\sin^2\operatorname{am}x}.
\end{aligned}\right.$$

$$\text{III}\quad\left\{\begin{aligned}
&\sin\operatorname{am}\left[(k'+ik)x,\ \frac{2\sqrt{ikk'}}{k'+ik}\right]=\frac{(k'+ik)\sin\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x}{1-(k-ik')k\sin^2\operatorname{am}x},\\
&\cos\operatorname{am}\left[(k'+ik)x,\ \frac{2\sqrt{ikk'}}{k'+ik}\right]=\frac{\cos\operatorname{am}x}{1-(k-ik')k\sin^2\operatorname{am}x},\\
&\Delta\operatorname{am}\left[(k'+ik)x,\ \frac{2\sqrt{ikk'}}{k'+ik}\right]=\frac{1-(k+ik')k\sin^2\operatorname{am}x}{1-(k-ik')k\sin^2\operatorname{am}x}.
\end{aligned}\right.$$

$$\text{IV.}\quad\left\{\begin{aligned}
&\sin\operatorname{am}\left[(1+k)ix,\ \frac{1-k}{1+k}\right]=\frac{i(1+k)\sin\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x},\\
&\cos\operatorname{am}\left[(1+k)ix,\ \frac{1-k}{1+k}\right]=\frac{1+k\sin^2\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x},\\
&\Delta\operatorname{am}\left[(1+k)ix,\ \frac{1-k}{1+k}\right]=\frac{1-k\sin^2\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x}.
\end{aligned}\right.$$

$$\text{V.}\quad\left\{\begin{aligned}
&\sin\operatorname{am}\left[(1+k')x,\ \frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{(1+k')\sin\operatorname{am}x\cos\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x},\\
&\cos\operatorname{am}\left[(1+k')x,\ \frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{1-(1+k')\sin^2\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x},\\
&\Delta\operatorname{am}\left[(1+k')x,\ \frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{1-(1-k')\sin^2\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x}.
\end{aligned}\right.$$

$$\text{VI.}\quad\left\{\begin{aligned}
&\sin\operatorname{am}\left[(k-ik')x,\ \frac{k+ik'}{k-ik'}\right]=\frac{(k-ik')\sin\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x},\\
&\cos\operatorname{am}\left[(k-ik')x,\ \frac{k+ik'}{k-ik'}\right]=\frac{1-(k-ik')k\sin^2\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x},\\
&\Delta\operatorname{am}\left[(k-ik')x,\ \frac{k+ik'}{k-ik'}\right]=\frac{1-(k+ik')k\sin^2\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x}.
\end{aligned}\right.$$

J'omets d'écrire, pour abréger, toutes celles qui en résulteraient par le changement de signe de k ou k', et par le changement des modules transformés en leurs inverses, et ne conduiraient pas, par conséquent, à de nouvelles formes analytiques dans les seconds membres.

C'est dans le dernier groupe que nous trouverons la relation conduisant à l'identité que nous voulons établir. En partant, en effet, de l'égalité

$$\cos\operatorname{am}\left[(k-ik')x,\ \frac{k+ik'}{k-ik'}\right]=\frac{1-(k-ik')k\sin^2\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x},$$

on en déduira, par le changement de signe de k',

$$\cos\operatorname{am}\left[(k+ik')x,\ \frac{k-ik'}{k+ik'}\right]=\frac{1-(k+ik')k\sin^2\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x},$$

d'où il sera facile de tirer

$$\begin{aligned}
&(k+ik')\cos\operatorname{am}\left[(k-ik')x,\ \frac{k+ik'}{k-ik'}\right]\\
&\qquad+(k-ik')\cos\operatorname{am}\left[(k+ik')x,\ \frac{k-ik'}{k+ik'}\right]=2k\cos\operatorname{am}x.
\end{aligned}$$

Or, en posant

$$k=\cos\theta,$$

cette égalité prendra cette forme

$$e^{i\theta}\cos\operatorname{am}(e^{-i\theta}x,\ e^{2i\theta})+e^{-i\theta}\cos\operatorname{am}(e^{i\theta}x,\ e^{-2i\theta})=2\cos\theta\cos\operatorname{am}x,$$

et la relation que nous nous sommes proposé de démontrer en résulte évidemment, en comparant dans les deux membres les coefficients d'une même puissance de la variable.

Relativement à $\sin\operatorname{am}x$, ce serait une formule de la transformation du quatrième ordre qui donnerait une conséquence semblable. Partant en effet de la relation suivante :

$$\begin{aligned}
&\sin\operatorname{am}\left[\frac{i(1+\sqrt{k})^2x}{2},\ \frac{(1-\sqrt{k})^2}{(1+\sqrt{k})^2}\right]\\
&\qquad=\frac{i}{(1-\sqrt{k})^2}\ \frac{1-k\sin^2\operatorname{am}x-\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x}{\sin\operatorname{am}x},
\end{aligned}$$

on en déduira aisément

$$(1-\sqrt{-k})^2 \sin\operatorname{am}\left[\frac{i(1+\sqrt{-k})^2 x}{2}, \frac{(1-\sqrt{-k})^2}{(1+\sqrt{+k})^2}\right]$$
$$-(1-\sqrt{k})^2 \sin\operatorname{am}\left[\frac{i(1+\sqrt{k})^2 x}{2}, \frac{(1-\sqrt{k})^2}{(1+\sqrt{k})^2}\right] = 2ik \sin\operatorname{am} x,$$

et l'on en tirera, pour la détermination des coefficients du développement de $\sin\operatorname{am} x$, des relations analogues aux précédentes, mais d'une forme un peu moins simple.

SUR

QUELQUES FORMULES RELATIVES AU MODULE

DANS

LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LVII, 1863 (II), p. 993 et *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. IX, 1864, 2^e s., p. 313.

Les expressions en produits infinis des fonctions elliptiques, savoir :

$$\sin\operatorname{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\;\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^3\cos 2x+q^{10})\ldots},$$

$$\cos\operatorname{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\;\frac{2\sqrt[4]{q}\cos x(1+2q^2\cos 2x+q^4)(1+2q^4\cos 2x+q^8)(1+2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots},$$

$$\Delta\operatorname{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = \sqrt{k'}\;\frac{(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots},$$

donnent immédiatement, pour la racine quatrième du module et de son complément, des fonctions uniformes à l'égard de la variable ω définie en posant $q = e^{i\pi\omega}$. C'est ce qu'on voit dans les *Fundamenta*, § 36, où sont établies ces relations

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,.\,\sqrt[8]{q}\,\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^4)\ldots},$$

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots},$$

ou encore sous forme entière

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,.\,\sqrt[8]{q}\,[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots]^2[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots],$$
$$\sqrt[4]{k'} = [(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots][(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^2.$$

Mais cette conséquence importante ne résulte pas des développements sous forme de quotients de séries des mêmes fonctions, savoir :

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots},$$

$$\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots},$$

$$\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{k'}\,\frac{1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots},$$

car c'est seulement alors la racine carrée du module et celle de son complément qui sont données en fonction de q par ces formules

$$\sqrt{k} = \frac{2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots},$$

$$\sqrt{k'} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots}.$$

Dans cette Note, je me propose d'établir, pour

$$\sin\operatorname{am}x, \qquad \cos\operatorname{am}x, \qquad \Delta\operatorname{am}x,$$

de nouveaux développements en série de sinus et de cosinus analogues aux précédents, mais qui donneront aussi bien que les produits infinis les racines quatrièmes de k et k' comme fonctions uniformes de la variable ω. On en déduira, en effet, ces formules remarquables, où le signe $\sum$ s'étend à toutes les valeurs positives et négatives de n

$$\sqrt[4]{k} = \frac{\sqrt{2}\,.\,\sqrt[8]{q}\sum q^{4n^2+2n}}{\sum q^{2n^2+n}}, \qquad \sqrt[4]{k'} = \frac{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}}{\sum q^{2n^2+n}},$$

$$\sqrt[4]{k} = \frac{\sqrt{2}\,.\,\sqrt[8]{q}\sum(-1)^n q^{2n^2+n}}{\sum(-1)^n q^{2n^2}}, \qquad \sqrt[4]{k'} = \frac{\sum(-1)^n q^{n^2}}{\sum(-1)^n q^{2n^2}},$$

$$\sqrt[4]{k} = \frac{\sqrt{2}\,.\,\sqrt[8]{q}\sum q^{2n^2+n}}{\sum q^{n^2}}, \qquad \sqrt[4]{k'} = \frac{\sum(-1)^n q^{2n^2}}{\sum q^{n^2}},$$

et auxquelles Jacobi est déjà parvenu dans son Mémoire intitulé : *Über unendliche Reihen, deren Exponenten zugleich in zwei verschiedenen quadratischen Formen enthalten sind*, en les déduisant des produits infinis en q rapportés plus haut. Les propriétés si importantes auxquelles donnent lieu ces quantités $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{k'}$, lorsqu'on y remplace ω par $\frac{c+d\omega}{a+b\omega}$, a, b, c, d étant des nombres entiers assujettis à la condition $ad - bc = 1$, résultent de ces formules et peuvent être établies, comme j'espère le montrer, d'une manière simple et facile.

I.

Pour abréger l'écriture, je conviendrai de désigner les quatre fonctions

$$\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right), \quad \Theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right), \quad H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right), \quad H_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$$

par $\theta(x)$, $\theta_1(x)$, $\eta(x)$, $\eta_1(x)$, de sorte qu'on ait, en mettant en évidence la quantité ω dont il a été question tout à l'heure,

$$\theta(x,\omega) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots,$$

$$\theta_1(x,\omega) = 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots,$$

$$\eta(x,\omega) = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \ldots,$$

$$\eta_1(x,\omega) = 2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \ldots.$$

Cela posé, la transformation du second ordre donnera ces deux systèmes de relation

$$\left\{\begin{aligned}
2\theta^2(x,\omega) &= \left[\sqrt{1+k}\,\theta\left(x,\frac{\omega}{2}\right) + \sqrt{1-k}\,\theta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right)\right]\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\\
2\theta_1^2(x,\omega) &= \left[\sqrt{1+k}\,\theta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right) + \sqrt{1-k}\,\theta\left(x,\frac{\omega}{2}\right)\right]\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\\
2\eta^2(x,\omega) &= \left[\sqrt{1+k}\,\theta\left(x,\frac{\omega}{2}\right) - \sqrt{1-k}\,\theta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right)\right]\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\\
2\eta_1^2(x,\omega) &= \left[\sqrt{1+k}\,\theta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right) - \sqrt{1-k}\,\theta\left(x,\frac{\omega}{2}\right)\right]\sqrt{\frac{2K}{\pi}},
\end{aligned}\right.$$

et

$$\left\{\begin{aligned}
\theta\,(x,\omega)\,\theta_1(x,\omega) &= \sqrt[4]{k'}\,\theta(2x,2\omega)\sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}},\\
\eta\,(x,\omega)\,\eta_1(x,\omega) &= \sqrt[4]{k'}\,\eta(2x,2\omega)\sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}},\\
\eta\,(x,\omega)\,\theta\,(x,\omega) &= \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{2}}\,\eta\left(x,\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}},\\
\eta_1(x,\omega)\,\theta_1(x,\omega) &= \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{2}}\,\eta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}},\\
\eta\,(x,\omega)\,\theta_1(x,\omega) &= \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}\sqrt[4]{kk'}}{\sqrt{2}}\,\eta\left(x,\frac{\omega+1}{2}\right)\sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}},\\
\eta_1(x,\omega)\,\theta\,(x,\omega) &= \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}\sqrt[4]{kk'}}{\sqrt{2}}\,\eta_1\left(x,\frac{\omega+1}{2}\right)\sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}};
\end{aligned}\right.$$

et c'est le second dont je vais faire usage comme il suit :

Considérons, par exemple, le sinus d'amplitude : on aura

$$\sin\operatorname{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\eta(x,\omega)}{\theta(x,\omega)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\eta(x,\omega)\,\theta_1(x,\omega)}{\theta(x,\omega)\,\theta_1(x,\omega)}.$$

Or, en employant la première et la cinquième de ces relations, on obtiendra de suite

$$\sin\operatorname{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{k}}\cdot\frac{\eta\left(x,\frac{\omega+1}{2}\right)}{\theta(2x,2\omega)},$$

ou bien

$$\sin\operatorname{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{k}}\,\frac{\sqrt[8]{q}\sin x + \sqrt[8]{q^9}\sin 3x - \sqrt[8]{q^{25}}\sin 5x - \ldots}{1 - 2q^2\cos 4x + 2q^8\cos 8x - 2q^{18}\cos 12x + \ldots},$$

et le même procédé de transformation, appliqué à $\cos\operatorname{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}$ et $\Delta\operatorname{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}$, donnera les résultats que voici :

$$\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} &= \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{k}}\,\frac{\eta\left(x,\frac{\omega+1}{2}\right)}{\theta(2x,2\omega)} = \frac{1}{\sqrt[4]{k}}\,\frac{\sqrt{2}\sqrt[8]{q}\sum(-1)^n q^{2n^2+n}\sin(4n+1)x}{\sum(-1)^n q^{2n^2}\cos 4nx},\\
\cos\operatorname{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{k'}{k}}\,\frac{\eta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right)}{\theta(2x,2\omega)} = \sqrt[4]{\frac{k'}{k}}\,\frac{\sqrt{2}\sqrt[8]{q}\sum q^{2n^2+n}\cos(4n+1)x}{\sum(-1)^n q^{2n^2}\cos 4nx},\\
\Delta\operatorname{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} &= e^{+\frac{i\pi}{8}}\sqrt[4]{k'}\,\frac{\eta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right)}{\eta_1\left(x,\frac{\omega+1}{2}\right)} = \sqrt[4]{k'}\,\frac{\sum q^{2n^2+n}\cos(4n+1)x}{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}\cos(4n+1)x},
\end{aligned}\right.$$

et, en second lieu,

$$\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} &= \frac{\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt[4]{k^3}}\,\frac{\eta(2x,2\omega)}{\eta_1\left(x,\frac{\omega+1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt[4]{k^3}}\,\frac{\sqrt{2}\sqrt[8]{q^3}\sum q^{8n^2+4n}\sin(8n+2)x}{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}\cos(4n+1)x},\\
\cos\operatorname{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} &= \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{k'^3}{k^3}}\,\frac{\eta(2x,2\omega)}{\eta\left(x,\frac{\omega}{2}\right)} = \sqrt[4]{\frac{k'^3}{k^3}}\,\frac{\sqrt{2}\sqrt[8]{q^3}\sum q^{8n^2+4n}\sin(8n+2)x}{\sum q^{2n^2+n}\sin(4n+1)x},\\
\Delta\operatorname{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} &= e^{-\frac{i\pi}{8}}\sqrt[4]{k'^3}\,\frac{\eta\left(x,\frac{\omega+1}{2}\right)}{\eta\left(x,\frac{\omega}{2}\right)} = \sqrt[4]{k'^3}\,\frac{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}\sin(4n+1)x}{\sum q^{2n^2+n}\sin(4n+1)x}.
\end{aligned}\right.$$

Tels sont donc les modes nouveaux de développement des fonctions elliptiques, qui manifestent immédiatement que les quantités $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{k'}$ sont des fonctions uniformes de ω. Il suffit en effet de poser $x=0$ dans les deux dernières équations du premier groupe pour obtenir

$$\sqrt[4]{k} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{2}}\,\frac{\eta_1\left(0,\frac{\omega+1}{2}\right)}{\theta(0,2\omega)} = \frac{\sqrt{2}\,.\sqrt[8]{q}\sum(-1)^n q^{2n^2+n}}{\sum(-1)^n q^{2n^2}},$$

$$\sqrt[4]{k'} = e^{-\frac{i\pi}{8}}\,\frac{\eta_1\left(0,\frac{\omega+1}{2}\right)}{\eta_1\left(0,\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}}{\sum q^{2n^2+n}},$$

c'est-à-dire deux des formules rapportées plus haut d'après Jacobi, et dont les autres se tirent aisément, comme nous le verrons bientôt. Quant aux équations du second groupe, elles donneraient, en prenant le rapport des dérivées, deux termes pour $x=0$,

$$\sqrt[4]{k^3} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt[8]{q^3}\sum(4n+1)q^{8n^2+4n}}{\sum(-1)^n(4n+1)q^{2n^2+n}},$$

$$\sqrt[4]{k'^3} = \frac{\sum(4n+1)q^{2n^2+n}}{\sum(-1)^n(4n+1)q^{2n^2+n}},$$

les signes $\sum$ s'étendant, comme précédemment, aux valeurs positives et négatives de n.

Mais ces nouveaux développements n'ont pas seulement pour objet de conduire à ces conséquences, que je vais donner principalement en vue de l'étude des quantités $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{k'}$; j'en indiquerai encore un usage dans la question suivante :

II.

La dérivée de $\sin \operatorname{am} x$ étant exprimée par

$$\sqrt{(1-\sin^2 \operatorname{am} x)(1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} x)},$$

il est naturel de se demander si les combinaisons suivantes des facteurs du radical

$$\lambda\,(x, k) = \sqrt{(1+\sin \operatorname{am} x)(1+k \sin \operatorname{am} x)},$$
$$\lambda_1(x, k) = \sqrt{(1+\sin \operatorname{am} x)(1-k \sin \operatorname{am} x)}$$

représenteront aussi bien que

$$\cos \operatorname{am} x = \sqrt{1-\sin^2 \operatorname{am} x} \quad \text{et} \quad \Delta \operatorname{am} x = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} x}$$

des fonctions uniformes de la variable. Or, en désignant par a une racine quelconque des équations $\lambda(x) = 0$, $\lambda_1(x) = 0$, on reconnaît aisément que les développements $\lambda(a+\varepsilon)$, $\lambda_1(a+\varepsilon)$ commencent par un terme proportionnel à ε, de sorte que d'après les principes connus [1] on peut assurer déjà que ces fonctions sont uniformes. On trouve en effet, par exemple,

$$\lambda(-\mathrm{K}+\varepsilon) = \sqrt{1+k}\,\frac{\sqrt{1-k \sin^2 \operatorname{am} \varepsilon} - \cos \operatorname{am} \varepsilon\, \Delta \operatorname{am} \varepsilon}{\Delta \operatorname{am} \varepsilon},$$

et la quantité sous le radical est une fonction paire de ε, qui s'annule avec cette variable. Mais il reste à trouver leur expression analytique, et l'on y parvient d'une manière facile comme il suit.

(1) *Voyez* l'ouvrage de MM. Briot et Bouquet sur les fonctions doublement périodiques.

Changeons k en $\frac{1-k'}{1+k'}$ et x en $(1+k')x$, en employant la formule

$$\sin \operatorname{am}\left[(1+k')x, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{(1+k')\sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} x}{\Delta \operatorname{am} x},$$

on trouvera

$$\lambda\left[(1+k')x, \frac{1-k'}{1+k'}\right]$$
$$= \frac{1}{\Delta \operatorname{am} x}\sqrt{1-k^2 \sin^4 \operatorname{am} x + 2 \sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} x\, \Delta \operatorname{am} x},$$

$$\lambda_1\left[(1+k')x, \frac{1-k'}{1+k'}\right]$$
$$= \frac{1}{\Delta \operatorname{am} x}\sqrt{1-2k^2 \sin^2 \operatorname{am} x + k^2 \sin^4 \operatorname{am} x + 2k' \sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} x\, \Delta \operatorname{am} x}.$$

Or il arrive que les quantités sous les deux radicaux sont des carrés parfaits, à savoir :

$$(\cos \operatorname{am} x + \sin \operatorname{am} x\, \Delta \operatorname{am} x)^2 \quad \text{et} \quad (k' \sin \operatorname{am} x + \cos \operatorname{am} x\, \Delta \operatorname{am} x)^2,$$

de sorte qu'il vient simplement

$$\lambda\left[(1+k')x, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \sin \operatorname{am} x + \frac{\cos \operatorname{am} x}{\Delta \operatorname{am} x} = \sin \operatorname{am} x + \sin \operatorname{coam} x,$$
$$\lambda_1\left[(1+k')x, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \cos \operatorname{am} x + \frac{k' \sin \operatorname{am} x}{\Delta \operatorname{am} x} = \cos \operatorname{am} x + \cos \operatorname{coam} x.$$

Posons encore avec Jacobi

$$k^{(2)} = \frac{1-k'}{1+k'}, \qquad \mathrm{K}^{(2)} = \frac{1+k'}{2}\mathrm{K},$$

ces quantités désignant ce que deviennent k et K par le changement de q en q^2 ou de ω en 2ω, et mettons $\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}$ au lieu de x ; on aura

$$\lambda\left[\frac{4\mathrm{K}^{(2)}x}{\pi}, k^{(2)}\right] = \sin \operatorname{am} \frac{2\mathrm{K}x}{\pi} + \sin \operatorname{coam} \frac{2\mathrm{K}x}{\pi},$$
$$\lambda_1\left[\frac{4\mathrm{K}^{(2)}x}{\tau}, k^{(2)}\right] = \cos \operatorname{am} \frac{2\mathrm{K}x}{\pi} + \cos \operatorname{coam} \frac{2\mathrm{K}x}{\pi}.$$

C'est à ce moment que nous ferons remarquer l'avantage des nouvelles formules

$$\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{k}} \cdot \frac{\eta\left(x, \frac{\omega+1}{2}\right)}{\theta(2x, 2\omega)},$$

$$\cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{\eta_1\left(x, \frac{\omega}{2}\right)}{\theta(2x, 2\omega)},$$

car elles donnent, avec le même dénominateur,

$$\sin \operatorname{coam} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{k}} \cdot \frac{\eta_1\left(x, \frac{\omega+1}{2}\right)}{\theta(2x, 2\omega)},$$

$$\cos \operatorname{coam} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{\eta\left(x, \frac{\omega}{2}\right)}{\theta(2x, 2\omega)},$$

de sorte qu'ayant, comme on le vérifie de suite,

$$\eta\left(x, \frac{\omega+1}{2}\right) + \eta_1\left(x, \frac{\omega+1}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{i\pi}{8}} \eta_1\left(x - \frac{\pi}{4}, \frac{\omega}{2}\right),$$

$$\eta\left(x, \frac{\omega}{2}\right) + \eta_1\left(x, \frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{i\pi}{8}} \eta_1\left(x - \frac{\pi}{4}, \frac{\omega+1}{2}\right),$$

on en conclut, en remplaçant x et ω par $\frac{x}{2}$ et $\frac{\omega}{2}$,

$$\lambda\left(\frac{2Kx}{\pi}, k\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{k_{\frac{1}{2}}}} \frac{\eta_1\left(\frac{2x-\pi}{4}, \frac{\omega}{4}\right)}{\theta(x, \omega)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{k_{\frac{1}{2}}}} \frac{2\sqrt[16]{q} \sum q^{\frac{2n^2+n}{2}} \cos(4n+1)\left(\frac{2x-\pi}{4}\right)}{\sum (-1)^n q^{n^2} \cos 2nx}$$

et

$$\lambda_1\left(\frac{2Kx}{\pi}, k\right) = e^{-\frac{i\pi}{8}} \sqrt[4]{\frac{k'_{\frac{1}{2}}}{k_{\frac{1}{2}}}} \frac{\eta_1\left(\frac{2x-\pi}{4}, \frac{\omega+2}{4}\right)}{\theta(x, \omega)}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{k'_{\frac{1}{2}}}{k_{\frac{1}{2}}}} \frac{2\sqrt[16]{q} \sum (-1)^n q^{\frac{2n^2+n}{2}} \cos(4n+1)\left(\frac{2x-\pi}{4}\right)}{\sum (-1)^n q^{n^2} \cos 2nx}.$$

Dans ces formules, $k_{\frac{1}{2}}$ et $k'_{\frac{1}{2}}$ désignent ce que deviennent le module

et son complément par le changement de ω en $\frac{\omega}{2}$, et ont pour valeur

$$k_{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \qquad k'_{\frac{1}{2}} = \frac{1-k}{1+k}.$$

Sous forme de séries simples, on aurait

$$\lambda\left(\frac{2Kx}{\pi}, k\right) = \frac{\pi\sqrt{2}\sqrt[4]{q}}{K\sqrt{k}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n \frac{q^n \cos(4n+1)\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{1 - q^{2n+\frac{1}{2}}},$$

$$\lambda_1\left(\frac{2Kx}{\pi}, k\right) = \frac{\pi\sqrt{2}\sqrt[4]{q}}{K\sqrt{k}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n \frac{q^n \cos(4n+1)\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{1 + q^{2n+\frac{1}{2}}}.$$

SUR

LES FONCTIONS DE SEPT LETTRES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LVII, 1863 (II), p. 750.

En représentant, suivant l'usage, un système de p quantités indépendantes par la notation z_i, où l'on suppose

$$i = 0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad p-1,$$

toute substitution entre ces quantités pourra se représenter analytiquement de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} z_i \\ z_{\theta(i)} \end{bmatrix},$$

la fonction $\theta(i)$ étant déterminée de manière à reproduire dans un autre ordre l'ensemble des p valeurs de l'indice. Ce n'est, il est vrai, qu'une abréviation de la notation explicite

$$\begin{bmatrix} z_0, & z_1, & \ldots, & z_{p-1} \\ z_a, & z_b, & \ldots, & z_k \end{bmatrix},$$

où $a, b, \ldots, k$ sont les nouveaux indices, et qu'on obtient immédiatement par la formule d'interpolation; toutefois, on verra qu'on en tire quelques résultats intéressants, au moins à l'égard des fonctions de sept lettres, en prenant pour symboles de distinction, au lieu des indices $i = 0, 1, 2, \ldots, p-1$, un système de résidus suivant le module p. Sous ce point de vue, la formule d'interpolation se simplifie en effet, comme nous allons d'abord le montrer.

Soit, pour un instant,

$$\varphi(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1);$$

on aura, comme on sait,

$$\theta(x) = \frac{a\varphi(x)}{x\varphi'(0)} + \frac{b\varphi(x)}{(x-1)\varphi'(1)} + \ldots + \frac{k\varphi(x)}{(x-p+1)\varphi'(p-1)}.$$

Or, en supposant p premier, et employant le théorème connu

$$\varphi(x) \equiv x^p - x \qquad (\text{mod } p),$$

d'où

$$\varphi'(x) \equiv -1,$$

on trouvera immédiatement

$$\begin{aligned} \theta(x) \equiv &- a(x^{p-1}-1) - bx(x^{p-2}+x^{p-3}+\ldots+1) \\ &- cx(x^{p-2}+2x^{p-3}+\ldots+2^{p-2}) - \ldots \\ &- kx[x^{p-2}+(p-1)x^{p-3}+\ldots+(p-1)^{p-2}]. \end{aligned}$$

Ordonnant par rapport à x, et remarquant que les nombres a, $b, \ldots, k$, coïncident, sauf l'ordre, avec un système de résidus, de sorte que leur somme

$$a+b+\ldots+k \equiv 0 \qquad (\text{mod } p),$$

il viendra

$$\begin{aligned} \theta(x) \equiv a &- x \quad [b+2^{p-2}c+\ldots+(p-1)^{p-2}k] \\ &- x^2 \quad [b+2^{p-3}c+\ldots+(p-1)^{p-3}k] \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &- x^{p-2}[b+2c \quad +\ldots+(p-1)k \quad], \end{aligned}$$

ce qui est un polynome à coefficients entiers du degré $p-2$, et dont voici la propriété caractéristique :

Formons la suite des puissances

$$\theta^2(x), \quad \theta^3(x), \quad \ldots, \quad \theta^{p-2}(x),$$

et soit, en général,

$$\theta^n(x) = (n)_0 + (n)_1 x + (n)_2 x^2 + \ldots + (n)_{n(p-2)} x^{n(p-2)},$$

je dis qu'on aura

$$(n)_0 + (n)_{p-1} + (n)_{2(p-1)} + \ldots + (n)_{(n-1)(p-1)} \equiv 0.$$

Effectivement, $a, b, \ldots, k$ représentant dans un ordre quelconque un système de résidus, on a

$$\begin{aligned}\theta^n(0)+\theta^n(1)+\ldots+\theta^n(p-1) &\equiv a^n+b^n+\ldots+k^n\\ &\equiv 1^n+2^n+\ldots+k^n\\ &\equiv 0 \pmod p,\end{aligned}$$

de sorte qu'en éliminant dans $\theta^n(x)$ les puissances de x dont l'exposant est supérieur à $p-1$, à l'aide de la relation $x^{p-1}\equiv 1$, le coefficient du terme indépendant auquel on sera ainsi amené devra être congru à zéro.

Et, réciproquement, tout polynome à coefficients entiers, de degré $p-2$,

$$\theta(x)=G+Hx+\ldots+Nx^{p-2},$$

qui remplira ces conditions, pourra servir à désigner une substitution, car en faisant, pour un instant,

$$\theta(0)=a, \quad \theta(1)=b, \quad \ldots, \quad \theta(p-1)=k,$$

la fonction $(x-a)(x-b)\ldots(x-k)$ coïncidera, en vertu des relations

$$a^n+b^n+\ldots+k^n\equiv 0,$$

avec

$$x^p-x \quad \text{ou} \quad x(x-1)\ldots(x-p+1),$$

et, par conséquent, a, b, ..., k représenteront un système de résidus.

Ces premières remarques faites, nous allons les employer à l'étude des substitutions, en partant de ce fait évident de lui-même que, si $\theta(x)$ est une fonction quelconque, propre à représenter une substitution, la suivante :

$$\mathfrak{I}(x)=\alpha\theta(x+\beta)+\gamma,$$

en excluant la valeur $\alpha\equiv 0$, aura, quels que soient β et γ, la même propriété. Or, il est aisé de définir, dans un tel ensemble d'expressions, une *forme réduite*, unique, qui, une fois connue, donnera toutes les autres, et ce qui se présente le plus naturellement c'est de déterminer α de manière à rendre égal à l'unité, dans $\mathfrak{I}(x)$, le coefficient de la puissance la plus élevée de la variable, β en faisant disparaître le coefficient de la puissance immédiatement inférieure, et γ enfin, de sorte qu'il n'y ait pas de terme indépendant. On

pourra même chercher à réduire ultérieurement $\mathfrak{I}(x)$, en considérant l'expression $\alpha\mathfrak{I}(\alpha x)$, où il restera encore un entier arbitraire, après qu'on aura rendu égal à l'unité le coefficient du terme du plus haut degré. La notion des formes réduites ainsi établie pour les fonctions $\theta(x)$, nous allons, en considérant les cas de $p=5$ et $p=7$, montrer comment elles se déterminent.

Premier cas : $p=5$.

Les formes réduites sont

$$\mathfrak{I}(x)\equiv x, \quad x^2, \quad x^3+ax;$$

la seconde est à exclure attendu que

$$\mathfrak{I}^2(x)\equiv x^4\equiv 1,$$

et il ne reste à considérer que la dernière dont le carré est

$$x^6+2ax^4+a^2x^2\equiv x^2(1+a^2)+2a.$$

Devant faire disparaître le terme indépendant, il faut poser

$$a\equiv 0;$$

toutes les autres conditions se trouvant d'ailleurs remplies par l'expression

$$\mathfrak{I}(x)\equiv x^3,$$

il en résulte que la totalité des substitutions, pour un système de cinq lettres, s'obtiennent en employant pour indices

$$\alpha x+\beta, \qquad \alpha(x+\beta)^3+\gamma,$$

où l'on n'excepte que la valeur $\alpha\equiv 0$. M. Betti avait donné déjà ce résultat dans le Tome II des *Annales de Tortolini* et, récemment, M. Brioschi en a fait l'application la plus ingénieuse dans son beau travail sur la méthode de Kronecker pour la résolution de l'équation du cinquième degré (*Actes de l'Institut Lombard*, année 1858).

Deuxième cas : $p=7$.

On devra partir des expressions

$$\mathfrak{I}(x)\equiv x, \quad x^2, \quad x^3+ax, \quad x^4+ax^2+bx, \quad x^5+ax^3+bx^2+cx,$$

dont la seconde et la troisième sont d'abord à rejeter, le terme indépendant existant nécessairement dans le cube de l'une et le carré de l'autre. Soit donc

$$\mathfrak{I}(x) \equiv x^4 + ax^2 + bx.$$

Le terme indépendant de $\mathfrak{I}^2(x)$ donne immédiatement $a \equiv 0$. On trouve ensuite

$$(x^4 + bx)^3 \equiv x^3(b^3 + 3b) + 3b^2 + 1,$$

d'où cette condition

$$3b^2 + 1 \equiv 0, \qquad b \equiv \pm 3,$$

et, par conséquent, ces deux formes

$$\mathfrak{I}(x) \equiv x^4 + 3x, \qquad x^4 - 3x.$$

La seconde se ramène à la première en recourant au dernier mode de réduction que nous avons indiqué en commençant. On trouve, en effet, en prenant $\mathfrak{I}(x) \equiv x^4 - 3x$,

$$a^2\,\mathfrak{I}(ax) \equiv x^4 - 3a^3x,$$

de sorte qu'il suffit pour y parvenir de poser $a^3 \equiv -1$, c'est-à-dire de prendre a non résidu de 7. Cela étant connu, on obtient, pour la série des puissances,

$$\left|\begin{array}{l} \mathfrak{I}\,(x) \equiv x^4 + 3x, \\ \mathfrak{I}^2(x) \equiv 6x^5 + 3x^2, \\ \mathfrak{I}^3(x) \equiv x^3, \\ \mathfrak{I}^4(x) \equiv 3x^4 + x, \\ \mathfrak{I}^5(x) \equiv 3x^5 + 6x^2. \end{array}\right.$$

Ainsi toutes les autres conditions se trouvent remplies d'elles-mêmes.

Soit, en dernier lieu,

$$\mathfrak{I}(x) \equiv x^5 + ax^3 + bx^2 + cx;$$

on aura, en égalant à zéro les termes indépendants dans le carré, le cube, et la quatrième puissance,

$$\begin{gathered} 2c + a^2 \equiv 0, \\ b(3 + 6ac + b^2) \equiv 0, \\ ab^2 + 4b^2c^2 + 2(2a + c^2)(1 + 2ac + b^2) \equiv 0. \end{gathered}$$

La seconde équation conduit à supposer d'abord $b \equiv 0$, ce qui réduit la dernière à

$$(2a + c^2)(1 + 2ac) \equiv 0.$$

Or, en y faisant

$$c \equiv -\frac{1}{2}a^2 \equiv 3a^2,$$

elle donne l'identité

$$2(a + a^4)(1 - a^3) \equiv 2(a - a^7) \equiv 0;$$

on a donc cette expression

$$\mathfrak{I}(x) \equiv x^5 + ax^3 + 3a^2x,$$

où a reste indéterminé, mais que nous pouvons ramener aux cas de $a \equiv 0$, $a \equiv 1$ et $a \equiv 3$, d'après la relation

$$\alpha\mathfrak{I}(\alpha x) \equiv x^5 - a\alpha^4x^3 + 3a^2\alpha^2x.$$

On vérifiera aisément que la cinquième puissance ne renferme pas d'ailleurs de terme indépendant. Supposons enfin que b ne soit pas $\equiv 0$, les deux dernières équations donnent, en y faisant $c \equiv 3a^2$,

$$\begin{gathered} 3 - 3a^3 + b^2 \equiv 0, \\ a + a^4 \equiv 0, \end{gathered}$$

d'où ces deux solutions

$$\left\{\begin{array}{ll} a \equiv 0, & b \equiv \pm 2, \\ a^3 \equiv -1, & b \equiv \pm 1; \end{array}\right.$$

on en conclut ces nouvelles formes réduites

$$\begin{array}{l} \mathfrak{I}(x) \equiv x^5 \pm 2x^2, \\ \mathfrak{I}(x) \equiv x^5 + ax^3 \pm x^2 + 3a^2x \quad (a \text{ non résidu quadratique de } 7), \end{array}$$

que nous ramenons, en opérant comme tout à l'heure, à celles-ci :

$$\begin{array}{l} \mathfrak{I}(x) \equiv x^5 + 2x^2, \\ \mathfrak{I}(x) \equiv x^5 + 3x^3 \pm x^2 - x. \end{array}$$

En résumé, toutes les substitutions d'un système de sept lettres, au nombre de 5040, se trouvent représentées de cette manière,

$$\left\{\begin{array}{l} z_x \\ z_{\alpha x+\beta} \end{array}\right| \left\{\begin{array}{l} z_x \\ z_{\alpha\theta(x+\beta)+\gamma} \end{array}\right\},$$

la fonction $\theta(x)$ prenant successivement ces formes

$$
\begin{array}{ll}
x^4 \pm 3x, & \\
x^5 \pm 2x^2, & \\
x^5 + ax^3 + 3a^2x & (a \text{ quelconque}), \\
x^5 + ax^3 \pm x^2 + 3a^2x & (a \text{ non résidu de } 7).
\end{array}
$$

C'est le résultat que j'ai déjà indiqué dans une Lettre adressée à M. Brioschi, et publiée dans les *Annales de M. Tortolini;* je vais le compléter en présentant quelques remarques sur les diverses fonctions $\mathfrak{S}(x)$, et me servant à cet effet des formes réduites précédemment obtenues, savoir :

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{S}(x) \equiv\ & x^4 + 3x, \\
& x^5 + 2x^2, \\
& x^5 + x^3 + 3x, \\
& x^5 + 3x^3 - x, \\
& x^5 + 3x^3 \pm x^2 - x.
\end{aligned}
$$

A l'égard des deux premières, je distingue en deux groupes les valeurs de x, suivant leur caractère quadratique par rapport au module 7; on trouvera ainsi

$$
\begin{aligned}
x^4 + 3x &\equiv 2x && (x \text{ résidu quadratique de } 7), \\
&\equiv 4x && (x \text{ non résidu de } 7), \\
x^5 + 2x^2 &\equiv 3x^2 && (x \text{ résidu quadratique de } 7), \\
&\equiv x^2 && (x \text{ non résidu de } 7).
\end{aligned}
$$

Pour la troisième, je distinguerai les indices en résidus cubiques, et non résidus par rapport à 7, et il viendra

$$
\begin{aligned}
x^5 + x^3 + 3x &\equiv -2x && (x \text{ résidu cubique de } 7), \\
&\equiv +2x && (x \text{ non résidu cubique}).
\end{aligned}
$$

Pour les deux derniers enfin, on parviendra encore à des formes monomes, mais sous un point de vue bien différent, car on trouvera

$$
\begin{aligned}
x^5 + 3x^3 - x &\equiv 3x^2, && x < \tfrac{7}{2}, \\
&\equiv -3x^2, && x > \tfrac{7}{2},
\end{aligned}
$$

et, par suite, en faisant $\varepsilon = \pm 1$,

$$
\begin{aligned}
x^5 + 3x^3 + \varepsilon x^2 - x &\equiv (3 + \varepsilon)x^2, && x < \tfrac{7}{2}, \\
&\equiv (-3 + \varepsilon)x^2, && x > \tfrac{7}{2}.
\end{aligned}
$$

Ces remarques, qu'on vérifie facilement, autorisent jusqu'à un certain point peut-être à supposer que, dans l'étude des formes analytiques de substitution pour un nombre premier quelconque p de lettres, les expressions que nous avons nommées réduites se ramènent elles-mêmes à d'autres beaucoup plus simples, en considérant les valeurs de l'indice comme résidus ou non résidus de puissances dont l'exposant diviserait $p - 1$, ou bien encore comme divisées en ces deux séries

$$
\begin{aligned}
x &= 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad \frac{p-1}{2}, \\
x &= \frac{p+1}{2}, \quad \frac{p+3}{2}, \quad \ldots, \quad p - 1.
\end{aligned}
$$

Soit, par exemple [1], une substitution réduite de la forme

$$\mathfrak{S}(x) \equiv ax^{\omega}\left(x^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) - bx^{\varpi}\left(x^{\frac{p-1}{2}} - 1\right):$$

il est clair qu'on aura simplement

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{S}(x) &\equiv 2ax^{\omega} && (x \text{ résidu de } p), \\
&\equiv 2bx^{\varpi} && (x \text{ non résidu de } p);
\end{aligned}
$$

c'est à cette catégorie qu'appartient, dans le cas de $p = 7$, l'expression

$$\mathfrak{S}(x) \equiv -x^5 - 2x^2,$$

qui vérifie les relations

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{S}[a\mathfrak{S}(x) + b] \equiv 2ab^4\mathfrak{S}\left(x + \frac{2}{a^4 b}\right) + \frac{1-a}{a}(b^5 + 2b^2) \quad (a \text{ résidu de } 7), \\
\mathfrak{S}[\mathfrak{S}(x)] \equiv x.
\end{gathered}
$$

---

[1] Avant cet exemple dans lequel p est un nombre premier quelconque, Hermite donne un autre exemple où $p \equiv 3 \pmod 4$; nous l'avons supprimé dans le texte, car le passage nous paraît contenir des inexactitudes. E. P.

Il en résulte qu'on a un système de 168 substitutions conjuguées représentées ainsi :

$$\begin{Bmatrix} z_x \\ z_{ax+b} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} z_x \\ z_{a\mathfrak{I}(x+b)+c} \end{Bmatrix} \quad (a \text{ résidu de } 7);$$

d'où cette conséquence, indiquée pour la première fois par M. Kronecker, qu'une fonction de sept lettres, invariable par ce système de substitutions, ne peut avoir que trente valeurs distinctes.

EXTRAIT

D'UNE

LETTRE DE M. HERMITE A M. BRIOSCHI.

Journal de Crelle, t. 63, 1864, p. 30.

« En appelant, comme vous le faites ([1]), U la forme cubique proposée, H le hessien, K le covariant du sixième degré, et

$$\Theta = \begin{vmatrix} \frac{dU}{dx} & \frac{dU}{dy} & \frac{dU}{dz} \\ \frac{dH}{dx} & \frac{dH}{dy} & \frac{dH}{dz} \\ \frac{dK}{dx} & \frac{dK}{dy} & \frac{dK}{dz} \end{vmatrix},$$

le covariant du neuvième degré que vous avez à bien juste titre introduit dans la théorie, j'ai remarqué qu'il est décomposable en facteurs linéaires et que tous ses invariants sont des puissances du discriminant de U. On le prouve au moyen de l'expression correspondante à la forme canonique $U = x^3 + y^3 + z^3 + 6lxyz$, qui est

$$\Theta = R(x^3 - y^3)(y^3 - z^3)(z^3 - x^3),$$

abstraction faite d'un facteur numérique, R étant le discriminant.

» D'une manière analogue, en ajoutant aux trois contravariants que M. Cayley désigne ainsi, PU, QU, FU, le contravariant du

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LVI, 1863 (I), p. 304.

neuvième degré

$$\Omega = \begin{vmatrix} \dfrac{d\,\mathrm{PU}}{d\xi} & \dfrac{d\,\mathrm{PU}}{d\eta} & \dfrac{d\,\mathrm{PU}}{d\zeta} \\ \dfrac{d\,\mathrm{QU}}{d\xi} & \dfrac{d\,\mathrm{QU}}{d\eta} & \dfrac{d\,\mathrm{QU}}{d\zeta} \\ \dfrac{d\,\mathrm{FU}}{d\xi} & \dfrac{d\,\mathrm{FU}}{d\eta} & \dfrac{d\,\mathrm{FU}}{d\zeta} \end{vmatrix},$$

on parviendra, si l'on supprime un facteur numérique, à

$$\Omega = \mathrm{R}(\xi^3 - \eta^3)(\eta^3 - \zeta^3)(\zeta^3 - \xi^3),$$

d'où résultent les mêmes conséquences que pour Θ.

» Mais la valeur de Ω sous forme de déterminant suggère naturellement d'appliquer votre méthode à la relation $\mathrm{PU} = 0$ en multipliant par

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ d\xi & d\eta & d\zeta \end{vmatrix},$$

ce qui donne

$$\Omega\Delta = 3(\mathrm{QU}\,d\,\mathrm{FU} - 2\,\mathrm{FU}\,d\,\mathrm{QU})\left(\alpha\frac{d\,\mathrm{PU}}{d\xi} + \beta\frac{d\,\mathrm{PU}}{d\eta} + \gamma\frac{d\,\mathrm{PU}}{d\zeta}\right),$$

sous la condition admise $\mathrm{PU} = 0$.

» Effectivement il est aisé d'obtenir

$$\Omega^2 = \mathrm{FU}(\mathrm{QU})^4 - 2\mathrm{T}(\mathrm{FU}\,\mathrm{QU})^2 + \mathrm{R}(\mathrm{FU})^3.$$

T étant l'invariant du dixième ordre et R le discriminant. Faisant donc

$$z = \frac{\mathrm{QU}}{\sqrt{\mathrm{FU}}},$$

on aura

$$\Omega\Delta = -6\,dz(\mathrm{FU})^{\frac{3}{2}}\left(\alpha\frac{d\,\mathrm{PU}}{d\xi} + \beta\frac{d\,\mathrm{PU}}{d\eta} + \gamma\frac{d\,\mathrm{PU}}{d\zeta}\right),$$

$$\Omega = (\mathrm{FU})^{\frac{3}{2}}\sqrt{z^4 - 2\mathrm{T}z^2 + \mathrm{R}}$$

et, par suite,

$$\frac{\Delta}{\alpha\dfrac{d\,\mathrm{PU}}{d\xi} + \beta\dfrac{d\,\mathrm{PU}}{d\eta} + \gamma\dfrac{d\,\mathrm{PU}}{d\zeta}} = -6\frac{dz}{\sqrt{z^4 - 2\mathrm{T}z^2 + \mathrm{R}}},$$

Mais le point le plus essentiel est d'obtenir l'expression de Ω^2 en

fonction rationnelle et entière des covariants et contravariants, ainsi que vous l'avez fait à l'égard de Θ^2 et des trois covariants. Votre méthode qui emploie les quantités S_{ab}, T_{ab} de M. Aronhold m'ayant entièrement échappé, voici celle que j'ai suivie. J'ai pris pour point de départ les expressions canoniques données par M. Cayley

$$\begin{aligned}
\mathrm{PU} &= -l(\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3) + (4l^3 - 1)\xi\eta\zeta = 0,\\
\mathrm{QU} &= (1 - 10l^3)(\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3) - 6l^2(5 + 4l^3)\xi\eta\zeta,\\
\mathrm{FU} &= -4(1 + 8l^3)(\eta^3\zeta^3 + \zeta^3\xi^3 + \xi^3\eta^3)\\
&\quad + (\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3)^2 - 24l^2(\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3)\xi\eta\zeta - 24l(1 + 2l^3)\xi^2\eta^2\zeta^2,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en faisant

$$\omega = 1 + 8l^3,$$

$$\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = \frac{1 - 4l^3}{\omega^2}\mathrm{QU},$$

$$\eta^3\zeta^3 + \zeta^3\xi^3 + \xi^3\eta^3 = -\frac{1}{4\omega}\mathrm{FU} + \frac{1 - 16l^3}{4\omega^4}(\mathrm{QU})^2,$$

$$\xi^3\eta^3\zeta^3 = -\frac{l^3}{\omega^6}(\mathrm{QU})^3,$$

de sorte que le résultat cherché s'obtiendra en calculant le discriminant de l'équation du troisième degré

$$t^3 - t^2\frac{1 - 4l^3}{\omega^2}\mathrm{QU} + t\left[-\frac{1}{4\omega}\mathrm{FU} + \frac{1 - 16l^3}{4\omega^4}(\mathrm{QU})^2\right] + \frac{l^3}{\omega^6}(\mathrm{QU})^3 = 0.$$

Ou en faisant

$$2t - \frac{\mathrm{QU}}{\omega^2} = \theta,$$

on a la transformée plus simple

$$\theta^3 + \theta^2\frac{\mathrm{QU}}{\omega} - \theta\frac{\mathrm{FU}}{\omega} - \frac{\mathrm{FU}\,\mathrm{QU}}{\omega^3} = 0,$$

et l'on en déduit, abstraction faite d'un facteur numérique,

$$\begin{aligned}
&(\xi^3 - \eta^3)^2(\eta^3 - \zeta^3)^2(\zeta^3 - \xi^3)^2\\
&\quad = \frac{1}{\omega^6}[\mathrm{FU}(\mathrm{QU})^4 - 2(1 - 20l^3 - 8l^6)(\mathrm{FU}\,\mathrm{QU})^2 + \omega^3(\mathrm{FU})^3],
\end{aligned}$$

et par suite le résultat ci-dessus.

» Peut-être ne serait-il pas sans intérêt de rapprocher la substitution précédente de la vôtre appropriée à l'équation $PU = 0$, et aussi d'envisager, à la place des équations $U = 0$ et $PU = 0$, celles-ci

$$aU + bHU = 0, \qquad aPU + bQU = 0. \text{ »}$$

Paris, 21 février 1863.

SUR UN NOUVEAU DÉVELOPPEMENT
EN SÉRIE DES FONCTIONS.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LVIII, 1864 (I), p. 93 et 266.

Les fonctions uniformes de plusieurs variables à périodes simultanées par lesquelles MM. Weierstrass et Riemann ont résolu le problème de l'inversion des intégrales de différentielles algébriques quelconques sont représentées, comme l'on sait, par le quotient de deux séries telles que

$$\sum e^{-\varphi(x+m,\, y+n,\, z+p,\, \ldots)},$$

où φ désigne une forme quadratique dont la partie réelle est définie et positive, le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs des nombres entiers $m, n, p, \ldots$ de $-\infty$ à $+\infty$. L'élément fondamental de ces nouvelles transcendantes, ainsi donné par l'expression

$$e^{-\varphi(x,\, y,\, z,\, \ldots)},$$

se présente dans toutes leurs relations analytiques, et acquiert par là une importance dont il est impossible de n'être pas frappé. La théorie des fonctions elliptiques, déjà assez avancée pour donner l'idée de ce qu'on doit attendre de ces transcendantes à plusieurs variables, justifie particulièrement, à l'égard de l'expression e^{-x^2}, ce caractère d'élément essentiel dans l'expression de leurs propriétés, et qu'on ne peut, en quelque sorte, perdre de vue dans les recherches auxquelles elles conduisent. C'est ce qui m'a amené à cette remarque, que les exponentielles e^{-x^2} et $e^{-\varphi(x, y, z, \ldots)}$ donnent naissance, comme le radical

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}},$$

et l'expression

$$\left[1 - 2\alpha\left(xy + \cos\theta\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) + \alpha^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

qui joue le principal rôle dans plusieurs des plus importantes questions de la *Mécanique céleste,* à un système de polynomes entiers, pouvant servir au développement des fonctions d'un nombre quelconque de variables. Mais, tandis que les fonctions de Legendre et de Laplace conduisent à des développements où les variables sont renfermées dans les limites -1 et $+1$, il sera nécessaire ici d'embrasser toute l'étendue des valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$; on verra, du reste, entre les propriétés d'expressions d'origine si différente, l'analogie la plus complète. Je commencerai, afin de la mettre dans tout son jour, par le cas des fonctions d'une seule variable et des polynomes semblables à X_n qui se tirent de l'exponentielle e^{-x^2}.

I.

Désignons par $e^{-x^2}U_n$ la dérivée d'ordre n de e^{-x^2}, de sorte qu'on ait successivement

$$\begin{aligned}
U_0 &= 1,\\
U_1 &= -2x,\\
U_2 &= 4x^2 - 2,\\
U_3 &= -8x^3 + 12x,\\
U_4 &= 16x^4 - 48x^2 + 12,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et, en général,

$$(-1)^n U_n = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2x)^{n-6} + \ldots,$$

ou, sous une autre forme,

$$\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n}U_n}{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)} = 1 - nx^2 + \frac{n(n-2)}{1.2.3.4}2^2x^4 - \frac{n(n-2)(n-4)}{1.2.3.4.5.6}2^3x^6 + \frac{n(n-2)(n-4)(n-6)}{1.2.3.4.5.6.7.8}2^4x^8 - \ldots,$$

quand n est pair, et

$$\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}U_n}{2n(n-1)\ldots\left(\frac{n+1}{2}\right)} = x - \frac{n-1}{1.2.3}2x^3 + \frac{(n-1)(n-3)}{1.2.3.4.5}2^2x^5 - \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{1.2.3.4.5.6.7}2^3x^7 + \ldots,$$

quand n est impair.

Cela posé, on démontrera aisément les propositions suivantes :

1. Trois polynomes consécutifs U_{n+1}, U_n, U_{n-1} sont liés par la relation

$$U_{n+1} + 2xU_n + 2nU_{n-1} = 0$$

et, par suite, peuvent être considérés comme les réduites successives de la fraction continue

$$-\cfrac{1}{2x - \cfrac{2}{2x - \cfrac{4}{2x - \cfrac{6}{2x - \ldots}}}}$$

On a de plus

$$\frac{dU_n}{dx} = -2nU_{n-1},$$

et l'on en conclut l'équation du second ordre

$$\frac{d^2U_n}{dx^2} - 2x\frac{dU_n}{dx} + 2nU_n = 0.$$

2. L'équation $U_n = 0$ a toutes ses racines réelles; ces racines sont en valeur absolue comprises entre les limites $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sqrt{\frac{n^2-n}{2}}$.

3. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} U_n\,dx$ est nulle, quel que soit n, sauf $n=0$, et la suivante $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} U_n U_{n'}\,dx$ est nulle quand n est différent de n'. Pour $n = n'$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} U_n^2\,dx = 2.4.6\ldots 2n.\sqrt{\pi}.$$

4. Tout polynome entier $F(x)$ du degré n peut être exprimé ainsi

$$F(x) = A_0 U_0 + A_1 U_1 + \ldots + A_n U_n,$$

les quantités $A_0, A_1, \ldots$ étant des constantes. Il suffit, en effet, de remarquer qu'on a pour une puissance quelconque

$$(-2x)^n = U_n + \frac{n(n-1)}{1} U_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} U_{n-4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3} U_{n-6} + \ldots,$$

et en général il en est de même de toute fonction $F(x)$ en prenant

$$A_n = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n.\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} U_n F(x)\,dx.$$

Un des caractères de ces développements consistera en ce qu'ils gardent la même forme après la différentiation et l'intégration; on a en effet

$$F(x) = \sum A_n U_n,$$

$$F'(x) = -2 \sum (n+1) A_{n+1} U_n,$$

$$\int F(x)\,dx = -\frac{1}{2} \sum \frac{A_{n-1}}{n} U_n.$$

5. En particulier, on obtiendra

$$\cos 2\omega x = e^{-\omega^2}\left(U_0 - \frac{\omega^2}{1.2} U_2 + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} U_4 - \ldots\right),$$

$$\sin 2\omega x = -e^{-\omega^2}\left(\frac{\omega}{1} U_1 - \frac{\omega^3}{1.2.3} U_3 + \frac{\omega^5}{1.2.3.4.5} U_5 - \ldots\right).$$

Ces divers résultats se retrouveront d'ailleurs à l'égard des fonctions plus générales qu'on tirerait des dérivées successives de l'expression e^{-ax^2}, que j'ai reconnu indispensable d'employer dans certaines circonstances. Sans m'y arrêter en ce moment, j'arrive aux polynomes analogues à U_n, et qui renferment un nombre quelconque de variables (¹).

(¹) En posant $x = 2\cos\varphi$, les quantités $V_n = 2\cos n\varphi$, $U_n = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$ seront aussi des polynomes du degré n en x, tels que les intégrales

$$\int_{-2}^{+2} V_n V_{n'} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{et} \quad \int_{-2}^{+2} U_n U_{n'} \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$$

seront nulles ou égales à 2π suivant que n est différent de n' ou lui est égal. Ces polynomes satisfont aux équations différentielles

$$(x^2-4)\frac{d^2 V_n}{dx^2} + x\frac{dV_n}{dx} - n^2 V_n = 0,$$

$$(x^2-4)\frac{d^2 U_n}{dx^2} + 2(x+1)\frac{dU_n}{dx} - n(n+1) U_n = 0,$$

dont la première est donnée dans l'*Algèbre supérieure* de M. Serret. On peut également les considérer comme les dénominateurs des réduites successives des fractions continues suivantes :

$$\frac{2}{\sqrt{x^2-4}} = \cfrac{2}{x - \cfrac{2}{x - \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{x - \ddots}}}}$$

et

$$\sqrt{\frac{x-2}{x+2}} = 1 - \cfrac{2}{x + 1 - \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{x - \ddots}}}$$

Je n'ai pas besoin enfin de rappeler les polynomes $P_l^{(n)}$ de M. Lamé dont les propriétés ont été exposées avec tant de simplicité et d'élégance, par l'illustre géomètre, dans son Ouvrage sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes.