ment qu'ils se rattachent immédiatement à la fonction $\Phi(z)$ elle-même par l'équation

$$\int_0^1 \frac{\Phi'(p+2iK't)}{\Phi(p+2iK't)}\,dt - \int_0^1 \frac{\Phi'(p+2Kt)}{\Phi(p+2Kt)}\,dt = \frac{\pi}{2KK'}(\alpha K + \beta i K').$$

Voici maintenant les conséquences qui en résultent. Ayant

$$H(z+\Sigma\zeta) = H(z+\Sigma\zeta' + 2\alpha K + 2\beta i K'),$$

on en tire

$$H(z+\Sigma\zeta) = (-1)^{\alpha+\beta} H(z+\Sigma\zeta')\, e^{-\frac{i\pi}{K}(\beta z + \beta^2 i K')},$$

ce qu'on peut écrire

$$(-1)^{\alpha+\beta} q^{\beta^2} \frac{H(z+\Sigma\zeta)}{H(z+\Sigma\zeta')} = e^{-\frac{i\pi}{K}\beta z}.$$

Remplaçant donc le facteur exponentiel

$$e^{Cz} = e^{-\frac{i\pi}{K}\beta z},$$

qui figure dans l'expression de $\Phi(z)$, par ce rapport de fonctions H, et posant

$$(-1)^{\alpha+\beta} q^{\beta^2} A = \mathfrak{a},$$

il viendra

$$\Phi(z) = \mathfrak{a}\,\frac{H(z-\zeta_1)\,H(z-\zeta_2)\ldots H(z+\Sigma\zeta)}{H(z-\zeta'_1)\,H(z-\zeta'_2)\ldots H(z+\Sigma\zeta')}.$$

Or on reconnaît au numérateur et au dénominateur de $\Phi(z)$ les expressions que nous avons déjà employées en démontrant le théorème d'Abel sur l'addition des arguments. Si le nombre n est impair par exemple, l'expression

$$\frac{H(z-\zeta_1)\,H(z-\zeta_2)\ldots H(z+\Sigma\zeta)}{\Theta^{n+1}(z)}$$

est celle qui a été considérée page 184, et qui s'exprime ainsi

$$\varphi(z) = F(x^2) + \frac{dx}{dz}\,x F_1(x^2),$$

$F(x)$ et $F_1(x)$ désignant des polynomes de degrés $\frac{n+1}{2}$ et $\frac{n-3}{2}$, et x pouvant être pris égal à $\sin \operatorname{am} z$, $\cos \operatorname{am} z$, ou $\Delta \operatorname{am} z$. Dans le cas de n pair, elle coïncide avec la fonction désignée page 184,

par $\varphi_1(x)$, et l'on a alors, en désignant par $F(x)$ et $f(x)$ deux polynomes entiers en x respectivement des degrés $\frac{n}{2}$ et $\frac{n-2}{2}$,

$$\frac{H(z-\zeta_1)\,H(z-\zeta_2)\ldots H(z+\Sigma\zeta)}{\Theta^{n+1}(z)} = \sin \operatorname{am} z\, F(\sin^2 \operatorname{am} z) + \frac{d \sin \operatorname{am} z}{dz}\, f(\sin^2 \operatorname{am} z).$$

On voit donc que $\Phi(z)$ est donné par le quotient de deux expressions de cette nature, et c'est précisément dans la réduction de la fonction doublement périodique à $\sin \operatorname{am} z$ et à sa dérivée que consiste la proposition que nous avons en vue d'établir.

La démonstration que nous venons de donner, reposant en entier sur l'expression générale d'une fonction doublement périodique $F(x)$, que nous avons précédemment obtenue, savoir :

$$F(x) = C + R_1 \frac{H'(x-\zeta_1)}{H(x-\zeta_1)} + R_2 \frac{H'(x-\zeta_2)}{H(x-\zeta_2)} + \ldots + R_\mu \frac{H'(x-\zeta_\mu)}{H(x-\zeta_\mu)},$$

nous indiquerons encore un moyen d'y parvenir immédiatement, en partant de l'équation

$$a\int_0^1 f(p+at)\,dt + b\int_0^1 f(p+a+bt)\,dt - a\int_0^1 f(p+b+at)\,dt - b\int_0^1 f(p+bt)\,dt = 2i\pi\Delta.$$

Soient, comme plus haut,

$$a = 2K, \qquad b = 2iK',$$

et prenons

$$f(z) = F(z)\,\frac{H'(x-z)}{H(x-z)}.$$

Par la définition seule de la fonction $H(z)$, on a

$$\left\{\begin{aligned} \frac{H'(z+2K)}{H(z+2K)} &= \frac{H'(z)}{H(z)}, \\ \frac{H'(z-2iK')}{H(z-2iK')} &= -\frac{H'(z)}{H(z)} + \frac{i\pi}{K}, \end{aligned}\right.$$

et il en résulte

$$\begin{aligned} f(z+2K) &= f(z), \\ f(z+2iK') &= f(z) + \frac{i\pi}{K}F(z), \end{aligned}$$

de sorte que l'équation précédente se réduit à

$$\int_0^1 \mathrm{F}(p + 2\mathrm{K}t)\,dt = -\Delta.$$

Or les divers résidus qui entrent dans Δ se rapportent d'une part à $z = \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\mu$, et de l'autre à $z = x$; les premiers, s'ils correspondent, comme nous l'avons supposé, à des racines simples, donnent pour somme

$$\mathrm{R}_1 \frac{\mathrm{H}'(x-\zeta_1)}{\mathrm{H}(x-\zeta_1)} + \mathrm{R}_2 \frac{\mathrm{H}'(x-\zeta_2)}{\mathrm{H}(x-\zeta_2)} + \ldots + \mathrm{R}_\mu \frac{\mathrm{H}'(x-\zeta_\mu)}{\mathrm{H}(x-\zeta_\mu)},$$

et le résidu relatif à $z = x$, racine simple de $\mathrm{H}(x - z) = 0$, sera évidemment $-\mathrm{F}(x)$. L'expression de Δ qui suit de là donne immédiatement la relation

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x) = \int_0^1 \mathrm{F}(p + 2\mathrm{K}t)\,dt &+ \mathrm{R}_1 \frac{\mathrm{H}'(x-\zeta_1)}{\mathrm{H}(x-\zeta_1)} \\ &+ \mathrm{R}_2 \frac{\mathrm{H}'(x-\zeta_2)}{\mathrm{H}(x-\zeta_2)} + \ldots + \mathrm{R}_\mu \frac{\mathrm{H}'(x-\zeta_\mu)}{\mathrm{H}(x-\zeta_\mu)}.\end{aligned}$$

J'ajouterai encore une remarque sur cette formule que j'écrirai, pour abréger, comme il suit :

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{C} + \sum \mathrm{R} \frac{\mathrm{H}'(x-\zeta)}{\mathrm{H}(x-\zeta)}.$$

En employant le théorème relatif à l'addition des arguments dans la fonction de seconde espèce [1], on trouvera aisément la relation

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{H}'(x-\zeta)}{\mathrm{H}(x-\zeta)} = \frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)} - \frac{\mathrm{H}'(\zeta)}{\mathrm{H}(\zeta)} &- \operatorname{cotang} \operatorname{am} x \, \Delta \operatorname{am} x \\ &+ \frac{\sin \operatorname{am} x}{\sin \operatorname{am} \zeta \sin \operatorname{am}(x-\zeta)},\end{aligned}$$

---

[1] C'est la quantité $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$ qui entre dans $\mathrm{Z}(x)$, mais on peut lui substituer $\frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)}$, à l'aide de la relation $\sin \operatorname{am} x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}$, qui donne, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres,

$$\frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \operatorname{cotang} \operatorname{am} x \, \Delta \operatorname{am} x.$$

d'où résulte en substituant dans l'expression de $\mathrm{F}(x)$, et ayant égard à la condition

$$\Sigma \mathrm{R} = 0,$$

cette nouvelle formule

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{C} - \sum \mathrm{R} \frac{\mathrm{H}'(\zeta)}{\mathrm{H}(\zeta)} + \sum \frac{\mathrm{R} \sin \operatorname{am} x}{\sin \operatorname{am} \zeta \sin \operatorname{am}(x-\zeta)},$$

ou bien

$$\mathrm{F}(x) = \text{const.} + \sum \frac{\mathrm{R} \sin \operatorname{am} x}{\sin \operatorname{am} \zeta \sin \operatorname{am}(x-\zeta)}.$$

C'est donc encore la réduction de la fonction à double période à $\sin \operatorname{am} x$ et à sa dérivée; mais la méthode plus rapide qui nous y conduit ne donne pas, comme la précédente, la relation importante, et que nous avons dû tenir à ne pas omettre, savoir :

$$\Sigma \zeta - \Sigma \zeta' = 2(\alpha \mathrm{K} + \beta i \mathrm{K}').$$

Cette nouvelle formule résulte d'ailleurs immédiatement de la seule condition

$$\Sigma \mathrm{R} = 0,$$

comme nous allons encore le faire voir.

Considérez en effet la fonction

$$f(z) = \frac{\mathrm{F}(z)}{\sin \operatorname{am} z \sin \operatorname{am}(x-z)},$$

dont les périodes seront $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$. La somme de ses résidus comprendra d'une part ceux qui se rapportent aux racines de l'équation

$$\frac{1}{\mathrm{F}(x)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum \frac{\mathrm{R}}{\sin \operatorname{am} \zeta \sin \operatorname{am}(x-\zeta)},$$

et puis les résidus relatifs aux deux équations

$$\sin \operatorname{am} z = 0,$$

$$\sin \operatorname{am}(x - z) = 0.$$

Or, dans l'intervalle des périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$, on n'aura d'autres racines que $z = 0$, $z = x$, auxquelles correspondront les résidus

$$\frac{F(0)}{\sin \operatorname{am} x}, \qquad -\frac{F(x)}{\sin \operatorname{am} x};$$

on a, par conséquent,

$$\sum \frac{R}{\sin \operatorname{am} \zeta \sin \operatorname{am}(x-\zeta)} + \frac{F(0)}{\sin \operatorname{am} x} - \frac{F(x)}{\sin \operatorname{am} x} = 0,$$

d'où

$$F(x) = F(0) + \sum \frac{R \sin \operatorname{am} x}{\sin \operatorname{am} \zeta \sin \operatorname{am}(x-\zeta)}.$$

D'une manière toute semblable on trouvera relativement à une fonction $\mathfrak{F}(x)$, satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(x+2K) &= -\mathfrak{F}(x), \\ \mathfrak{F}(x+2iK') &= \mathfrak{F}(x), \end{aligned}$$

l'expression très simple

$$\mathfrak{F}(x) = \sum \frac{R}{\sin \operatorname{am}(x-\zeta)},$$

où figurent seulement les racines ζ qui sont renfermées dans l'intervalle $2K$ et $2iK'$, et exprimées par la formule

$$\zeta = p + 2Kt + 2iK'u,$$

t et u étant moindres que l'unité.

Nous nous arrêterons à ce point dans cette Note, pensant ainsi avoir à peu près complètement esquissé l'ensemble des notions élémentaires de la théorie des fonctions elliptiques qui précède l'étude de la transformation.

EXTRAIT D'UNE LETTRE A L'ÉDITEUR

SUR LA TRANSFORMATION

DU

TROISIÈME ORDRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Journal de Crelle, t. 60, 1862, p. 304.

« ... Soit une forme biquadratique et son covariant du quatrième degré, à savoir :

$$\begin{aligned} f &= ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4b'xy^3 + a'y^4, \\ g &= (ac-b^2)x^4 + 2(ab'-bc)x^3y + (aa'+2bb'-3c^2)x^2y^2 \\ &\quad + 2(a'b-b'c)xy^3 + (a'c-b'^2)y^4. \end{aligned}$$

En posant, suivant l'usage,

$$\begin{aligned} I &= aa' - 4bb' + 3c^2, \\ J &= aca' + 2bcb' - ab'^2 - a'b^2 - c^3, \end{aligned}$$

je considère ces deux covariants, qui sont encore du quatrième degré,

$$Ig - Jf \quad \text{et} \quad Ig + 3Jf,$$

et qui conduisent à la relation remarquable que voici :

» *Nommons* F *et* G *ce que deviennent f et g quand on y remplace x et y par* $-\frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial y}$ *et* $\frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial x}$, *on aura*

$$IG - JF = g^2(Ig + 3Jf).$$

» Il en résulte, d'après le principe algébrique de Jacobi pour la transformation des fonctions elliptiques, qu'en supposant $y=1$ et x seule variable, et faisant, pour abréger,

$$\Delta(x) = \mathrm{I}g - \mathrm{J}f,$$
$$\Delta'(x) = \mathrm{I}g + 3\mathrm{J}f,$$

on aura

$$\frac{dz}{\sqrt{\Delta(z)}} = \mathrm{M}\frac{dx}{\sqrt{\Delta'(x)}},$$

z étant lié à x par cette relation du troisième degré

$$z = -\frac{bx^3 + 3cx^2 + 3b'x + a'}{ax^3 + 3bx^2 + 3cx + b'},$$

et M désignant une constante.

» C'est donc la transformation du troisième ordre qui s'offre comme conséquence de la théorie algébrique des formes biquadratiques.

» Paris, mai 1861. »

SUR

LES THÉORÈMES DE M. KRONECKER

RELATIFS AUX FORMES QUADRATIQUES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LV, 1862 (II), p. 11-85 et *Journal de Liouville*, t. IX (2e série), 1864, p. 145.

La théorie des fonctions elliptiques présente deux points principaux où elle vient se lier à l'Arithmétique et spécialement à la théorie des formes quadratiques à deux indéterminées de déterminant négatif. L'un s'offre lorsqu'on développe en séries simples de sinus et de cosinus des quotients de fonctions Θ, et ne suppose que les considérations les plus élémentaires de la théorie; l'autre tient à l'étude beaucoup plus profonde et difficile de ces équations algébriques à coefficients entiers dont dépendent les modules qui donnent lieu à la multiplication complexe. Si différents et éloignés que soient ces deux points de vue, ils présentent néanmoins un ensemble de résultats communs : nous voulons parler des déterminations nouvelles du nombre des classes de même déterminant, découvertes par M. Kronecker, et qui, à bien juste titre, ont attiré l'attention des géomètres. Dans une Lettre communiquée par M. Liouville à l'Académie l'année dernière, j'ai rapidement indiqué de quelle manière ces résultats pouvaient s'établir par la considération élémentaire du développement en série de sinus et de cosinus. C'est sur cette méthode que je me propose de revenir pour en faire une étude plus complète, en mieux fixer le caractère et les limites, et surtout approfondir la nature des nouveaux éléments arithmétiques qu'elle met en jeu et qui lui semblent propres. Elle repose essentiellement sur l'emploi des expressions en séries de deux systèmes différents de fonctions qu'il est nécessaire de donner avant d'en exposer le principe.

I.

Le premier de ces systèmes est, à quelques exceptions près, l'ensemble des fonctions doublement périodiques considérées par Jacobi dans le § 39 des *Fundamenta*. En écrivant, pour abréger,

$$\Theta,\quad \Theta_1,\quad \mathrm{H},\quad \mathrm{H}_1$$

au lieu de

$$\Theta\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right),\quad \Theta_1\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right),\quad \mathrm{H}\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right),\quad \mathrm{H}_1\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right)$$

et

$$\theta,\quad \theta_1,\quad \eta$$

au lieu de

$$\Theta(0),\quad \Theta_1(0),\quad \mathrm{H}_1(0),$$

de sorte qu'on ait

$$\theta = \sqrt{\frac{2k'\mathrm{K}}{\pi}} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - 2q^{25} + \ldots,$$

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \ldots,$$

$$\eta = \sqrt{\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}} = 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + 2\sqrt[4]{q^{49}} + \ldots,$$

je les présenterai groupées de la manière suivante :

1. $$\eta\theta_1\frac{\mathrm{H}}{\Theta} = \frac{4\sqrt{q}\sin x}{1-q} + \frac{4\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3} + \frac{4\sqrt{q^5}\sin 5x}{1-q^5} + \ldots,$$

2. $$\eta\theta_1\frac{\Theta}{\mathrm{H}} = \frac{1}{\sin x} + \frac{4q\sin x}{1-q} + \frac{4q^3\sin 3x}{1-q^3} + \frac{4q^5\sin 5x}{1-q^5} + \ldots,$$

3. $$\eta\theta_1\frac{\mathrm{H}_1}{\Theta} = \frac{4\sqrt{q}\cos x}{1-q} - \frac{4\sqrt{q^3}\cos 3x}{1-q^3} + \frac{4\sqrt{q^5}\cos 5x}{1-q^5} - \ldots,$$

4. $$\eta\theta_1\frac{\Theta_1}{\mathrm{H}_1} = \frac{1}{\cos x} + \frac{4q\cos x}{1-q} - \frac{4q^3\cos 3x}{1-q^3} + \frac{4q^5\cos 5x}{1-q^5} - \ldots;$$

5. $$\eta\theta\frac{\mathrm{H}}{\Theta_1} = \frac{4\sqrt{q}\sin x}{1+q} - \frac{4\sqrt{q^3}\sin 3x}{1+q^3} + \frac{4\sqrt{q^5}\sin 5x}{1+q^5} + \ldots,$$

6. $$\eta\theta\frac{\Theta_1}{\mathrm{H}} = \frac{1}{\sin x} - \frac{4q\sin x}{1+q} - \frac{4q^3\sin 3x}{1+q^3} - \frac{4q^5\sin 5x}{1+q^5} - \ldots,$$

7. $$\eta\theta\frac{\mathrm{H}_1}{\Theta} = \frac{4\sqrt{q}\cos x}{1+q} + \frac{4\sqrt{q^3}\cos 3x}{1+q^3} + \frac{4\sqrt{q^5}\cos 5x}{1+q^5} + \ldots,$$

8. $$\eta\theta\frac{\Theta}{\mathrm{H}_1} = \frac{1}{\cos x} - \frac{4q\cos x}{1+q} + \frac{4q^3\cos 3x}{1+q^3} - \frac{4q^5\cos 5x}{1+q^5} + \ldots;$$

9. $$\theta\theta_1\frac{\Theta_1}{\Theta} = 1 + \frac{4q\cos 2x}{1+q^2} + \frac{4q^2\cos 4x}{1+q^4} + \frac{4q^3\cos 6x}{1+q^6} + \ldots,$$

10. $$\theta\theta_1\frac{\Theta}{\Theta_1} = 1 - \frac{4q\cos 2x}{1+q^2} + \frac{4q^2\cos 4x}{1+q^4} - \frac{4q^3\cos 6x}{1+q^6} + \ldots,$$

11. $$\theta\theta_1\frac{\mathrm{H}_1}{\mathrm{H}} = \cot x - \frac{4q^2\sin 2x}{1+q^2} - \frac{4q^4\sin 4x}{1+q^4} - \frac{4q^6\sin 6x}{1+q^6} - \ldots,$$

12. $$\theta\theta_1\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}_1} = \operatorname{tang} x - \frac{4q^2\sin 2x}{1+q^2} + \frac{4q^4\sin 4x}{1+q^4} - \frac{4q^6\sin 6x}{1+q^6} + \ldots;$$

13. $$\theta^2\frac{\Theta_1\mathrm{H}_1}{\Theta\mathrm{H}} = \cot x - \frac{4q\sin 2x}{1+q} - \frac{4q^2\sin 4x}{1+q^2} - \frac{4q^3\sin 6x}{1+q^3} - \ldots,$$

14. $$\theta^2\frac{\Theta\mathrm{H}}{\Theta_1\mathrm{H}_1} = \operatorname{tang} x - \frac{4q\sin 2x}{1+q} + \frac{4q^2\sin 4x}{1+q^2} - \frac{4q^3\sin 6x}{1+q^3} + \ldots;$$

15. $$\theta_1^2\frac{\Theta\mathrm{H}_1}{\Theta_1\mathrm{H}} = \cot x + \frac{4q\sin 2x}{1-q} - \frac{4q^2\sin 4x}{1+q^2} + \frac{4q^3\sin 6x}{1-q^3} + \ldots,$$

16. $$\theta_1^2\frac{\Theta_1\mathrm{H}}{\Theta\mathrm{H}_1} = \operatorname{tang} x + \frac{4q\sin 2x}{1-q} + \frac{4q^2\sin 4x}{1+q^2} + \frac{4q^3\sin 6x}{1-q^3} + \ldots;$$

17. $$\eta^2\frac{\mathrm{H}\mathrm{H}_1}{\Theta\Theta_1} = \frac{8q\sin 2x}{1-q^2} + \frac{8q^3\sin 6x}{1-q^6} + \frac{8q^5\sin 10x}{1-q^{10}} + \ldots,$$

18. $$\eta^2\frac{\Theta\Theta_1}{\mathrm{H}\mathrm{H}_1} = \frac{1}{\sin x\cos x} + \frac{8q^2\sin 2x}{1-q^2} + \frac{8q^6\sin 6x}{1-q^6} + \frac{8q^{10}\sin 10x}{1-q^{10}} + \ldots.$$

Je joindrai en outre à ces formules celles qui concernent la fonction seconde espèce, savoir :

19. $$\theta_1^2\frac{\Theta'}{\Theta} = \frac{4q\sin 2x}{1-q^2} + \frac{4q^2\sin 4x}{1-q^4} + \frac{4q^3\sin 6x}{1-q^6} + \ldots,$$

20. $$\theta_1^2\frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}} = \cot x + \frac{4q^2\sin 2x}{1-q^2} + \frac{4q^4\sin 4x}{1-q^4} + \frac{4q^6\sin 6x}{1-q^6} + \ldots,$$

21. $$\theta_1^2\frac{\Theta'_1}{\Theta_1} = \frac{4q\sin 2x}{1-q^2} + \frac{4q^2\sin 4x}{1-q^4} + \frac{4q^3\sin 6x}{1-q^6} + \ldots,$$

22. $$\theta_1^2\frac{\mathrm{H}'_1}{\mathrm{H}_1} = \operatorname{tang} x + \frac{4q^2\sin 2x}{1-q^2} + \frac{4q^4\sin 4x}{1-q^4} + \frac{4q^6\sin 6x}{1-q^6} + \ldots.$$

Le second système comprend le développement en série de quotients dont le dénominateur est l'une des fonctions Θ, le numérateur le produit de deux autres et qui, par suite, ne représentent plus de fonctions doublement périodiques. En supposant différents l'un de l'autre les facteurs du numérateur et posant, pour abréger,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_n &= q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2n-1)^2}{4}},\\
\mathfrak{B}_n &= 1 + 2q^{-1} + 2q^{-4} - \ldots + 2q^{-(n-1)^2},\\
\mathfrak{C}_n &= 1 - 2q^{-1} + 2q^{-4} - \ldots + 2(-q)^{-(n-1)^2},
\end{aligned}$$

on a ce premier groupe de fonctions, savoir :

$$1.\quad \eta\,\frac{\mathrm{H}\mathrm{H}_1}{\Theta} = \sum_{n=1} 4\sin 2nx\, q^{n^2}\,\mathfrak{A}_n,$$

$$2.\quad \eta\,\frac{\mathrm{H}\mathrm{H}_1}{\Theta_1} = \sum_{n=1} 4\sin 2nx(-1)^{n-1} q^{n^2}\,\mathfrak{A}_n,$$

$$3.\quad \eta\,\frac{\Theta\Theta_1}{\mathrm{H}} = \frac{1}{\sin x} + \sum_{n=1} 4(\sin 2n+1)x\, q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\,\mathfrak{A}_n,$$

$$4.\quad \eta\,\frac{\Theta\Theta_1}{\mathrm{H}_1} = \frac{1}{\cos x} + \sum_{n=1} 4\cos(2n+1)x(-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\,\mathfrak{A}_n,$$

$$5.\quad \theta_1\,\frac{\Theta_1\mathrm{H}}{\mathrm{H}_1} = \operatorname{tang} x + \sum_{n=1} 2\sin 2nx(-1)^{n-1} q^{n^2}\,\mathfrak{B}_n,$$

$$6.\quad \theta_1\,\frac{\Theta\mathrm{H}_1}{\mathrm{H}} = \cot x + \sum_{n=1} 2\sin 2nx\, q^{n^2}\,\mathfrak{B}_n,$$

$$7.\quad \theta_1\,\frac{\Theta_1\mathrm{H}}{\Theta} = \sum_{n=0} 2\sin(2n+1)x\, q^{\frac{2(n+1)^2}{4}}\,\mathfrak{B}_{n+1},$$

$$8.\quad \theta_1\,\frac{\Theta\mathrm{H}_1}{\Theta_1} = \sum_{n=0} 2\cos(2n+1)x(-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\,\mathfrak{B}_{n+1},$$

$$9.\quad \theta\,\frac{\Theta\mathrm{H}}{\mathrm{H}_1} = \operatorname{tang} x - \sum_{n=1} 2\sin 2nx\, q^{n^2}\,\mathfrak{C}_n,$$

$$10.\quad \theta\,\frac{\Theta_1\mathrm{H}_1}{\mathrm{H}} = \cot x + \sum_{n=1} 2\sin 2nx(-1)^n q^{n^2}\,\mathfrak{C}_n,$$

$$11.\quad \theta\,\frac{\Theta\mathrm{H}}{\Theta_1} = \sum_{n=0} 2\sin(2n+1)x\, q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\,\mathfrak{C}_{n+1},$$

$$12.\quad \theta\,\frac{\Theta_1\mathrm{H}_1}{\Theta} = \sum_{n=0} 2\cos(2n+1)x(-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\,\mathfrak{C}_{n+1}.$$

Si l'on suppose ensuite que les deux facteurs du numérateur soient égaux, on a un second groupe de douze fonctions où figurent les expressions suivantes. Posons

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z} = {} & 4\cos 2xq\left(q^{-\frac{1}{4}}\right)\\
& -4\cos 4xq^4\left(q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}}\right)\\
& +4\cos 6xq^9\left(q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + q^{-\frac{25}{4}}\right)\\
& -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{U} = \frac{1}{\sin x} & - 4\sin 3xq^{\frac{9}{4}}\left(q^{-\frac{1}{4}}\right)\\
& + 4\sin 5xq^{\frac{25}{4}}\left(q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}}\right)\\
& - \sin 7xq^{\frac{49}{4}}\left(q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + q^{-\frac{25}{4}}\right)\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En désignant par Z_1 et U_1 ce que deviennent Z et U lorsqu'on met $\frac{\pi}{2} - x$ au lieu de x, on aura

$$13.\quad \eta\theta_1\,\frac{\mathrm{H}^2}{\Theta} = \mathrm{A}\Theta - \theta\mathrm{Z},$$

$$14.\quad \eta\theta_1\,\frac{\Theta^2}{\mathrm{H}} = \mathrm{A}\mathrm{H} + \theta\mathrm{U},$$

$$15.\quad \eta\theta_1\,\frac{\mathrm{H}_1^2}{\Theta_1} = \mathrm{A}\Theta_1 - \theta\mathrm{Z}_1,$$

$$16.\quad \eta\theta_1\,\frac{\Theta_1^2}{\mathrm{H}_1} = \mathrm{A}\mathrm{H}_1 + \theta\mathrm{U}_1,$$

$$17.\quad \eta\theta\,\frac{\mathrm{H}^2}{\Theta_1} = \mathrm{B}\Theta_1 + \theta_1\mathrm{Z}_1,$$

$$18.\quad \eta\theta\,\frac{\Theta_1^2}{\mathrm{H}} = -\mathrm{B}\mathrm{H} + \theta_1\mathrm{U},$$

$$19.\quad \eta\theta\,\frac{\mathrm{H}_1^2}{\Theta} = \mathrm{B}\Theta + \theta_1\mathrm{Z},$$

$$20.\quad \eta\theta\,\frac{\Theta^2}{\mathrm{H}_1} = -\mathrm{B}\mathrm{H}_1 + \theta_1\mathrm{U}_1,$$

$$21.\quad \theta\theta_1\,\frac{\Theta_1^2}{\Theta} = \mathrm{C}\Theta + \eta\mathrm{Z},$$

$$22.\quad \theta\theta_1\,\frac{\mathrm{H}_1^2}{\mathrm{H}} = -\mathrm{C}\mathrm{H} + \eta\mathrm{U},$$

$$23.\quad \theta\theta_1\,\frac{\Theta^2}{\Theta_1} = \mathrm{C}\Theta_1 + \eta\mathrm{Z}_1,$$

$$24.\quad \theta\theta_1\,\frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{H}_1} = -\mathrm{C}\mathrm{H}_1 + \eta\mathrm{U}_1.$$

Les quantités A, B, C sont des constantes, savoir :

$$\begin{aligned} A &= \quad Z\,(0) = 4\sum a_n q^{\frac{1}{4}n}, \\ B &= -Z_1(0) = 4\sum (-1)^{\frac{n-3}{4}} a_n q^{\frac{1}{4}n}, \\ C &= \quad U_1(0) = 1 + 4\sum (-1)^{\frac{m}{2}} c_m q^m. \end{aligned}$$

Dans ces formules m est pair et $n \equiv 3 \pmod 4$, les coefficients a_n, c_m désignant les fonctions numériques définies par ces égalités

$$a_n = \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}}, \qquad c_m = \sum (-1)^{\frac{d'-1}{2}} - \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

où d représente tous les diviseurs impairs de n et de m inférieurs à leurs conjugués et d' les diviseurs impairs de m plus grands que leurs conjugués. On a d'ailleurs, en faisant $x = 0$ dans les équations 15, 16, 20, ces relations dont nous ferons usage plus tard :

$$\begin{cases} \eta^3 = A\theta_1 - B\theta, \\ \theta_1^3 = A\eta + C\theta, \\ \theta^3 = B\eta + C\theta_1. \end{cases}$$

Voici maintenant de quelle manière les deux systèmes de fonctions conduisent à la considération des formes quadratiques à deux indéterminées de déterminant négatif.

II.

Ayant, à cet effet, distingué quatre espèces de développements en série, suivant qu'ils se composent de termes en

$$\sin(2n+1)x, \qquad \cos(2n+1)x, \qquad \sin 2nx, \qquad \cos 2nx,$$

nous multiplierons entre elles toutes les fonctions du premier et du second système qui appartiennent à la même espèce, de manière que les produits obtenus ne comprennent que des termes en $\cos 2nx$. En intégrant ces produits entre les limites zéro et $\frac{\pi}{2}$ on donnera naissance à autant d'expressions fonctions de la seule quantité q, où le coefficient d'un terme quelconque q^Δ ou $q^{\frac{\Delta}{4}}$ dé-

pendra d'une certaine manière du nombre des classes quadratiques de déterminant $-\Delta$. Tel est donc le procédé analytique très simple qui, en établissant un lien entre les formes quadratiques de déterminant négatif et les transcendantes elliptiques, conduit à l'ensemble de résultats que nous allons passer en revue. Ces résultats d'ailleurs se classent naturellement d'après les intégrales définies de fonctions Θ, d'où ils sont tirés. Ainsi, en premier lieu, s'offrent les combinaisons obtenues en multipliant respectivement les équations 15, 18, 1, 2, 11 du premier système avec les équations 5, 1, 3, 7, 5 du second, et où l'intégration s'effectue d'elle-même, savoir :

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} (15,\ 5) & \theta_1^3 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta\, dx = \frac{\pi}{2}\,\theta_1^3, \\ (18,\ 1) & \eta^3 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta_1\, dx = \frac{\pi}{2}\,\eta^3, \\ (1,\ 3) & \theta_1\eta^2 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta_1\, dx = \frac{\pi}{2}\,\theta_1\eta^2, \\ (2,\ 7) & \eta\theta_1^2 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta_1\, dx = \frac{\pi}{2}\,\eta\theta_1^2, \\ (11,\ 5) & \theta\theta_1^2 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta_1\, dx = \frac{\pi}{2}\,\theta\theta_1^2. \end{cases}$$

Celles-ci seront étudiées ensuite, savoir :

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} (5,\ 7) \text{ et } (12,\ 1) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\theta\theta_1 \frac{H^2}{\Theta}\, dx = \frac{\pi}{2}\,A\theta, \\ (16,\ 2) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\theta_1^2 \frac{H^2}{\Theta}\, dx = \frac{\pi}{2}\,A\theta_1, \\ (17,\ 5) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta^2\theta_1 \frac{H^2}{\Theta}\, dx = \frac{\pi}{2}\,A\eta, \\ (13,\ 5) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2\theta_1 \frac{\Theta_1^2}{\Theta}\, dx = \frac{\pi}{2}\,C\theta, \\ (6,\ 7) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\theta\theta_1 \frac{\Theta_1^2}{\Theta}\, dx = \frac{\pi}{2}\,C\eta. \end{cases}$$

Elles sont, comme on voit, essentiellement distinctes, et toutes les autres de forme analytique semblable qu'on pourrait obtenir reproduiraient, en changeant suivant les cas le signe de q, les mêmes fonctions.

III.

Legendre, comme on sait, a le premier découvert par induction que le nombre des décompositions d'un entier en trois carrés dépendait d'une manière simple du nombre des classes quadratiques ayant pour déterminant ce même entier changé de signe, et Gauss a démontré ensuite ce résultat important dans ses *Recherches arithmétiques*. M. Kronecker a remarqué qu'on y est également amené par la théorie des fonctions elliptiques; mais la méthode du savant géomètre suppose, à son point de départ, et d'une manière essentielle, autant que je puis en juger, la notion arithmétique de classe, qu'il n'est pas nécessaire d'employer dans la voie que j'ai suivie. Si l'on ne distingue pas les représentations propres et impropres, il suffira, en effet, de la définition seule du système des formes réduites pour un déterminant donné; de sorte que ce théorème, dans l'enchaînement naturel des propositions de l'Arithmétique, pourra être placé dès le commencement et à côté des résultats qu'a obtenus Jacobi sur la décomposition en quatre carrés. Pour justifier cette observation, je présenterai en détail ce qui concerne la formation du cube de la fonction

$$\theta_1 = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots,$$

afin aussi de pouvoir me borner à l'égard des autres quantités η_1^3, $\theta_1\eta_1^2$, ..., contenues dans les formules (A), à donner seulement les résultats.

Considérons, à cet effet, les séries 15 et 5 du premier et du second système, dont il faut effectuer le produit, savoir :

$$\theta_1^2 \frac{\Theta \mathrm{H}_1}{\Theta_1 \mathrm{H}} = \cot x + \frac{4q \sin 2x}{1-q} - \frac{4q^2 \sin 4x}{1+q^2} + \frac{4q^3 \sin 6x}{1-q^3} - \ldots$$
$$= \cot x + \sum (-1)^{n-1} \frac{4q^n \sin 2nx}{1+(-q)^n},$$

et, en faisant comme précédemment,

$$\mathfrak{B}_n = 1 + 2q^{-1} + 2q^{-4} + \ldots + 2q^{-(n-1)^2},$$
$$\theta_1 \frac{\Theta_1 \mathrm{H}}{\mathrm{H}_1} = \operatorname{tang} x + \sum (-1)^{n-1} 2q^{n^2} \mathfrak{B}_n \sin 2nx.$$

Ce produit devant être ensuite intégré entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$, nous ferons usage de ces formules, qu'il est aisé d'obtenir,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot x \sin 2nx \, dx = \frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tang} x \sin 2nx \, dx = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2}.$$

On trouvera de cette manière, après avoir supprimé le facteur $\frac{\pi}{2}$,

$$\theta_1^3 = 1 + 4 \sum_{n=1} \frac{q^n}{1+(-q)^n} - 2 \sum_{n=1} (-1)^n q^{n^2} \mathfrak{B}_n + 4 \sum_{n=1} \frac{q^{n^2+n} \mathfrak{B}_n}{1+(-q)^n}.$$

Les deux premières séries qui se présentent dans cette expression se développent sans difficulté suivant les puissances de q. En désignant par m un nombre impair quelconque, par $\varphi(m)$ le nombre de ses diviseurs, on trouvera

$$\sum \frac{q^n}{1+(-q)^n} = \sum \varphi(m) q^m - \sum (\sigma - 3) \varphi(m) q^{2^\sigma m},$$
$$\sum (-1)^n q^{n^2} \mathfrak{B}_n = \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \varphi(m) q^m + \sum \varphi(m) q^{4m}$$
$$+ \sum (\sigma - 3) \varphi(m) q^{4 \cdot 2^\sigma m},$$

l'exposant σ prenant la série des valeurs 1, 2, 3, etc.

Pour la troisième, en remplaçant d'abord $\frac{1}{1+(-q)^n}$ par le développement $\sum\limits_{a=0} (-1)^{a(n+1)} q^{an}$, elle devient

$$\sum \frac{q^{n^2+n} \mathfrak{B}_n}{1+(-q)^n} = \sum (-1)^{a(n+1)} q^{n^2+n+an-b^2};$$

ce qui met en évidence dans l'exposant q le déterminant d'une forme quadratique (A, B, C), en posant

$$\mathrm{A} = n, \qquad \mathrm{B} = b, \qquad \mathrm{C} = n + 1 + a.$$

Laissant de côté pour un instant le facteur $(-1)^{a(n+1)}$, dont nous nous occuperons plus tard, observons que b doit recevoir les valeurs

$$0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \quad \ldots, \quad \pm(n-1);$$

de sorte que cette forme sera réduite, si l'on s'arrête à la limite $\pm\left(\frac{n}{2}\right)$, c'est-à-dire, pour plus de précision, $\pm\left(\frac{n}{2}-1\right)$ lorsque n sera pair, et $\pm\left(\frac{n-1}{2}\right)$ lorsque n sera impair. Ce premier groupe de valeurs, si l'on fait

$$n^2+n+an-b^2=\Delta,$$

donnera, et une seule fois, toutes les formes réduites de déterminant $-\Delta$, en exceptant les formes ambiguës (A, B, C) ou $2B=A$ et $C=A$, et parmi les formes $(A, 0, C)$, le seul cas de $A=C$, qui se présente quand Δ est un carré. Dans ces divers cas, en effet, on serait conduit pour le nombre a à une valeur négative.

Considérons ensuite la seconde série des valeurs de b, savoir :

$$\pm b=\frac{n}{2}, \quad \frac{n}{2}+1, \quad \ldots, \quad n-1,$$

lorsque n est pair, et

$$\pm b=\frac{n+1}{2}, \quad \frac{n+1}{2}+1, \quad \ldots, \quad n-1,$$

lorsque n est impair. Soit ε une quantité égale à l'unité en valeur absolue et de même signe que b; en faisant la substitution

$$x=\varepsilon X-Y, \qquad y=\varepsilon Y$$

dans la forme

$$nx^2+2bxy+(n+1+a)y^2,$$

on trouvera

$$nX^2-2\varepsilon(n-b\varepsilon)XY+(2n-2b\varepsilon+1+a)Y^2,$$

et cette transformée, que nous désignerons par $(A, -\varepsilon B, C)$, en posant

$$(1) \qquad A=n, \qquad B=n-b\varepsilon, \qquad C=2n-2b\varepsilon+1+a,$$

remplira les conditions $2B<A$, $2B<C$, le premier terme étant tantôt plus grand, tantôt plus petit que le dernier C. On voit donc maintenant se produire une série de formes en nombre double des

formes réduites, si l'on excepte celles-ci : $(A, 0, C)$, qui ont été précédemment obtenues pour $b=0$. En effet, on tire des équations (1) :

$$(2) \qquad n=A, \qquad b=\varepsilon(A-B), \qquad a=C-2B-1,$$

et, en permutant A et C,

$$(3) \qquad n=C, \qquad b=\varepsilon(C-B), \qquad a=A-2B-1.$$

Ainsi chaque forme réduite non ambiguë donne effectivement deux systèmes différents (n, b, a), où n et a sont positifs et b compris entre les limites assignées. Mais, à l'égard des deux formes ambiguës $(A, \varepsilon B, A)$, les équations (2) et (3) coïncident, et pour celles-ci : $(2B, \varepsilon B, C)$ les équations (3) conduisant à une valeur négative de a, on n'a de même et pour chacune d'elles qu'un seul et unique système de nombres, n, b, a. Si l'on avait d'ailleurs à la fois

$$2B=A=C,$$

on ne pourrait employer ni les équations (2), ni les équations (3), de sorte que cette forme est absolument exclue, comme plus haut le cas de $A=C$ dans le groupe des formes ambiguës $(A, 0, C)$. En résumé, soient, pour un déterminant donné Δ : H le nombre des formes réduites non ambiguës, h le nombre des formes ambiguës de l'espèce $(A, 0, C)$, h' le même nombre à l'égard des deux suivantes : $(2B, B, C)$, (A, B, A), l'expression

$$3H+h+2h'$$

sera le nombre des systèmes (n, b, a) qui, sous les conditions requises, satisfont à l'équation

$$n^2+n+an-b^2=\Delta.$$

Mais, si Δ est un carré ou le triple d'un carré, ce nombre, d'après les exceptions relatives aux formes dérivées de $(1, 0, 1)$ et $(2, 1, 2)$, devra être diminué d'une ou de deux unités. On peut d'ailleurs l'écrire de cette autre manière :

$$3\mathfrak{H}-2h-h',$$

en introduisant le nombre total des classes de déterminant $-\Delta$ qui est

$$\mathfrak{H}=H+h+h'.$$

Maintenant revenons au facteur $(-1)^{a(n+1)}$ qui joue dans la question un rôle essentiel. En posant en premier lieu

$$A = n, \qquad B = b, \qquad C = n + 1 + a,$$

et, en second lieu,

$$A = n, \qquad B = n - b\varepsilon, \qquad C = 2n - 2b\varepsilon + 1 + a,$$

et

$$C = n, \qquad B = n - b\varepsilon, \qquad A = 2n - 2b\varepsilon + 1 + a,$$

on trouve toujours la même valeur

$$a(n+1) \equiv \Delta + A + B + C + 1 \pmod 2.$$

Il en résulte que pour tout déterminant le facteur $(-1)^{a(n+1)}$ sera égal à $+1$ si l'un au moins des termes extrêmes A et C est impair, et à -1 si tous deux sont pairs. En faisant cette distinction dans les formes réduites, nommons $\mathfrak{H}_0$ le nombre total de ces formes, h_0, h'_0 celui des formes ambiguës des deux espèces dont nous avons parlé, où l'un des termes extrêmes est impair, et $\mathfrak{H}_1$, h_1, h'_1, les expressions de même signification dans le cas où les deux termes extrêmes sont pairs, on aura évidemment

$$\begin{aligned}\sum (-1)^{a(n+1)} q^{n^2+n+an-b^2} &= \sum [(3\mathfrak{H}_0 - 2h_0 - h'_0) - (3\mathfrak{H}_1 - 2h_1 - h'_1)] q^\Delta, \\ &= 3\sum (\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_1) q^\Delta + \sum (2h_1 + h'_1 - 2h_0 - h'_0) q^\Delta,\end{aligned}$$

ce qui donne la loi du développement suivant les puissances de q, de la série $\sum \frac{q^{n^2+n}\mathfrak{B}_n}{1+(-q)^n}$. La partie que nous avons isolée à dessein

$$\sum (2h_1 + h'_0 - 2h_0 - h'_0) q^\Delta$$

s'évalue à l'aide des résultats qui suivent.

Soit d'abord $\Delta = m$, m étant impair, on aura,

$$\left\{\begin{aligned} h_0 &= \frac{1}{2}\varphi(m), \\ h_1 &= 0, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} h'_0 &= \frac{1-(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{4}\varphi(m), \\ h'_1 &= \frac{1+(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{4}\varphi(m). \end{aligned}\right.$$

Et ensuite pour

$$\Delta = 2m,$$

$$\left\{\begin{aligned} h_0 &= \varphi(m), \\ h_1 &= 0, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} h'_0 &= 0, \\ h'_1 &= 0; \end{aligned}\right.$$

$$\Delta = 4m,$$

$$\left\{\begin{aligned} h_0 &= \varphi(m), \\ h_1 &= \frac{1}{2}\varphi(m), \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} h'_0 &= 0, \\ h'_1 &= \frac{1}{2}\varphi(m); \end{aligned}\right.$$

$$\Delta = 4.2^\sigma m,$$

$$\left\{\begin{aligned} h_0 &= \varphi(m), \\ h_1 &= \frac{\sigma+1}{2}\varphi(m), \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} h'_0 &= \varphi(m), \\ h'_1 &= \frac{\sigma-1}{2}\varphi(m). \end{aligned}\right.$$

On en conclut

$$\begin{aligned}\sum (2h_1 + h'_1 - 2h_0 - h'_0) q^\Delta &= \sum \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}} - 2}{2}\varphi(m) q^m \\ &- \sum 2\varphi(m) q^{2m} - \sum \frac{1}{2}\varphi(m) q^{4m} + \sum \frac{3\sigma-5}{2}\varphi(m) q^{4.2^\sigma m}.\end{aligned}$$

Il en résulte qu'en remplaçant dans l'équation fondamentale

$$\theta_1^3 = 1 + 4\sum \frac{q^n}{1+(-q)^n} - 2\sum (-1)^n q^{n^2}\mathfrak{B}_n + 4\sum \frac{q^{n^2+n}\mathfrak{B}_n}{1+(-q)^n}$$

les trois séries par leurs valeurs, on verra les deux premières détruire cette partie qui provient des formes ambiguës, et il restera simplement

$$\theta_1^3 = 1 + \sum 12(\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_1) q^\Delta.$$

Toutefois, si Δ est un carré ou le triple d'un carré, le terme général doit être remplacé par

$$12\left[\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_1 + \frac{(-1)^n}{2}\right] q^{n^2}$$

ou

$$12\left(\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_1 + \frac{2}{3}\right) q^{3n^2}.$$

Mais on peut éviter ces deux cas d'exception en ajoutant deux séries de termes de la forme q^{n^2} et q^{3n^2}; si l'on fait, pour abréger,

$$\varepsilon = \sum 2q^{3n^2} = \theta_1(q^3),$$

on aura de cette manière

$$\theta_1^3 = \sum 12(\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_1)\,q^{\Delta} + 30 + 4\varepsilon - 6.$$

C'est le résultat auquel est parvenu M. Kronecker, en employant la considération des modules qui donnent lieu à la multiplication complexe, car, d'après les dénominations de ce savant géomètre, on aura

$$\mathfrak{H}_0 = F(\Delta), \qquad \mathfrak{H}_1 = G(\Delta) - F(\Delta),$$

et, par suite,

$$\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_1 = 2F(\Delta) - G(\Delta) = E(\Delta).$$

On a donc deux méthodes absolument distinctes qui rattachent par un double lien à la théorie des fonctions elliptiques les propositions de Legendre et de Gauss sur la décomposition des nombres en trois carrés. Ces illustres géomètres, en poursuivant au prix de tant d'efforts leurs profondes recherches sur cette partie de l'Arithmétique supérieure, tendaient ainsi à leur insu vers une autre région de la Science et donnaient un mémorable exemple de cette mystérieuse unité qui se manifeste parfois dans les travaux analytiques en apparence les plus éloignés.

SUR

LA THÉORIE DES FORMES QUADRATIQUES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LV, 1862 (II), p. 684.

La méthode de M. Dirichlet pour la détermination du nombre des classes de formes quadratiques de même déterminant, et celles qu'on a tirées récemment de la considération des fonctions elliptiques dans le cas des déterminants négatifs, conduisent pour la même question à des solutions tellement différentes, qu'il semble aussi difficile de trouver un lien quelconque entre leurs résultats qu'entre les principes sur lesquels elles se fondent. Ce que laisse à désirer à cet égard la théorie des formes quadratiques paraît tenir à l'absence de quelque principe essentiel auquel on serait sans doute amené, soit en découvrant une démonstration purement arithmétique des propositions de M. Kronecker, soit en tirant de la théorie des fonctions elliptiques les expressions mêmes de Dirichlet. En accordant la préférence à ce dernier point de vue, j'ai dû, comme première préparation, faire de la méthode de cet illustre maître une étude qui m'a conduit peut-être à abréger et à simplifier en quelque chose son analyse, et voici sous quelle forme je la présenterai.

I.

Soit

$$m = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots k^{\varkappa}$$

un nombre entier décomposé en ses facteurs premiers $a, b, c, \ldots, k$; l'expression

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{k}\right),$$

ou, en développant le produit des facteurs binomes,

$$\varphi(m) = m - \sum \frac{m}{a} + \sum \frac{m}{ab} - \sum \frac{m}{abc} + \ldots \pm \frac{m}{abc\ldots k},$$

représente le nombre des entiers moindres que m et premiers avec lui. Je commencerai par généraliser cette expression en considérant le nombre des termes premiers à m dans la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

où n est quelconque. Si l'on désigne, suivant l'usage, par $\mathrm{E}(x)$ le plus grand entier contenu dans x, ce nombre sera

$$\Phi(n) = n - \sum \mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right) + \sum \mathrm{E}\left(\frac{n}{ab}\right) - \sum \mathrm{E}\left(\frac{n}{abc}\right) + \ldots \pm \mathrm{E}\left(\frac{n}{abc\ldots k}\right).$$

Pour plus d'uniformité, je remplacerai le premier terme n par $\mathrm{E}(n)$; on obtient par là une expression où il est possible de mettre, au lieu du nombre entier n, une variable quelconque x, à savoir :

$$\Phi(x) = \mathrm{E}(x) - \sum \mathrm{E}\left(\frac{x}{a}\right) + \sum \mathrm{E}\left(\frac{x}{ab}\right) - \sum \mathrm{E}\left(\frac{x}{abc}\right) + \ldots \pm \mathrm{E}\left(\frac{x}{abc\ldots k}\right).$$

La signification arithmétique de cette fonction sera d'exprimer le nombre des entiers non supérieurs à x et premiers à m, en faisant toujours

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots k^\varkappa.$$

Pour $m = 1$ et afin de compléter la définition, nous conviendrons de poser

$$\Phi(x) = \mathrm{E}(x),$$

c'est-à-dire de réduire la formule à son premier terme. Enfin, en désignant par ε une quantité comprise entre $+1$ et -1, et par μ le nombre des facteurs premiers, $a, b, \ldots, k$, on voit aisément qu'on a

$$\Phi(x) = \frac{x}{m}\varphi(m) + 2^{\mu-1}\varepsilon;$$

c'est la propriété de cette fonction dont nous ferons principalement usage.

II.

Soit encore à trouver le nombre des termes de la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

qui sont en même temps premiers à m et divisibles par un nombre donné i. Comme les multiples de i dans cette suite sont

$$i,\ 2i,\ 3i,\ \ldots,\ \mathrm{E}\left(\frac{n}{i}\right)i,$$

ce nombre est le même que celui des entiers non supérieurs à $\frac{n}{i}$ et premiers à m; ainsi il est donné par l'expression $\Phi\left(\frac{n}{i}\right)$. C'est à ce moment que se justifie notre convention de faire, pour $m = 1$,

$$\Phi(x) = \mathrm{E}(x),$$

car alors la formule doit donner le nombre des multiples de i qui ne sont pas supérieurs à n, et par suite coïncider avec $\mathrm{E}\left(\frac{n}{i}\right)$. De là résulte entre $\Phi(x)$ et $\mathrm{E}(x)$ une certaine analogie de rôle que la question suivante rendra manifeste.

Soit $\mathrm{F}(n)$ une fonction ainsi définie

$$\mathrm{F}(n) = \sum f(i),$$

la somme comprenant tous les nombres i qui sont diviseurs de n. On vérifie aisément qu'on aura

$$\sum_{1}^{n}{}_k\, \mathrm{F}(k) = \sum_{1}^{n}{}_i\, f(i)\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{i}\right).$$

En effet, dans le premier membre un terme quelconque $f(i)$ est amené par toutes les quantités $\mathrm{F}(k)$ où k est multiple de i; il se trouve par conséquent répété autant de fois qu'il y a de multiples de i dans la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

et c'est précisément ce qu'exprime le second membre. Modifions maintenant cette relation en introduisant d'abord la condition $f(i) = 0$, lorsque i n'est pas premier à un nombre donné

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots k^\varkappa,$$

et posant ensuite

$$F(k) = 0,$$

lorsque pareillement k n'est pas premier à m. On voit alors que dans la somme $\sum_{1}^{n}{}_{k} F(k)$ un terme $f(i)$ est autant de fois répété qu'il y a dans la suite 1, 2, 3, ..., n de termes divisibles par i et premiers à m. On aura donc, au lieu de la relation précédente, celle-ci :

$$\sum_{1}^{n}{}_{k} F(k) = \sum_{1}^{n}{}_{i} f(i)\, \Phi\left(\frac{n}{i}\right),$$

que nous emploierons bientôt à la recherche du nombre des classes. Mais il est nécessaire de rappeler d'abord quelques résultats sur la représentation des nombres, par le système des formes non équivalentes, de même déterminant D.

III.

A cet effet, nous désignerons par n un entier positif, impair, premier à D, et, en nommant S^2 le plus grand carré qui divise D, nous ferons

$$\frac{D}{S^2} = \mathcal{D}.$$

Cela posé, voici les deux théorèmes fondamentaux établis par Dirichlet au moyen des considérations les plus élémentaires et qui pourraient être placés parmi les premières propositions de la théorie des formes quadratiques.

1° *Le déterminant* D *étant négatif, la somme*

$$2\sum\left(\frac{\mathcal{D}}{i}\right),$$

où i désigne tous les diviseurs de n, et $\left(\frac{\mathcal{D}}{i}\right)$ le symbole généralisé de Legendre, exprime de combien de manières différentes [1] *l'entier n est susceptible d'être représenté par les formes non équivalentes, composant l'ordre proprement primitif de déterminant* D.

2° *Le déterminant étant positif, la même expression, sauf le facteur 2 qu'on supprime,*

$$\sum\left(\frac{\mathcal{D}}{i}\right),$$

donnera encore le nombre des représentations de n par les formes non équivalentes de l'ordre proprement primitif, mais sous les conditions suivantes : Premièrement, on choisira, pour représenter n, des formes

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

où a soit positif et c négatif; en second lieu, x et y devront être positifs et satisfaire à cette condition

$$y \leqq \frac{aU}{T - bU}\, x,$$

où T *et* U *sont les plus petits nombres qui donnent*

$$T^2 - DU^2 = 1.$$

On voit que dans ces propositions figurent exclusivement les nombres impairs et premiers au déterminant. Les valeurs des indéterminées x et y, qui rendent ainsi une forme impaire et première à son déterminant, se distribuent en certains systèmes, tels que

$$\text{(A)} \qquad x = 2Dv + \alpha, \qquad y = 2D\varpi + \beta,$$

v et ϖ étant des entiers arbitraires, α et β étant choisis dans un système de résidus suivant le module $2D$. Leur nombre, si l'on

---

[1] Les déterminants -1 et -3 font exception, le nombre des représentations étant respectivement pour ces deux cas :

$$4\sum\left(\frac{-1}{i}\right) \quad \text{et} \quad 6\sum\left(\frac{-3}{i}\right).$$

représente par D_1 la valeur absolue de D, est

$$2D_1\varphi(D_1) \quad \text{ou} \quad 4D_1\varphi(D_1),$$

selon que D est impair ou pair. Ce dernier résultat rappelé, voici maintenant de quelle manière, en n'ayant en vue que la détermination du nombre des classes, il nous a paru possible d'abréger la belle analyse de Dirichlet.

IV.

Revenons à l'équation

$$\sum_k^{n} {}_1 F(k) = \sum_i^{n} {}_1 f(i)\Phi\left(\frac{n}{i}\right),$$

pour y faire

$$f(i) = \left(\frac{\text{D}}{i}\right),$$

où $\left(\frac{\text{D}}{i}\right)$ est le symbole de Jacobi, avec la convention de poser $\left(\frac{\text{D}}{i}\right) = 0$ lorsque i ne sera pas premier à D. Alors les expressions

$$F(n) = 2\sum f(i) \quad \text{ou} \quad F(n) = \sum f(i),$$

suivant que D est négatif ou positif, donneront, en vertu des propositions précédentes, le nombre des représentations de l'entier n, par le système des formes proprement primitives de déterminant D. Mais ces propositions supposent essentiellement n impair et premier à D, de sorte que, pour tout nombre k qui ne satisfait pas à ces deux conditions, nous devrons supposer $F(k) = 0$. En conséquence, il faut déterminer la fonction Φ en prenant $m = 2D_1$, ou simplement $m = D_1$, selon que le déterminant sera impair ou pair. Pour mieux préciser, bornons-nous au premier cas : les expressions

$$F(n) = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\text{D}}{i}\right)\Phi\left(\frac{n}{i}\right) \quad \text{pour D négatif,}$$

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\text{D}}{i}\right)\Phi\left(\frac{n}{i}\right) \quad \text{pour D positif,}$$

auxquelles nous sommes ainsi amenés, donneront donc la *somme* des nombres de représentations pour tous les entiers positifs, impairs et premiers à D de un à n. Or on peut obtenir cette même somme en se plaçant à un point de vue bien différent, comme on va voir. En supposant d'abord le déterminant négatif, faisons correspondre, à chacune des formes (a, b, c) qui composent l'ordre proprement primitif de ce déterminant, une ellipse ayant pour équation en coordonnées rectangulaires

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = n.$$

On reconnaît sans peine que le nombre des points dont les coordonnées sont exprimées par l'ensemble des formules (A),

$$x = 2Dv + \alpha, \qquad y = 2Dw + \beta,$$

et qui sont situés dans l'intérieur et sur le contour de cette ellipse, donne précisément cette somme des nombres de représentations par la forme (a, b, c) des entiers considérés ci-dessus. En second lieu, supposons D positif, nous aurons un résultat entièrement analogue, en faisant correspondre à chaque forme (a, b, c) de l'ordre proprement primitif une hyperbole

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = n.$$

Effectivement, d'après les conditions propres aux déterminants positifs, le nombre de points dont les coordonnées sont l'ensemble des formules (A), et qui sont compris dans l'intérieur ou sur le contour du secteur hyperbolique, terminé d'une part par les droites

$$y = 0, \qquad y = \frac{aU}{T - bU}x,$$

et de l'autre par la branche de courbe s'étendant du côté des abscisses positives, coïncidera avec la somme des nombres de représentations appartenant à la forme (a, b, c).

On va voir quelle conséquence importante résulte de cette seconde manière d'exprimer $F(n)$.