Ces quantités J et J′, lorsqu'on suppose le module k réel et moindre que l'unité, s'expriment par les intégrales rectilignes

$$\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{k^2 x^2\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad \mathrm{J}' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2 x^2\, dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}},$$

et l'on a, comme pour K et K′, ces deux séries :

$$\mathrm{J} = \frac{\pi}{2}\,\mathfrak{J},$$

$$\mathrm{J}' = \mathfrak{J}\log\frac{4}{k} + 1 - (\mathfrak{J}-\mathfrak{J}_1) - \frac{2}{3.4}(\mathfrak{J}-\mathfrak{J}_2) - \frac{2}{5.6}(\mathfrak{J}-\mathfrak{J}_3) - \ldots,$$

en faisant

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \frac{5}{6}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^6 + \frac{7}{8}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^8 + \ldots,$$

$$\mathfrak{J}_n = \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \ldots + \frac{2n-3}{2n-2}\left(\frac{1.3\ldots 2n-5}{2.4\ldots 2n-4}\right)^2 k^{2n-2}$$
$$+ \frac{1}{2}\,\frac{2n-1}{2n}\left(\frac{1.3\ldots 2n-3}{2.4\ldots 2n-2}\right)^2 k^{2n}.$$

Voici maintenant la propriété de la fonction de seconde espèce qu'on doit regarder comme caractéristique et qui justifie son introduction à titre de nouvel élément analytique dans la théorie des fonctions elliptiques; elle consiste dans les relations

$$\mathrm{Z}(x+2\mathrm{K}) = \mathrm{Z}(x) + 2\mathrm{J},$$
$$\mathrm{Z}(x+2i\mathrm{K}') = \mathrm{Z}(x) + 2i\mathrm{J}'.$$

Ces relations, qui découlent immédiatement des équations fondamentales

$$\Theta(x+2\mathrm{K}) = \Theta(x),$$
$$\Theta(x+2i\mathrm{K}') = -\Theta(x)\,e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')},$$

en en prenant les dérivées logarithmiques, donnent en effet la notion d'un nouveau genre de fonctions qui, étant uniformes, se reproduisent avec l'addition d'une constante lorsqu'on augmente l'argument des quantités $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$. Plus tard, on verra le rôle et l'importance de ce caractère qui n'est plus la double périodicité, mais qui s'y rattache d'une manière étroite.

On y parviendrait d'ailleurs encore autrement, en partant de l'équation

$$\mathrm{Z}(x+a) = \mathrm{Z}(x) + \mathrm{Z}(a) + k^2 \sin\mathrm{am}\,x \sin\mathrm{am}\,a \sin\mathrm{am}(x+a),$$

c'est-à-dire du théorème de l'addition des arguments dans la fonction de seconde espèce, que Jacobi démontre comme il suit :

Différentions, par rapport à x, l'équation

$$\Pi(x, a) = x\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)},$$

il viendra

$$\frac{k^2 \sin\mathrm{am}\,a \cos\mathrm{am}\,a\, \Delta\mathrm{am}\,a \sin^2\mathrm{am}\,x}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a \sin^2\mathrm{am}\,x} = \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\,\frac{\Theta'(x-a)}{\Theta(x-a)} - \frac{1}{2}\,\frac{\Theta'(x+a)}{\Theta(x+a)}$$
$$= -\mathrm{Z}(a) + \frac{1}{2}\mathrm{Z}(x+a) - \frac{1}{2}\mathrm{Z}(x-a),$$

d'où, en permutant x et a,

$$\frac{k^2 \sin\mathrm{am}\,x \cos\mathrm{am}\,x\, \Delta\mathrm{am}\,x \sin^2\mathrm{am}\,a}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a \sin^2\mathrm{am}\,x} = -\mathrm{Z}(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Z}(x+a) + \frac{1}{2}\mathrm{Z}(x-a);$$

or ces relations, ajoutées membre à membre, donnent

$$k^2 \sin\mathrm{am}\,x \sin\mathrm{am}\,a \sin\mathrm{am}(x+a) = \mathrm{Z}(x+a) - \mathrm{Z}(x) - \mathrm{Z}(a).$$

III. — *De la fonction* $\Pi(x, a)$.

On considère comme l'une des plus belles découvertes de Jacobi cette expression de $\Pi(x, a)$ où figurent deux quantités, l'argument x et le paramètre a, par la relation

$$\Pi(x, a) = x\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)},$$

dans laquelle n'entre que la seule fonction Θ avec sa dérivée. Il pourrait même paraître inutile, à cause de la simplicité de cette expression, d'introduire avec une désignation spéciale et comme un élément analytique propre la fonction de troisième espèce. Cette désignation cependant est consacrée par les travaux de Legendre qui ont précédé la découverte de Jacobi, et nous l'emploierons dans les énoncés des propositions suivantes.

A. — *Échange de l'amplitude et du paramètre.*

L'équation fondamentale donne immédiatement

$$\Pi(x, a) - \Pi(a, x) = x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} - a\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

ou bien encore

$$\Pi(x, a) - \Pi(a, x) = a\mathrm{Z}(x) - x\mathrm{Z}(a)$$

en introduisant la fonction de seconde espèce. Cette propriété peut être établie directement et étendue aux intégrales d'ordre supérieur par la méthode suivante qu'a encore donnée Jacobi.

Soit $\varphi(x)$ un polynome de degré quelconque en x et

$$\mathrm{F}(x, a) = \int_0^x \frac{\sqrt{\varphi(a)}\,dx}{(x-a)\sqrt{\varphi(x)}}$$

la différence $\mathrm{F}(x, a) - \mathrm{F}(a, x)$, ou bien la somme des intégrales

$$\int_0^x \frac{\sqrt{\varphi(a)}\,dx}{(x-a)\sqrt{\varphi(x)}} + \int_0^a \frac{\sqrt{\varphi(x)}\,da}{(x-a)\sqrt{\varphi(a)}}$$

peut être remplacée par l'intégrale double

$$\int_0^a \int_0^x \frac{dx\,da}{\sqrt{\varphi(x)}\sqrt{\varphi(a)}}\,\frac{[\varphi'(x)+\varphi'(a)](x-a)+2\varphi(a)-2\varphi(x)}{2(x-a)^2}.$$

Or on trouve aisément que la quantité placée entre parenthèses est une fonction entière de x et de a, de sorte que l'intégrale double se ramène à une somme de produits tels que

$$\int_0^x \frac{a^m\,da}{\sqrt{\varphi(a)}} \times \int_0^x \frac{x^n\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}}.$$

Le cas des intégrales elliptiques résulterait évidemment de là, en posant

$$\varphi(x) = x(1-x)(1-k^2x)$$

et prenant, pour variables x et a, les quantités $\frac{1}{k^2\sin^2\mathrm{am}\,x}$ et $\sin^2\mathrm{am}\,a$.

B. — *Des fonctions complètes.*

Supposons successivement dans l'équation précédente

$$\Pi(x, a) - \Pi(a, x) = a\mathrm{Z}(x) - x\mathrm{Z}(a),$$

$$x = \mathrm{K} \quad \text{et} \quad x = \mathrm{K} + i\mathrm{K}';$$

en observant qu'on aura

$$\Pi(a, \mathrm{K}) = 0,$$

$$\Pi(a, \mathrm{K} + i\mathrm{K}') = 0,$$

on en conclut

$$\Pi(\mathrm{K}, a) = a\mathrm{Z}(\mathrm{K}) - \mathrm{KZ}(a) = a\mathrm{J} - \mathrm{KZ}(a)$$

et

$$\Pi(\mathrm{K} + i\mathrm{K}') - \Pi(\mathrm{K}) = ia\mathrm{J}' - i\mathrm{K}'\mathrm{Z}(a).$$

Telles sont les valeurs des fonctions complètes ou bien des intégrales définies

$$\Pi(\mathrm{K}) = \int_0^{\mathrm{K}} \frac{k^2 \sin\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,x\,dx}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,x},$$

$$\Pi(\mathrm{K} + i\mathrm{K}') - \Pi(\mathrm{K}) = \int_{\mathrm{K}}^{\mathrm{K}+i\mathrm{K}'} \frac{k^2 \sin\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,x\,dx}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,x}.$$

Si pour un instant on les désigne respectivement par Π et $i\Pi'$, on aura les relations

$$\Pi(x + 2\mathrm{K}, a) = \Pi(x, a) + 2\Pi,$$

$$\Pi(x + 2i\mathrm{K}', a) = \Pi(x, a) + 2i\Pi'$$

et

$$\mathrm{K}\Pi' - \Pi\mathrm{K}' = \frac{a\pi}{2}.$$

Mais nous observerons, à l'égard de la fonction de troisième espèce, que l'intégration introduit, en modifiant le chemin décrit par la variable, un multiple entier positif ou négatif de $\pi\sqrt{-1}$, de sorte que ces relations n'ont lieu que pour certains modes d'intégration, tandis que les relations analogues relativement à la fonction de seconde espèce n'exigeaient aucune restriction de cette nature.

C. — Addition des arguments.

Considérons, pour fixer les idées, un nombre impair d'arguments $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n+1}$, liés par la relation

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n+1} = 0,$$

l'équation fondamentale

$$\Pi(x, a) = x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}$$

donnera

$$\begin{aligned}&\Pi(\alpha_1, a) + \Pi(\alpha_2, a) + \ldots + \Pi(\alpha_{2n+1}, a)\\ &\quad = \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(\alpha_1 - a)\Theta(\alpha_2 - a)\ldots\Theta(\alpha_{2n+1} - a)}{\Theta(\alpha_1 + a)\Theta(\alpha_2 + a)\ldots\Theta(\alpha_{2n+1} + a)}.\end{aligned}$$

Cela posé, je dis que la quantité sous le signe logarithmique s'exprime rationnellement par

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}\alpha_1, & \sin\operatorname{am}\alpha_2, & \ldots, & \sin\operatorname{am}\alpha_{2n+1}, \\ D_{\alpha_1}\sin\operatorname{am}\alpha_1, & D_{\alpha_2}\sin\operatorname{am}\alpha_2, & \ldots, & D_{\alpha_{2n+1}}\sin\operatorname{am}\alpha_{2n+1}. \end{cases}$$

Rappelons, à cet effet, qu'en désignant par $f(x)$ et $f_1(x)$ deux polynomes entiers en x des degrés n et $n-1$ et faisant

$$\varphi(x) = \sin\operatorname{am}x\,f(\sin^2\operatorname{am}x) + D_x\sin\operatorname{am}x\,f_1(\sin^2\operatorname{am}x),$$

nous avons obtenu (p. 184) la relation suivante :

$$\varphi(x) = \frac{A\,H(x-\alpha_1)\,H(x-\alpha_2)\ldots H(x-\alpha_{2n+1})}{\Theta^{2n+1}(x)},$$

où les coefficients des polynomes f et f_1 doivent être déterminés par les équations linéaires

$$\varphi(\alpha_1) = 0, \qquad \varphi(\alpha_2) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi(\alpha_{2n}) = 0,$$

et sont des fonctions rationnelles des quantités (A).

Cela posé, en changeant x en $-x$, on en déduit

$$\varphi(-x) = -\frac{A\,H(x+\alpha_1)\,H(x+\alpha_2)\ldots H(x+\alpha_{2n+1})}{\Theta^{2n+1}(x)},$$

et il en résulte

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(-x)} = -\frac{H(x-\alpha_1)\,H(x-\alpha_2)\ldots H(x-\alpha_{2n+1})}{H(x+\alpha_1)\,H(x+\alpha_2)\ldots H(x+\alpha_{2n+1})}.$$

Or, en faisant

$$x = a + i\mathrm{K}',$$

d'où

$$\sin\operatorname{am}x = \frac{1}{k\sin\operatorname{am}a},$$

$$D_x\sin\operatorname{am}x = -\frac{D_a\sin\operatorname{am}a}{k\sin^2\operatorname{am}a},$$

la quantité

$$\frac{H(x-\alpha_1)\,H(x-\alpha_2)\ldots H(x-\alpha_{2n+1})}{H(x+\alpha_1)\,H(x+\alpha_2)\ldots H(x+\alpha_{2n+1})}$$

deviendra précisément

$$\frac{\Theta(a-\alpha_1)\,\Theta(a-\alpha_2)\ldots\Theta(a-\alpha_{2n+1})}{\Theta(a+\alpha_1)\,\Theta(a+\alpha_2)\ldots\Theta(a+\alpha_{2n+1})}.$$

Elle s'exprime par conséquent comme il a été annoncé, ayant pour valeur la quantité

$$\frac{\dfrac{1}{k\sin\operatorname{am}a}f\left(\dfrac{1}{k^2\sin^2\operatorname{am}a}\right) - \left(\dfrac{D_a\sin\operatorname{am}a}{k\sin^2\operatorname{am}a}\right)f_1\left(\dfrac{1}{k^2\sin^2\operatorname{am}a}\right)}{\dfrac{1}{k\sin\operatorname{am}a}f\left(\dfrac{1}{k^2\sin^2\operatorname{am}a}\right) + \left(\dfrac{D_a\sin\operatorname{am}a}{k\sin^2\operatorname{am}a}\right)f_1\left(\dfrac{1}{k^2\sin^2\operatorname{am}a}\right)}$$

qu'on ramène, en multipliant haut et bas par $\sin^{2n+1}\operatorname{am}a$, à la forme

$$\frac{\sin\operatorname{am}a\,F(\sin^2\operatorname{am}a) - D_a\sin\operatorname{am}a\,F_1(\sin^2\operatorname{am}a)}{\sin\operatorname{am}a\,F(\sin^2\operatorname{am}a) + D_a\sin\operatorname{am}a\,F_1(\sin^2\operatorname{am}a)},$$

$F(x)$ et $F_1(x)$ étant comme $f(x)$ et $f_1(x)$ des polynomes de degrés n et $n-1$ en x.

On peut donc écrire, en remplaçant l'argument α_{2n+1} par

$$-(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n}),$$

l'équation suivante

$$\begin{aligned}&\Pi(\alpha_1, a) + \Pi(\alpha_2, a) + \ldots + \Pi(\alpha_{2n}, a)\\ &\quad = \Pi(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n}, a)\\ &\quad\quad + \frac{1}{2}\log\frac{\sin\operatorname{am}a\,F(\sin^2\operatorname{am}a) - D_a\sin\operatorname{am}a\,F_1(\sin^2\operatorname{am}a)}{\sin\operatorname{am}a\,F(\sin^2\operatorname{am}a) + D_a\sin\operatorname{am}a\,F_1(\sin^2\operatorname{am}a)},\end{aligned}$$

c'est le théorème de l'addition des arguments sous la forme trouvée par Abel.

D. — *De différentes fonctions analogues à la fonction de troisième espèce.*

D'importantes questions de mécanique conduisent souvent à réduire aux fonctions Θ des intégrales semblables à la fonction de troisième espèce et qui s'y ramènent par quelque substitution simple; aussi Jacobi, dans son mémorable travail sur la rotation des corps, a-t-il jugé nécessaire de donner le Tableau suivant, qui offre la réunion complète de ces diverses intégrales ainsi que leurs expressions sous la forme la plus simple par les fonctions θ.

$$1. \quad \int_0^x \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x \, dx}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x} = x \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

$$2. \quad \int_0^x \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \cos^2 \operatorname{am} x \, dx}{\Delta \operatorname{am} a (1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x)} = -x \frac{\Theta_1'(a)}{\Theta_1(a)} - \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

$$3. \quad \int_0^x \frac{\operatorname{tang} \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} a \, \Delta^2 \operatorname{am} x \, dx}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x} = -x \frac{H_1'(a)}{H_1(a)} - \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

$$4. \quad \int_0^x \frac{\Delta \operatorname{am} a \cot \operatorname{am} a \, dx}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x} = x \frac{H'(a)}{H(a)} + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

$$5. \quad \int_0^x \frac{\sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} a \, dx}{\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x} = -x \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2} \log \frac{H(a+x)}{H(a-x)}.$$

$$6. \quad \int_0^x \frac{\sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \, \Delta^2 \operatorname{am} x \, dx}{\Delta \operatorname{am} a (\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x)} = -x \frac{\Theta_1'(a)}{\Theta_1(a)} + \frac{1}{2} \log \frac{H(a+x)}{H(a-x)}.$$

$$7. \quad \int_0^x \frac{\operatorname{tang} \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} a \cos^2 \operatorname{am} x \, dx}{\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x} = -x \frac{H_1'(a)}{H_1(a)} + \frac{1}{2} \log \frac{H(a+x)}{H(a-x)}.$$

$$8. \quad \int_0^x \frac{\Delta \operatorname{am} a \cot \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x \, dx}{\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x} = -x \frac{H'(a)}{H(a)} + \frac{1}{2} \log \frac{H(a+x)}{H(a-x)}.$$

Il nous suffira d'observer, pour qu'on puisse immédiatement les démontrer, que les équations 2, 3, 4 se déduisent de la première en y changeant successivement x et a en

$$\begin{aligned} &x + K, \quad a + K, \\ &x + K + iK', \quad a + K + iK', \\ &x + iK', \quad a + iK'. \end{aligned}$$

Ces quatre équations ainsi obtenues, on en tire les quatre suivantes par le changement de x en $x + iK'$ [1].

Des fonctions de M. Weierstrass.

Il a été déjà remarqué que $\sin \operatorname{am} x$, $\cos \operatorname{am} x$, $\Delta \operatorname{am} x$, pouvaient, pour des valeurs de x moindres que l'unité, être développés suivant les puissances de cette variable en séries dont les coefficients sont des fonctions entières et à coefficients rationnels de k^2. Il en est évidemment de même de $\sin^2 \operatorname{am} x$, de la fonction de seconde espèce

$$Z(x) = \int_0^x k^2 \sin^2 \operatorname{am} x \, dx,$$

de son intégrale $\int_0^x Z(x)\,dx$ et même aussi de l'expression

$$e^{-\int_0^x Z(x)\,dx};$$

mais, tandis qu'à l'égard de $\sin^2 \operatorname{am} x$, $Z(x)$ et $\int^x Z(x)\,dx$ les développements ne subsistent que pour des valeurs de la variable dont le module est inférieur à l'unité, l'exponentielle

$$e^{-\int_0^x Z(x)\,dx}$$

conduit à un développement convergent dans toute l'étendue des valeurs réelles ou imaginaires de x. Effectivement l'équation

$$Z(x) = \zeta x - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$$

(1) Si l'on représente par $\int_0^x F(x)\,dx$ l'une quelconque des huit formes de la fonction de troisième espèce, $F(x)$ aura pour périodes $2K$ et $2iK'$, et les expressions précédentes s'obtiendront immédiatement à l'aide d'une expression générale des fonctions doublement périodiques, qui sera établie à la fin de cette Note, savoir :

$$F(x) = C + \Sigma R \frac{H'(x-\zeta)}{H(x-\zeta)},$$

les quantités ζ désignant les racines de l'équation $\frac{1}{F(x)} = 0$, et R les résidus correspondants de $F(x)$.

donne

$$\mathrm{Al}(x) = e^{-\int_0^x \mathrm{Z}(x)\,dx} = e^{-\frac{\zeta x^2}{2}} \frac{\Theta(x)}{\Theta(0)}.$$

Voici donc une propriété bien digne d'attention de la fonction $\Theta(x)$ de se changer par l'introduction du facteur $e^{-\frac{\zeta x^2}{2}} \frac{1}{\Theta(0)}$ en une nouvelle fonction où l'argument est sorti du signe cosinus et où figure directement le module k^2 à la place des périodes et de la transcendante $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$. Les mêmes choses auront encore lieu évidemment à l'égard de ces trois autres fonctions :

$$\mathrm{Al}(x)_1 = \sin \operatorname{am} x \, e^{-\int_0^x \mathrm{Z}(x)\,dx} = e^{-\frac{\zeta x^2}{2}} \frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(0)} \frac{1}{\sqrt{k}},$$

$$\mathrm{Al}(x)_2 = \cos \operatorname{am} x \, e^{-\int_0^x \mathrm{Z}(x)\,dx} = e^{-\frac{\zeta x^2}{2}} \frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(0)} \sqrt{\frac{k'}{k}},$$

$$\mathrm{Al}(x)_3 = \Delta \operatorname{am} x \, e^{-\int_0^x \mathrm{Z}(x)\,dx} = e^{-\frac{\zeta x^2}{2}} \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)} \sqrt{k'}.$$

Il en résulte qu'à côté des développements périodiques

$$\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots},$$

$$\cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots},$$

$$\Delta \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{k'} \frac{1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots},$$

on voit s'offrir un autre mode de représentation où les fonctions doublement périodiques sont exprimées par des quotients de séries rationnelles en x et k^2, et convergentes quelles que soient les valeurs réelles ou imaginaires de ces deux quantités. Abel avait entrevu et rapidement indiqué la possibilité de ce nouveau mode d'expression des fonctions elliptiques, mais c'est à M. Weierstrass que revient l'honneur d'avoir mis dans la Science, au lieu d'un simple aperçu, une théorie profonde qui conduit directement à ces nouvelles fonctions, non seulement dans le cas des transcendantes elliptiques, mais pour les transcendantes abéliennes à un nombre quelconque de variables. Ne pouvant exposer ici les principes dont cet illustre géomètre a tiré ces grandes et belles découvertes, nous nous bornerons, et sans sortir des fonctions elliptiques, aux indications suivantes.

I. — *Définition des quatre fonctions* $\mathrm{Al}(x)$. — *Équations différentielles.*

Afin de rattacher immédiatement ces fonctions aux quatre fonctions $\Theta(x)$, nous poserons :

$$\mathrm{Al}(x) = e^{-\int_0^x \mathrm{Z}(x)\,dx},$$

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} \sin \operatorname{am} x = \dfrac{\mathrm{Al}(x)_1}{\mathrm{Al}(x)}, \\[2mm] \cos \operatorname{am} x = \dfrac{\mathrm{Al}(x)_2}{\mathrm{Al}(x)}, \\[2mm] \Delta \operatorname{am} x = \dfrac{\mathrm{Al}(x)_3}{\mathrm{Al}(x)}, \end{cases}$$

et, par suite,

$$(\mathrm{B}) \quad \begin{cases} \mathrm{Al}(x) = e^{-\frac{\zeta x^2}{2}} \dfrac{\Theta(x)}{\Theta(0)}, \\[2mm] \mathrm{Al}(x)_1 = e^{-\frac{\zeta x^2}{2}} \dfrac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(0)} \dfrac{1}{\sqrt{k}}, \\[2mm] \mathrm{Al}(x)_2 = e^{-\frac{\zeta x^2}{2}} \dfrac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(0)} \sqrt{\dfrac{k'}{k}}, \\[2mm] \mathrm{Al}(x)_3 = e^{-\frac{\zeta x^2}{2}} \dfrac{\Theta_1(x)}{\Theta(0)} \sqrt{k'}. \end{cases}$$

Des relations (A) résultent en premier lieu celles-ci :

$$\mathrm{Al}^2(x)_2 = \mathrm{Al}^2(x) - \mathrm{Al}^2(x)_1,$$
$$\mathrm{Al}^2(x)_3 = \mathrm{Al}^2(x) - k^2 \mathrm{Al}^2(x)_1.$$

Nous déduirons ensuite des égalités

$$\mathrm{Al}(x) = e^{-\int_0^x \mathrm{Z}(x)\,dx},$$
$$\frac{\mathrm{Al}(x)_1}{\mathrm{Al}(x)} = \sin \operatorname{am} x,$$

deux équations différentielles, en prenant d'abord les secondes dérivées de logarithmes des deux membres, ce qui donnera

$$\frac{d^2 \log \mathrm{Al}(x)}{dx^2} = -k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, x = -k^2 \frac{\mathrm{Al}^2(x)_1}{\mathrm{Al}^2(x)}$$

et

$$\frac{d^2 \log \mathrm{Al}(x)_1}{dx^2} - \frac{d^2 \log \mathrm{Al}(x)}{dx^2} = \frac{d^2 \log \sin \mathrm{am}\, x}{dx^2} = k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, x - \frac{1}{\sin^2 \mathrm{am}\, x},$$

d'où, à cause de l'équation précédente,

$$\frac{d^2 \log \mathrm{Al}(x)_1}{dx^2} = -\frac{1}{\sin^2 \mathrm{am}\, x} = -\frac{\mathrm{Al}^2(x)}{\mathrm{Al}^2(x)_1}.$$

Voici, en développant, les équations différentielles qui en résultent :

$$\left\{ \begin{aligned} &\mathrm{Al}(x) \frac{d^2 \mathrm{Al}(x)}{dx^2} - \left[\frac{d\mathrm{Al}(x)}{dx}\right]^2 + k^2 \mathrm{Al}^2(x)_1 = 0, \\ &\mathrm{Al}(x)_1 \frac{d^2 \mathrm{Al}(x)_1}{dx^2} - \left[\frac{d\mathrm{Al}(x)_1}{dx}\right]^2 + \mathrm{Al}^2(x) \quad = 0. \end{aligned} \right.$$

On aurait d'une manière analogue, ou comme conséquence des relations algébriques,

$$\left\{ \begin{aligned} &\mathrm{Al}(x)_2 \frac{d^2 \mathrm{Al}(x)_2}{dx^2} - \left[\frac{d\mathrm{Al}(x)_2}{dx}\right]^2 + \mathrm{Al}^2(x)_3 = 0, \\ &\mathrm{Al}(x)_3 \frac{d^2 \mathrm{Al}(x)_3}{dx^2} - \left[\frac{d\mathrm{Al}(x)_3}{dx}\right]^2 + k^2 \mathrm{Al}^2(x)_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Ces relations importantes que M. Weierstrass tire immédiatement des équations de définition :

$$\begin{aligned} \frac{d \sin \mathrm{am}\, x}{dx} &= \cos \mathrm{am}\, x\, \Delta\, \mathrm{am}\, x, \\ \frac{d \cos \mathrm{am}\, x}{dx} &= -\sin \mathrm{am}\, x\, \Delta\, \mathrm{am}\, x, \\ \frac{d\, \Delta\, \mathrm{am}\, x}{dx} &= -k^2 \sin \mathrm{am}\, x \cos \mathrm{am}\, x, \end{aligned}$$

et par une méthode qui s'applique aux transcendantes abéliennes les plus générales, peuvent alors, par une nouvelle méthode, conduire aux fonctions Θ, ou servir à démontrer directement qu'elles définissent des fonctions développables suivant les puissances de la variable en séries indéfiniment convergentes, et dont les

coefficients sont des fonctions entières de k^2 à coefficients rationnels. Toutefois, pour effectuer les développements, on suit une voie différente et plus simple dont voici le principe.

II. — *Équations aux différentielles partielles. — Formules de développement.*

Une analyse un peu trop longue pour que nous puissions la rapporter ici a conduit M. Weierstrass à ces équations linéaires aux différences partielles, savoir :

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2 \mathrm{Al}(x)}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d\mathrm{Al}(x)}{dx} + 2kk'^2 \frac{d\mathrm{Al}(x)}{dk} + k^2 x^2 \mathrm{Al}(x) = 0, \\ &\frac{d^2 \mathrm{Al}(x)_1}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d\mathrm{Al}(x)_1}{dx} + 2kk'^2 \frac{d\mathrm{Al}(x)_1}{dk} + (k'^2 + k^2 x^2)\, \mathrm{Al}(x)_1 = 0, \\ &\frac{d^2 \mathrm{Al}(x)_2}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d\mathrm{Al}(x)_2}{dx} + 2kk'^2 \frac{d\mathrm{Al}(x)_2}{dk} + (1 + k^2 x^2)\, \mathrm{Al}(x)_2 = 0, \\ &\frac{d^2 \mathrm{Al}(x)_3}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d\mathrm{Al}(x)_3}{dx} + 2kk'^2 \frac{d\mathrm{Al}(x)_3}{dk} + (k^2 + k^2 x^2)\, \mathrm{Al}(x)_3 = 0. \end{aligned} \right.$$

Ces relations importantes sont éminemment propres aux développements en séries, et l'on en tire les formules suivantes. Soit, en désignant le produit $1.2.3\ldots n$ par $n!$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Al}(x) &= 1 - \mathrm{A}_2 \frac{x^4}{4!} + \mathrm{A}_3 \frac{x^6}{6!} - \ldots + (-1)^{m-1} \mathrm{A}_m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \cdots \text{(1)}, \\ \mathrm{Al}(x)_1 &= x - \mathrm{B}_1 \frac{x^3}{3!} + \mathrm{B}_2 \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^m\, \mathrm{B}_m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \cdots, \\ \mathrm{Al}(x)_2 &= 1 - \mathrm{C}_1 \frac{x^2}{2!} + \mathrm{C}_2 \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m\, \mathrm{C}_m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \cdots, \\ \mathrm{Al}(x)_3 &= 1 - \mathrm{D}_1 \frac{x^2}{2!} + \mathrm{D}_2 \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m\, \mathrm{D}_m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \cdots, \end{aligned}$$

---

(1) Le terme en x^2 manque dans ce développement, comme on le voit *a prior* pari l'expression $e^{-\int_0^x \mathrm{Z}(x)\,dx}$ où la série en exposant commence par un terme en x^4.

on aura

$$
\begin{aligned}
A_2 &= 2k^2,\\
A_3 &= 8(k^2+k^4),\\
A_4 &= 32(k^2+k^6)+68k^4,\\
A_5 &= 128(k^2+k^8)+480(k^4+k^6),\\
A_6 &= 512(k^2+k^{10})+3008(k^4+k^8)+5400k^6,\\
A_7 &= 2048(k^2+k^{12})+17408(k^4+k^{10})+49568(k^6+k^8),\\
A_8 &= 8192(k^2+k^{14})+95232(k^4+k^{12})+395520(k^6+k^{10})+603376k^8\\
A_9 &= 32768(k^2+k^{16})+499712(k^4+k^{14})+2853888(k^6+k^{12})\\
&\qquad +5668096(k^8+k^{10}),\\
A_{10} &= 131072(k^2+k^{18})+2539520(k^4+k^{16})+19097600(k^6+k^{14})\\
&\qquad +38153728(k^8+k^{12})+42090784k^{10},
\end{aligned}
$$

. . . .

$$
\begin{aligned}
B_1 &= 1+k^2,\\
B_2 &= 1+k^4+4k^2,\\
B_3 &= 1+k^6+9(k^2+k^4),\\
B_4 &= 1+k^8+16(k^2+k^6)-6k^4,\\
B_5 &= 1+k^{10}+25(k^2+k^8)-494(k^4+k^6),\\
B_6 &= 1+k^{12}+36(k^2+k^{10})-5781(k^4+k^8)-12184k^6,\\
B_7 &= 1+k^{14}+49(k^2+k^{12})-55173(k^4+k^{10})-179605(k^6+k^8),\\
B_8 &= 1+k^{16}+64(k^2+k^{14})-502892(k^4+k^{12})-2279488(k^6+k^{10})\\
&\qquad -3547930k^8,\\
B_9 &= 1+k^{18}+81(k^2+k^{16})-4537500(k^4+k^{14})-27198588(k^6+k^{12})\\
&\qquad -59331498(k^8+k^{10}),\\
B_{10} &= 1+k^{20}+100(k^2+k^{18})-40856715(k^4+k^{16})\\
&\qquad -31380080(k^6+k^{14})-909015270(k^8+k^{12})-1278530856k^{10},
\end{aligned}
$$

. . . .

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 1,\\
C_2 &= 1+2k^2,\\
C_3 &= 1+6k^2+8k^4,\\
C_4 &= 1+12k^2+60k^4+32k^6,\\
C_5 &= 1+20k^2+348k^4+448k^6+128k^8,\\
C_6 &= 1+30k^2+2372k^4+4600k^6+2880k^8+512k^{10},\\
C_7 &= 1+42k^2+19308k^4+51816k^6+45024k^8+16896k^{10}+2048k^{12},\\
C_8 &= 1+56k^2+169320k^4+628064k^6+757264k^8+370944k^{10}\\
&\qquad +93184k^{12}+8192k^{14},\\
C_9 &= 1+72k^2+1515368k^4+7594592k^6+12998928k^8\\
&\qquad +9100288k^{10}+2725888k^{12}+491520k^{14}+32768k^{16},\\
C_{10} &= 1+90k^2+13623480k^4+89348080k^6+211064400k^8\\
&\qquad +219361824k^{10}+100242944k^{12}+18450432k^{14}\\
&\qquad +2506752k^{16}+131072k^{18},
\end{aligned}
$$

. . . .

et

$$
\begin{aligned}
D_1 &= k^2,\\
D_2 &= 2k^2+k^4,\\
D_3 &= 8k^2+6k^4+k^6,\\
D_4 &= 32k^2+60k^4+12k^6+k^8,\\
D_5 &= 128k^2+448k^4+348k^6+20k^8+k^{10},\\
D_6 &= 512k^2+2880k^4+4600k^6+2372k^8+30k^{10}+k^{12},\\
D_7 &= 2048k^2+16896k^4+45024k^6+51816k^8+19308k^{10}+42k^{12}+k^{14},\\
D_8 &= 8192k^2+93184k^4+370944k^6+757264k^8+628064k^{10}\\
&\qquad +169320k^{12}+56k^{14}+k^{16}.\\
D_9 &= 32768k^2+491520k^4+2725888k^6+9100288k^8\\
&\qquad +12998928k^{10}+7594592k^{12}+1515368k^{14}+72k^{16}+k^{18},\\
D_{10} &= 131072k^2+2506752k^4+18450432k^6+100242944k^8\\
&\qquad +219361824k^{10}+211064400k^{12}+89348080k^{14}\\
&\qquad +13623480k^{16}+90k^{18}+k^{20},
\end{aligned}
$$

. . . .

Mais les équations aux différences partielles ne servent pas seulement à faciliter le calcul dont nous venons de rapporter les résultats d'après M. Weierstrass, elles donnent encore, par exemple, une démonstration facile des équations suivantes, qui se rapportent à la transformation du premier ordre, savoir :

$$
\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{Al}\left(kx, \frac{1}{k}\right) &= \mathrm{Al}(x, k),\\
\mathrm{Al}\left(kx, \frac{1}{k}\right)_1 &= k\,\mathrm{Al}(x, k)_1,\\
\mathrm{Al}\left(kx, \frac{1}{k}\right)_2 &= \mathrm{Al}(x, k)_3,\\
\mathrm{Al}\left(kx, \frac{1}{k}\right)_3 &= \mathrm{Al}(x, k_2)_2,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{Al}(ix, k') &= e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{Al}(x, k)_2,\\
\mathrm{Al}(ix, k')_1 &= ie^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{Al}(x, k)_1,\\
\mathrm{Al}(ix, k')_2 &= e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{Al}(x, k),\\
\mathrm{Al}(ix, k')_3 &= e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{Al}(x, k)_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous remarquerons enfin qu'en passant ainsi des fonctions $\Theta(x)$ à $\mathrm{Al}(x)$ qui ont perdu tout caractère périodique, les quotients $\frac{\mathrm{Al}(x)_1}{\mathrm{Al}(x)}$, $\frac{\mathrm{Al}(x)_2}{\mathrm{Al}(x)}$, $\frac{\mathrm{Al}(x)_3}{\mathrm{Al}(x)}$ se trouvent posséder la double périodicité en vertu des relations suivantes, conséquence immédiate des équations (B), en se rappelant qu'on a

$$\zeta = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \quad \text{et} \quad \mathrm{KJ}' - \mathrm{K}'\mathrm{J} = \frac{\pi}{2},$$

savoir :

$$\begin{cases} \mathrm{Al}(x+2\mathrm{K}) = +\mathrm{Al}(x)\, e^{-2\mathrm{J}(x+\mathrm{K})}, \\ \mathrm{Al}(x+2\mathrm{K})_1 = -\mathrm{Al}(x)_1\, e^{-2\mathrm{J}(x+\mathrm{K})}, \\ \mathrm{Al}(x+2\mathrm{K})_2 = -\mathrm{Al}(x)_2\, e^{-2\mathrm{J}(x+\mathrm{K})}, \\ \mathrm{Al}(x+2\mathrm{K})_3 = +\mathrm{Al}(x)_3\, e^{-2\mathrm{J}(x+\mathrm{K})}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mathrm{Al}(x+2i\mathrm{K}') = -\mathrm{Al}(x)\, e^{-2i\mathrm{J}'(x+i\mathrm{K}')}, \\ \mathrm{Al}(x+2i\mathrm{K}')_1 = -\mathrm{Al}(x)_1\, e^{-2i\mathrm{J}'(x+i\mathrm{K}')}, \\ \mathrm{Al}(x+2i\mathrm{K}')_2 = +\mathrm{Al}(x)_2\, e^{-2i\mathrm{J}'(x+i\mathrm{K}')}, \\ \mathrm{Al}(x+2i\mathrm{K}')_3 = +\mathrm{Al}(x)_3\, e^{-2i\mathrm{J}'(x+i\mathrm{K}')}. \end{cases}$$

Développements des fonctions elliptiques en séries simples de sinus et de cosinus.

Voici un nouveau mode d'expression analytique qui se distingue essentiellement de celui que nous venons d'étudier, en ce que la variable est assujettie à rester entre certaines limites déterminées, de sorte que, ces limites changeant, la forme du développement doit changer également. Toutefois, comme il suffit, pour embrasser toutes les valeurs réelles ou imaginaires de l'argument, d'un nombre limité de développements et que, dans chaque intervalle d'ailleurs, le développement convenable subsiste quelles que soient les périodes ou le module, on peut présumer que l'étude de ce mode d'expression ouvrira également la voie pour parvenir aux propriétés fondamentales des nouvelles transcendantes. C'est, en effet, ce qui a lieu, et l'on verra même ainsi s'offrir naturellement la réduction aux fonctions elliptiques de toute fonction doublement périodique uniforme, c'est-à-dire la proposition de M. Liouville énoncée page 129 et qu'on démontrera ci-après. Mais, à un autre point de vue et par le seul fait des identités entre les séries et les quotients de séries, on se trouve amené aux propriétés des nombres les plus cachées et les plus importantes, propriétés dont

l'intérêt s'augmente même par le lien si imprévu qui les rattache aux transcendantes de l'Analyse. Nous nous bornons ici à cette indication, ne pouvant entrer dans cette partie fort étendue de la théorie des fonctions elliptiques et qui est liée étroitement aux belles recherches que la Science doit à M. Liouville sur les fonctions numériques.

I. — *Première méthode.*

C'est celle qu'indique naturellement l'équation (1)

$$\Theta\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right) = \mathrm{A}(1 - 2q\cos 2x + q^2)(1 - 2q^3\cos 2x + q^6) \times (1 - 2q^5\cos 2x + q^{10})\ldots.$$

En partant en effet du développement connu

$$-\frac{1}{2}\log(1 - 2q\cos 2x + q^2) = q\cos 2x + q^2\frac{\cos 4x}{2} + q^3\frac{\cos 6x}{3} + q^4\frac{\cos 8x}{4} + \ldots,$$

on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\log\Theta\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right) = \text{const.} &- \cos 2x\,(q + q^3 + q^5 + \ldots) \\ &- \frac{\cos 4x}{2}(q^2 + q^6 + q^{10} + \ldots) \\ &- \frac{\cos 6x}{3}(q^3 + q^9 + q^{15} + \ldots) \\ &- \frac{\cos 8x}{4}(q^4 + q^{12} + q^{20} + \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{1}{2}\log\Theta\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right) = \text{const.} - \frac{q\cos 2x}{1-q^2} - \frac{q^2\cos 4x}{2(1-q^4)} - \frac{q^3\cos 6x}{3(1-q^6)} - \frac{q^4\cos 8x}{4(1-q^8)} - \ldots.$$

On en conclut les développements des fonctions de deuxième et

(1) *Voyez* p. 141.

de troisième espèce, d'après les relations

$$\Pi(x, a) = x\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)},$$

$$Z(x) = \zeta x - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

c'est-à-dire les formules suivantes :

$$\Pi\left(\frac{2Kx}{\pi}, \frac{2Ka}{\pi}\right) = \frac{2Kx}{\pi}\,\frac{\Theta'\left(\frac{2Ka}{\pi}\right)}{\Theta\left(\frac{2Ka}{\pi}\right)}$$

$$+ \frac{q\cos 2(x+a)}{1-q^2} + \frac{q^2\cos 4(x+a)}{2(1-q^4)} + \ldots$$

$$- \frac{q\cos 2(x-a)}{1-q^2} - \frac{q^2\cos 4(x-a)}{2(1-q^4)} - \ldots$$

$$= \frac{2Kx}{\pi}\,\frac{\Theta'\left(\frac{2Ka}{\pi}\right)}{\Theta\left(\frac{2Ka}{\pi}\right)}$$

$$- 2\left[\frac{q\sin 2a\sin 2x}{1-q^2} + \frac{q^2\sin 4a\sin 4x}{2(1-q^4)} + \frac{q^3\sin 6a\sin 6x}{3(1-q^6)} + \ldots\right]$$

et

$$\frac{K}{2\pi}\,Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{\zeta K^2}{\pi^2}\,x - \left(\frac{q\sin 2x}{1-q^2} + \frac{q^2\sin 4x}{1-q^4} + \frac{q^3\sin 6x}{1-q^6} + \ldots\right).$$

En différentiant par rapport à x la dernière, on obtient encore

$$\frac{k^2K^2}{2\pi^2}\sin^2\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\zeta K^2}{2\pi^2} - \left(\frac{q\cos 2x}{1-q^2} + \frac{2q^2\cos 4x}{1-q^4} + \frac{3q^3\cos 6x}{1-q^6} + \ldots\right).$$

Mais c'est à $\sin\mathrm{am}\,x$, $\cos\mathrm{am}\,x$, $\Delta\,\mathrm{am}\,x$ qu'il s'agit de parvenir, et le même procédé s'appliquerait, s'il était possible de les considérer comme les dérivées logarithmiques de fonctions décomposables en facteurs ainsi que $\Theta(x)$. Or, on a, en effet,

$$k\sin\mathrm{am}\,x = \frac{d\log(\Delta\,\mathrm{am}\,x - k\cos\mathrm{am}\,x)}{dx},$$

$$ik\cos\mathrm{am}\,x = \frac{d\log(\Delta\,\mathrm{am}\,x + ik\sin\mathrm{am}\,x)}{dx},$$

$$i\Delta\,\mathrm{am}\,x = \frac{d\log(\cos\mathrm{am}\,x + i\sin\mathrm{am}\,x)}{dx},$$

et les quantités sous le signe logarithmique s'expriment comme il suit :

$$\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} - k\cos\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}$$

$$= \frac{(1-2\sqrt{q}\cos x+q)(1-2\sqrt{q^3}\cos x+q^3)(1-2\sqrt{q^5}\cos x+q^5)\ldots}{(1+2\sqrt{q}\cos x+q)(1+2\sqrt{q^3}\cos x+q^3)(1+2\sqrt{q^5}\cos x+q^5)\ldots},$$

$$\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} + ik\sin\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}$$

$$= \frac{(1-2\sqrt{-q}\sin x-q)(1-2\sqrt{-q^3}\sin x-q^3)(1-2\sqrt{-q^5}\sin x-q^5)\ldots}{(1+2\sqrt{-q}\sin x-q)(1+2\sqrt{-q^3}\sin x-q^3)(1+2\sqrt{-q^5}\sin x-q^5)\ldots},$$

$$\cos\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} + i\sin\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}$$

$$= \frac{e^{2ix}(1-q\,e^{-2ix})(1-q^3e^{2ix})(1-q^5e^{-2ix})\ldots}{(1-q\,e^{2ix})(1-q^3e^{-2ix})(1-q^5e^{2ix})\ldots};$$

de sorte qu'un calcul tout semblable à celui qui a été fait précédemment conduit aux formules suivantes :

$$\frac{kK}{2\pi}\sin\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\sqrt{q}\sin x}{1-q} + \frac{\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3} + \frac{\sqrt{q^5}\sin 5x}{1-q^5} + \ldots,$$

$$\frac{kK}{2\pi}\cos\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\sqrt{q}\cos x}{1+q} + \frac{\sqrt{q^3}\cos 3x}{1+q^3} + \frac{\sqrt{q^5}\cos 5x}{1+q^5} + \ldots,$$

$$\frac{K}{2\pi}\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{4} + \frac{q\cos 2x}{1+q^2} + \frac{q^2\cos 4x}{1+q^4} + \frac{q^3\cos 6x}{1+q^6} + \ldots.$$

Quant aux expressions des quantités

$$\Delta\,\mathrm{am}\,x - k\cos\mathrm{am}\,x,$$

$$\Delta\,\mathrm{am}\,x + ik\sin\mathrm{am}\,x,$$

$$\cos\mathrm{am}\,x + i\sin\mathrm{am}\,x,$$

dont nous venons de nous servir, nous nous bornerons à établir l'une d'elles, la même méthode s'appliquant aux autres, et c'est la dernière que nous choisirons, les précédentes se trouvant dans les *Fundamenta*, car elles se tirent de l'équation (5), page 86, en y changeant pour la première x en $\frac{\pi}{2} - x$ et pour la seconde q en $-q$.

A cet effet, soit pour un instant, comme page 140,

$$\varphi(x) = 1 - e^{\frac{i\pi x}{K}};$$

l'expression qu'il s'agit de démontrer égale à

$$\cos \operatorname{am} x + i \sin \operatorname{am} x$$

prendra cette forme

$$\frac{e^{\frac{i\pi x}{2K}} \varphi(-x + iK') \varphi(x + 3iK') \varphi(-x + 5iK') \ldots}{\varphi(x + iK') \varphi(-x + 3iK') \varphi(x + 5iK') \ldots},$$

d'où l'on voit qu'on la ramènera déjà à avoir $\Theta(x)$ pour dénominateur en multipliant les deux termes par

$$A \varphi(-x + iK') \varphi(x + 3iK') \varphi(-x + 5iK') \ldots,$$

A désignant une constante. Faisons donc

$$\Phi(x) = A e^{\frac{i\pi x}{2K}} \varphi^2(-x + iK') \varphi^2(x + 3iK') \varphi^2(-x + 5iK') \ldots,$$

on aura évidemment

$$\Phi(x + 2K) = -\Phi(x),$$

et, en second lieu,

$$\Phi(x + 4iK') = \Phi(x) q^2 \frac{\varphi^2(-x - 3iK')}{\varphi^2(x + 3iK')} = \Phi(x) e^{-\frac{2i\pi}{K}(x + 2iK')}.$$

Or on satisfait de la manière la plus générale par des fonctions entières aux deux conditions

$$\begin{cases} \Phi(x + 2K) = -\Phi(x), \\ \Phi(x + 4iK') = \Phi(x) e^{-\frac{2i\pi}{K}(x + 2iK')}, \end{cases}$$

en prenant

$$\Phi(x) = CH(x) + C_1 H_1(x),$$

de sorte qu'on peut poser

$$\frac{e^{\frac{i\pi x}{2K}} \varphi(-x + iK') \varphi(x + 3iK') \varphi(-x + 5iK') \ldots}{\varphi(x + iK') \varphi(-x + 3iK') \varphi(x + 5iK') \ldots}$$
$$= \frac{CH(x) + C_1 H_1(x)}{\Theta(x)} = A \cos \operatorname{am} x + iB \sin \operatorname{am} x,$$

en désignant par A et B des constantes, qu'on déterminera par une hypothèse particulière. Soit par exemple $x = 0$ et $x = K$, on obtiendra immédiatement $A = 1$, $B = 1$, ce qui démontre notre formule.

A cette occasion, je remarquerai que la manière la plus générale de satisfaire par des fonctions entières aux conditions

$$\begin{cases} \Phi(x + 4K) = \Phi(x), \\ \Phi(x + 4iK') = \Phi(x) e^{-\frac{2i\pi}{K}(x + 4iK')}, \end{cases}$$

qui comprennent les précédentes, est de prendre avec quatre constantes arbitraires

$$\Phi(x) = A\Theta(x) + BH(x) + C\Theta_1(x) + DH_1(x).$$

Cette expression qu'on voit *a priori* être solution, par les relations de la page 151, est effectivement la plus générale; car, en supposant

$$\Phi(x) = \Sigma a_m e^{\frac{mi\pi x}{2K}},$$

ou plutôt

$$\Phi(x) = \Sigma a_m q^{\frac{m^2}{4}} e^{\frac{mi\pi x}{2K}},$$

la seconde de ces conditions conduira à poser

$$a_{m+4} = a_m,$$

ce qui ne laisse bien subsister que quatre constantes arbitraires dans l'expression de $\Phi(x)$.

II. — *Des séries précédentes ordonnées suivant les puissances de q.*

Ces développements se sont offerts d'eux-mêmes dans ce qui précède; ainsi, avant d'effectuer la sommation des progressions géométriques, a-t-on obtenu par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{kK}{2\pi} \sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = {} & \sin x \sqrt{q} \, (1 + q + q^2 + \ldots) \\ & + \sin 3x \sqrt{q^3} \, (1 + q^3 + q^6 + \ldots) \\ & + \sin 5x \sqrt{q^5} \, (1 + q^5 + q^{10} + \ldots) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = {} & \sin x \sum \sqrt{q^{2m+1}} \\ & + \sin 3x \sum \sqrt{q^{3(2m+1)}} \\ & + \sin 5x \sum \sqrt{q^{5(2m+1)}} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ou bien, sous la forme d'une somme double,

$$\frac{k\mathrm{K}}{2\pi}\sin\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}=\sum\sin(2\mu+1)\sqrt{q^{(2\mu+1)(2m+1)}}.$$

Faisons donc

$$(2\mu+1)(2m+1)=\mathrm{M},$$

M représentera tous les nombres impairs, et le coefficient d'un terme quelconque $\sqrt{q^{\mathrm{M}}}$, dans la série, sera la somme de toutes les quantités $\sin(2\mu+1)x$, où $2\mu+1$ est un diviseur de M. Et, comme tout diviseur d'un nombre impair est lui-même impair, on pourra écrire plus simplement, en désignant par μ un diviseur de M,

$$\frac{k\mathrm{K}}{2\pi}\sin\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}=\sum\sqrt{q^{\mathrm{M}}}\sum\sin\mu x.$$

D'une manière toute semblable on obtiendra

$$\frac{k\mathrm{K}}{2\pi}\cos\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}=\sum(-1)^{\frac{\mathrm{M}-1}{2}}\sqrt{q^{\mathrm{M}}}\sum(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\cos\mu x.$$

A l'égard de $\Delta\,\mathrm{am}\,x$, si l'on désigne par $\mathrm{N}=2^{\nu}\mathrm{M}$ un nombre entier quelconque, 2^{ν} étant la puissance la plus élevée du facteur 2 qu'il contienne, de sorte que M soit impair, on aura

$$\frac{\mathrm{K}}{2\pi}\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}=\frac{1}{4}+\sum(-1)^{\frac{\mathrm{M}-1}{2}}q^{\mathrm{N}}\sum(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\cos 2^{\nu+1}\mu x,$$

où μ représente comme précédemment tout diviseur du nombre impair M. Il est impossible de ne pas être frappé du caractère arithmétique de ces expressions

$$\sum\sin\mu x,$$
$$\sum(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\cos\mu x,$$
$$\sum(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\cos 2^{\nu+1}\mu x;$$

elles offrent un exemple des *fonctions numériques* qui ont été le sujet des belles recherches de M. Liouville, et la manière simple dont elles sont amenées par la théorie des fonctions elliptiques peut aisément faire présumer le rôle de cette théorie dans l'étude des propriétés des nombres.

III. — *Vérification des équations différentielles fondamentales.*

Désignons par m et m' tous les nombres impairs positifs et négatifs, par la lettre n tous les nombres entiers pairs et impairs; en posant

$$\mathrm{U}=\sum\frac{\sqrt{q^{m}}\,e^{mix}}{1-q^{m}},$$
$$\mathrm{V}=\sum\frac{\sqrt{q^{m'}}\,e^{m'ix}}{1+q^{m'}},$$
$$\mathrm{W}=\sum\frac{q^{n}\,e^{2nix}}{1+q^{2n}},$$

on aura

$$\frac{ik\mathrm{K}}{\pi}\sin\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}=\mathrm{U},$$
$$\frac{k\mathrm{K}}{\pi}\cos\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}=\mathrm{V},$$
$$\frac{\mathrm{K}}{\pi}\,\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}=\mathrm{W}.$$

Cela posé, aux équations

$$\frac{d\sin\mathrm{am}\,x}{dx}=\cos\mathrm{am}\,x\,\Delta\,\mathrm{am}\,x,$$
$$\frac{d\cos\mathrm{am}\,x}{dx}=-\sin\mathrm{am}\,x\,\Delta\,\mathrm{am}\,x,$$
$$\frac{d\,\Delta\,\mathrm{am}\,x}{dx}=-k^{2}\sin\mathrm{am}\,x\cos\mathrm{am}\,x,$$

correspondent celles-ci

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx}=2i\,\mathrm{VW},\qquad\frac{d\mathrm{V}}{dx}=2i\,\mathrm{WU},\qquad\frac{d\mathrm{W}}{dx}=2i\,\mathrm{UV},$$

que nous nous proposons de vérifier.

Considérons pour cela les produits

$$\mathrm{VW}=\sum\frac{q^{\frac{m'+2n}{2}}\,e^{(m'+2n)ix}}{(1+q^{m'})(1+q^{2n})},$$
$$\mathrm{WU}=\sum\frac{q^{\frac{m+2n}{2}}\,e^{(m+2n)ix}}{(1-q^{m})(1+q^{2n})},$$
$$\mathrm{UV}=\sum\frac{q^{\frac{m+m'}{2}}\,e^{(m+m')ix}}{(1-q^{m})(1+q^{m'})},$$

et observons qu'on a identiquement

$$\frac{q^{\frac{m'+2n}{2}}}{(1+q^{m'})(1+q^{2n})} = \frac{q^{\frac{m'+2n}{2}}}{1-q^{m'+2n}}\left(\frac{1}{1+q^{m'}} - \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\right),$$

$$\frac{q^{\frac{m+2n}{2}}}{(1-q^{m})(1+q^{2n})} = \frac{q^{\frac{m+2n}{2}}}{1+q^{m+2n}}\left(\frac{1}{1-q^{m}} - \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\right),$$

$$\frac{q^{\frac{m+m'}{2}}}{(1-q^{m})(1+q^{m'})} = \frac{q^{\frac{m+m'}{2}}}{1+q^{m+m'}}\left(\frac{1}{1-q^{m}} - \frac{q^{m'}}{1+q^{m'}}\right).$$

En posant

$$m+2n = \mathrm{M}, \quad m'+2n = \mathrm{M}', \quad m+m' = 2\mathrm{N},$$

de sorte que M et M′ soient des nombres impairs, et N un entier quelconque, on pourra écrire :

$$\mathrm{VW} = \sum \frac{\sqrt{q^{\mathrm{M}'}}\, e^{\mathrm{M}'ix}}{1-q^{\mathrm{M}'}}\left(\frac{1}{1+q^{m'}} - \frac{q^{\mathrm{M}'-m'}}{1+q^{\mathrm{M}'-m'}}\right),$$

$$\mathrm{WU} = \sum \frac{\sqrt{q^{\mathrm{M}}}\, e^{\mathrm{M}ix}}{1+q^{\mathrm{M}}}\left(\frac{1}{1-q^{m}} - \frac{q^{\mathrm{M}-m}}{1+q^{\mathrm{M}-m}}\right),$$

$$\mathrm{UV} = \sum \frac{q^{\mathrm{M}}\, e^{2\mathrm{N}ix}}{1+q^{2\mathrm{N}}}\left(\frac{1}{1-q^{m}} - \frac{q^{2\mathrm{N}-m}}{1+q^{2\mathrm{N}-m}}\right).$$

Ces expressions étant comparées respectivement à $\frac{d\mathrm{U}}{dx}$, $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$, $\frac{d\mathrm{W}}{dx}$, on reconnaît qu'il suffit pour démontrer les relations différentielles d'établir qu'on a, en supprimant les accents :

$$\mathrm{M} = 2\sum\left(\frac{1}{1+q^{m}} - \frac{q^{\mathrm{M}-m}}{1+q^{\mathrm{M}-m}}\right),$$

$$\mathrm{M} = 2\sum\left(\frac{1}{1-q^{m}} - \frac{q^{\mathrm{M}-m}}{1+q^{\mathrm{M}-m}}\right),$$

$$\mathrm{N} = \sum\left(\frac{1}{1-q^{m}} - \frac{q^{2\mathrm{N}-m}}{1+q^{2\mathrm{N}-m}}\right).$$

Le procédé à suivre pour cela étant le même dans les trois équations, nous considérerons, pour fixer les idées, la première. Distinguons, à cet effet, les valeurs positives des valeurs négatives du

nombre m; les premières conduisent à l'expression

$$\sum\left(\frac{1}{1+q^{m}} - \frac{q^{\mathrm{M}-m}}{1+q^{\mathrm{M}-m}}\right),$$

qu'en supposant M positif, nous écrirons

$$\sum\left(\frac{q^{m-\mathrm{M}}}{1+q^{m-\mathrm{M}}} - \frac{q^{m}}{1+q^{m}}\right),$$

d'après les identités

$$\frac{1}{1+q^{m}} = 1 - \frac{q^{m}}{1+q^{m}},$$

$$\frac{q^{\mathrm{M}-m}}{1+q^{\mathrm{M}-m}} = 1 - \frac{q^{m-\mathrm{M}}}{1+q^{m-\mathrm{M}}};$$

les secondes, en mettant $-m$ à la place de m, à celle-ci :

$$\sum\left(\frac{1}{1+q^{-m}} - \frac{q^{\mathrm{M}+m}}{1+q^{\mathrm{M}+m}}\right) = \sum\left(\frac{q^{m}}{1+q^{m}} - \frac{q^{\mathrm{M}+m}}{1+q^{\mathrm{M}+m}}\right),$$

de sorte qu'il reste la quantité suivante :

$$\sum \frac{q^{m-\mathrm{M}}}{1+q^{m-\mathrm{M}}} - \sum \frac{q^{\mathrm{M}+m}}{1+q^{\mathrm{M}+m}}.$$

Mais, à partir de $m = 2\mathrm{M}+1$, tous les termes de la première somme sont donnés par la seconde en signes contraires et disparaissent. Ainsi il ne subsiste plus qu'une série finie

$$\sum_{m=1}^{m=2\mathrm{M}-1} \frac{q^{m-\mathrm{M}}}{1+q^{m-\mathrm{M}}},$$

que nous décomposerons comme il suit, en isolant le terme moyen, savoir :

$$\sum_{m=1}^{m=\mathrm{M}-2} \frac{q^{m-\mathrm{M}}}{1+q^{m-\mathrm{M}}} + \frac{1}{2} + \sum_{m=\mathrm{M}+2}^{m=2\mathrm{M}-1} \frac{q^{m-\mathrm{M}}}{1+q^{m-\mathrm{M}}}.$$

Or, en remplaçant $\frac{q^{m-\mathrm{M}}}{1+q^{m-\mathrm{M}}}$ apr $\frac{1}{1+q^{\mathrm{M}-m}}$, la première somme est

$$\frac{1}{1+q^{2}} + \frac{1}{1+q^{4}} + \ldots + \frac{1}{1+q^{\mathrm{M}-1}},$$

et ces divers termes, respectivement ajoutés à ceux de la seconde, savoir :

$$\frac{q^2}{1+q^2}+\frac{q^4}{1+q^4}+\ldots+\frac{q^{M-1}}{1+q^{M-1}},$$

donneront autant de fois l'unité qu'il y a de termes, c'est-à-dire $\frac{M-1}{2}$; joignant à cela la fraction $\frac{1}{2}$ qui correspond au terme du milieu, il vient en définitive

$$\frac{1}{2}+\frac{M-1}{2}=\frac{M}{2},$$

ce qui est bien le résultat auquel il fallait parvenir. Enfin, si l'on suppose M négatif, on observera que l'expression que nous avons considérée change de signe avec M, de sorte que

$$\sum\left(\frac{1}{1+q^m}-\frac{q^{M-m}}{1+q^{M-m}}\right)=-\sum\left(\frac{1}{1+q^m}-\frac{q^{-M-m}}{1+q^{-M-m}}\right).$$

En effet, si l'on met dans le premier membre $m+M$ au lieu de m, on obtiendra identiquement le terme général de la série du second membre.

Après avoir ainsi montré par un exemple important de quelle manière les nouveaux développements peuvent, comme ceux qui ont servi de base à la théorie, conduire aux propriétés fondamentales des fonctions elliptiques, nous allons présenter à un point de vue plus général la comparaison entre les deux modes d'expressions, en donnant sous forme de série périodique simple une fonction uniforme quelconque à double période.

IV. — *Développement en série de sinus et de cosinus d'une fonction doublement périodique.*

Nommons $F(z)$ la fonction proposée, a et b ses périodes; voici en premier lieu comment nous définirons les limites de la variable, entre lesquelles sera successivement représentée cette fonction, par un développement en série de sinus et de cosinus qui mettra en évidence, par exemple, la période a. Observons, à cet effet, que l'expression

$$z=at+bu,$$

en supposant réels t et u, peut représenter toute quantité imaginaire, et que, s'il s'agit d'obtenir toutes les valeurs que peut prendre $F(z)$, il suffira, eu égard à la double périodicité, d'attribuer à t et u toutes les valeurs réelles comprises entre zéro et l'unité. Nous appliquerons cette remarque aux racines de l'équation $\frac{1}{F(z)}=0$ dont dépendent les limitations que nous avons en vue, et en suivant l'ordre croissant depuis zéro à l'unité des valeurs de u, nous les désignerons par $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_i$, de sorte que ζ_i corresponde à $u=u_i$. Cela posé, soit υ_i une quantité comprise entre u_i et u_{i+1} (¹), les limites exclues, l'expression

$$F(at+b\upsilon_1)$$

ne pourra devenir infinie pour aucune valeur réelle de t, et donnera lieu par suite au développement

$$F(at+b\upsilon_i)=\sum A_m^{(i)}e^{2mi\pi t},$$

convergent quelle que soit cette variable. Par conséquent, si les quantités ζ_i sont en nombre égal à μ, l'ensemble des μ séries suivantes :

$$\begin{gathered}\sum A_m^{(1)}e^{2mi\pi t},\\ \sum A_m^{(2)}e^{2mi\pi t},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \sum A_m^{(\mu)}e^{2mi\pi t},\end{gathered}$$

représentera $F(z)$ pour

$$z=at+bu,$$

t étant quelconque, u moindre que l'unité, mais toutefois en excluant les quantités

$$\begin{gathered}at+bu_1,\\ at+bu_2,\\ \ldots\ldots\ldots,\\ at+bu_\mu.\end{gathered}$$

(¹) La quantité υ_1 pourra être supposée comprise non seulement entre u_1 et zéro, mais encore entre zéro et la valeur négative de u la plus petite, abstraction faite du signe.

Et si l'on reproduit périodiquement les mêmes séries, en faisant croître u depuis l'unité jusqu'à l'infini, et décroître depuis zéro jusqu'à l'infini négatif, on aura embrassé toute l'étendue des valeurs imaginaires de l'argument et obtenu, sauf les restrictions indiquées, une représentation complète de la fonction. Cela bien compris, nous allons donner la détermination des quantités A_m.

Pour cela nous emploierons la proposition fondamentale du calcul des résidus, exprimée par l'équation

$$\int f(z)\,dz = 2i\pi\Delta,$$

où le premier membre représente l'intégrale d'une fonction uniforme $f(z)$, prise le long d'un contour fermé quelconque, et Δ la somme des résidus de $f(z)$ pour toutes les valeurs de la variable, qui correspondent à des points renfermés dans ce contour. Cette proposition de M. Cauchy, appliquée au cas où le contour est un parallélogramme ayant pour affixes de ses sommets les quantités

$$\begin{aligned} &p,\\ &p+a,\\ &p+a+b,\\ &p+b, \end{aligned}$$

et pour équations de ses côtés ces relations où la variable croît de zéro à l'unité, savoir :

$$\begin{aligned} z &= p+at,\\ z &= p+a+bt,\\ z &= p+b+a(1-t),\\ z &= p+b(1-t), \end{aligned}$$

donnera

$$a\int_0^1 f(p+at)\,dt + b\int_0^1 f(p+a+bt)\,dt \\ - a\int_0^1 f[p+b+a(1-t)]\,dt - b\int_0^1 f[p+b(1-t)]\,dt = 2i\pi\Delta,$$

ou plus simplement

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & a\int_0^1 f(p+at)\,dt + b\int_0^1 f(p+a+bt)\,dt \\ & \quad - a\int_0^1 f(p+b+at)\,dt - b\int_0^1 f(p+bt)\,dt = 2i\pi\Delta. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs, et d'après la signification précédemment indiquée, Δ représentera la somme des résidus de $f(z)$ pour toutes les racines ζ de l'équation $\frac{1}{f(z)} = 0$, dont les valeurs peuvent être représentées par la formule

$$\zeta = p + at + bu,$$

en supposant t et u compris entre zéro et l'unité. Cela posé, l'équation

$$F(at + b\varpi_1) = \sum A_m^{(1)} e^{2mi\pi t},$$

donnant

$$A_m^{(1)} = \int_0^1 F(at + b\varpi_1)\, e^{-2mi\pi t}\,dt,$$

nous appliquerons la relation (1) en faisant

$$\begin{aligned} p &= b\varpi_1,\\ f(z) &= F(z)\, e^{-2mi\pi\frac{z-b\varpi_1}{a}}. \end{aligned}$$

Comme on a évidemment

$$\begin{aligned} f(z+a) &= f(z),\\ f(z+b) &= f(z)\, q^{-2m}, \end{aligned}$$

en posant, ainsi que plus haut,

$$q = e^{i\pi\frac{b}{a}},$$

le premier membre de l'équation (1) se réduira à

$$a A_m^{(1)} (1 - q^{-2m}).$$

Quant au second, c'est-à-dire à la somme des résidus de la fonction

$$F(z)\, e^{-2mi\pi\frac{z-b\varpi_1}{a}},$$

pour $z = \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\mu$, nous supposerons pour simplifier que ces quantités soient des racines simples de l'équation $\frac{1}{F(z)} = 0$; alors, en désignant par R_i la limite de $\varepsilon F(\zeta_i + \varepsilon)$ pour $\varepsilon = 0$, on trouvera immédiatement

$$\Delta = e^{2mi\pi\frac{b\varpi_1}{a}} \left(R_1 e^{-2mi\pi\frac{\zeta_1}{a}} + R_2 e^{-2mi\pi\frac{\zeta_2}{a}} + \ldots + R_\mu e^{-2mi\pi\frac{\zeta_\mu}{a}} \right).$$

On en conclut le développement cherché de la fonction $F(z)$ pour $z = at + b\upsilon_1$ sous cette forme

$$(z) = \text{const.} + \frac{2i\pi}{a}\left[R_1 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_1)}}{1-\mathfrak{q}^{-2m}} + R_2 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{n}(z-\zeta_2)}}{1-\mathfrak{q}^{-2m}} + \ldots + R_\mu \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_\mu)}}{1-\mathfrak{q}^{-2m}}\right]$$

où nous ajoutons une constante arbitraire, en supprimant dans chaque somme le terme qui correspond à $m = 0$. Pour ce cas effectivement l'équation

$$a A_m^{(1)}(1 - \mathfrak{q}^{-2m}) = 2i\pi\Delta$$

ne peut, comme on le voit, déterminer $A_0^{(1)}$, et donne seulement $\Delta = 0$, c'est-à-dire

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_\mu = 0.$$

Mais, avant d'aller plus loin, faisons de suite une application de la formule générale que nous venons d'obtenir en supposant $F(z) = \sin\operatorname{am} z$. Soit alors

$$a = 4K,$$
$$b = 2iK',$$

on aura

$$\zeta_1 = iK',$$
$$\zeta_2 = iK' + 2K,$$
$$R_1 + \lim \varepsilon \sin\operatorname{am}(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{k},$$
$$\mathfrak{q} = e^{-\pi\frac{K'}{2K}} = \sqrt{q},$$

et, par suite,

$$\sin\operatorname{am} z = \frac{i\pi}{2kK}\left[\sum \frac{e^{m\frac{i\pi}{2K}(z-iK')}}{1-q^{-m}} - \sum \frac{e^{m\frac{i\pi}{2K}(z-iK'-2K)}}{1-q^{-m}}\right] + \text{const.}$$
$$= \frac{i\pi}{2kK}\sum e^{m\frac{i\pi z}{2K}} \frac{\sqrt{q^{-m}}}{1-q^{-m}}[1-(-1)^m] + \text{const.}$$

On voit qu'on peut ne conserver que les valeurs impaires de m, de sorte qu'en supposant nulle la constante, on trouvera immédiatement

$$\frac{ikK}{\pi}\sin\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi} = \sum e^{mi\pi z}\frac{\sqrt{q^m}}{1-q^m},$$

c'est-à-dire pour le second membre la série désignée par U, page 221.

Revenons aux considérations générales, et surtout à la comparaison des deux développements qui correspondent à $z = at + b\upsilon_1$ et $z = at + b\upsilon_2$. Les résidus, dans le premier cas, se rapportent aux valeurs $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\mu$; or en passant à l'intervalle suivant, défini par la relation $z = at + b\upsilon_2$, on sera conduit à la série $\zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_\mu, \zeta_1 + b$, et comme les résidus de $F(z)$ relatifs à ζ_1, $\zeta_1 + b$ seront les mêmes, les deux développements seront, avec l'expression des termes constants,

$$F(z) = \int_0^1 F(at + b\upsilon_1)\,dt + \frac{2i\pi}{a}R_1\sum\frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_1)}}{1-\mathfrak{q}^{-2m}}$$
$$+ \frac{2i\pi}{a}R_2\sum\frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_2)}}{1-\mathfrak{q}^{-2m}} + \ldots,$$

$$F(z) = \int_0^1 F(at + b\upsilon_2)\,dt + \frac{2i\pi}{a}R_1\sum\frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_1-b)}}{1-\mathfrak{q}^{-2m}}$$
$$+ \frac{2i\pi}{a}R_2\sum\frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_2)}}{1-\mathfrak{q}^{-2m}} + \ldots.$$

Ce sont donc les termes constants que nous avons à comparer. Nous nous servirons pour cela de l'équation déjà employée, en y remplaçant la période b par une quantité arbitraire β, savoir :

$$a\int_0^1 F(p + at)\,dt + \beta\int_0^1 F(p + a + \beta t)\,dt$$
$$- a\int_0^1 F(p + \beta + at)\,dt - \beta\int_0^1 F(p + \beta t)\,dt = 2i\pi\Delta.$$

Si nous supposons $p = b\upsilon_1$ et $p + \beta = b\upsilon_2$, Δ se réduira au seul résidu de $F(z)$ qui correspond à $z = \zeta_1$, et l'on aura immédiatement, en divisant par a, la relation

$$\int_0^1 F(at + b\upsilon_1)\,dt - \int_0^1 F(at + b\upsilon_2)\,dt = \frac{2i\pi}{a}R_1.$$

Nous pouvons donc ramener les deux développements à ne contenir absolument que les mêmes éléments analytiques, de sorte que, le premier étant

$$C + \frac{2i\pi}{a}R_1\sum\frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_1)}}{1-\mathfrak{q}^{-2m}} + \frac{2i\pi}{a}R_2\sum\frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_2)}}{1-\mathfrak{q}^{-2m}} + \ldots$$
$$+ \frac{2i\pi}{a}R_\mu\sum\frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_\mu)}}{1-\mathfrak{q}^{-2m}};$$

le second, en réunissant les termes en R_1, s'écrira ainsi

$$C + \frac{2i\pi}{a} R_1 \left[\sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_1-b)}}{1-\mathfrak{q}^{-2m}} - 1 \right] + \frac{2i\pi}{a} R_2 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_2)}}{1-\mathfrak{q}^{-2m}} + \ldots$$
$$+ \frac{2i\pi}{a} R_\mu \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_\mu)}}{1-\mathfrak{q}^{-2m}}.$$

De là se tire une conséquence importante et qui justifiera ce que nous avons annoncé plus haut, sur le rôle de la fonction de seconde espèce.

Remarquons, en effet, que les diverses séries affectées des facteurs R_1, R_2, ... proviennent de ce seul développement

$$\sum \frac{e^{2m\frac{i\pi z}{a}}}{1-\mathfrak{q}^{-2m}},$$

en y remplaçant z par $z-\zeta_1$, $z-\zeta_2$, ..., et $z-\zeta_1-b$ dans le second cas. Or, en mettant $z-\frac{b}{2}$ au lieu de z, ce développement prend la forme

$$\sum \frac{\mathfrak{q}^{-m} e^{2m\frac{i\pi z}{a}}}{1-\mathfrak{q}^{-2m}},$$

qui nous rappelle immédiatement une expression analytique bien connue. Soit, en effet,

$$a = 2K, \quad b = 2iK',$$

d'où

$$\mathfrak{q} = q,$$

on aura

$$\frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} = \frac{i\pi}{K} \sum \frac{q^{-m} e^{m\frac{i\pi z}{K}}}{1-q^{-2m}} = \frac{2\pi}{K} \sum_1^\infty {}_m \frac{q^m}{1-q^{2m}} \sin \frac{m\pi z}{K}.$$

Nous pourrons, par conséquent, écrire, pour $z = at + b\upsilon_1$,

$$F(z-iK') = C + R_1 \frac{\Theta'(z-\zeta_1)}{\Theta(z-\zeta_1)} + R_2 \frac{\Theta'(z-\zeta_2)}{\Theta(z-\zeta_2)} + \ldots + R_\mu \frac{\Theta'(z-\zeta_\mu)}{\Theta(z-\zeta_\mu)},$$

et, pour $z = at + b\upsilon_2$,

$$F(z-iK') = C + R_1 \left[\frac{\Theta'(z-\zeta_1-2iK')}{\Theta(z-\zeta_1-2iK')} - \frac{i\pi}{K} \right]$$
$$+ R_2 \frac{\Theta'(z-\zeta_2)}{\Theta(z-\zeta_2)} + \ldots + R_\mu \frac{\Theta'(z-\zeta_\mu)}{\Theta(z-\zeta_\mu)}.$$

C'est en ce moment que se manifeste toute l'importance de la propriété caractéristique de la fonction de seconde espèce relativement à la double périodicité. Effectivement, les relations

$$\begin{cases} Z(x+2K) = Z(x) + 2J, \\ Z(x+2iK') = Z(x) + 2iJ' \end{cases}$$

équivalent à celles-ci :

$$\begin{cases} \dfrac{\Theta'(x+2K)}{\Theta(x+2K)} = \dfrac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}, \\ \dfrac{\Theta'(x-2iK')}{\Theta(x-2iK')} = \dfrac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + \dfrac{i\pi}{K}, \end{cases}$$

d'où l'on voit que l'on peut ramener à une seule les deux formules de développement, par l'introduction de la transcendante, puisque la quantité $\frac{\Theta'(z-\zeta_1-2iK')}{\Theta(z-\zeta_1-2iK')} - \frac{i\pi}{K}$ se réduit à $\frac{\Theta'(z-\zeta_1)}{\Theta(z-\zeta_1)}$.

De là résulte une relation analytique générale subsistant dans toute l'étendue des valeurs de l'argument, et dont la forme définitive, en passant de $F(z-iK')$ à $F(z)$, s'obtiendra comme il suit :

Rappelons d'abord que l'on a

$$\Theta(x+iK') = iH(x)\, e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')},$$

d'où, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres,

$$\frac{\Theta'(x+iK')}{\Theta(x+iK')} = \frac{H'(x)}{H(x)} - \frac{i\pi}{2K}.$$

Il s'ensuit qu'en mettant $z+iK'$ à la place de z, on obtiendra

$$F(z) = C + R_1 \frac{H'(z-\zeta_1)}{H(z-\zeta_1)}$$
$$+ R_2 \frac{H'(z-\zeta_2)}{H(z-\zeta_2)} + \ldots + R_\mu \frac{H'(z-\zeta_\mu)}{H(z-\zeta_\mu)} - \frac{i\pi}{2K}(R_1 + R_2 + \ldots + R_\mu),$$

et plus simplement, puisque la somme des résidus est nulle,

$$F(z) = C + R_1 \frac{H'(z-\zeta_1)}{H(z-\zeta_1)} + R_2 \frac{H'(z-\zeta_2)}{H(z-\zeta_2)} + \ldots + R_\mu \frac{H'(z-\zeta_\mu)}{H(z-\zeta_\mu)}.$$

Dans le cas enfin où ζ, au lieu d'être une racine simple de l'équation $\frac{1}{F(x)} = 0$, serait racine multiple d'ordre n, ce qui donnerait lieu à la relation

$$\varepsilon^n F(\zeta + \varepsilon) = A + B\varepsilon + \ldots + Q\varepsilon^{n-2} + R\varepsilon^{n-1} + \ldots,$$

le seul terme $R\frac{H'(z-\zeta)}{H(z-\zeta)}$ devrait être remplacé dans la formule par l'ensemble

$$\begin{aligned} R\frac{H'(z-\zeta)}{H(z-\zeta)} - Q\frac{d}{dz}\left[\frac{H'(z-\zeta)}{H(z-\zeta)}\right] + \ldots + \frac{(-1)^{n-2}B}{1.2\ldots n-2}\frac{d^{n-2}}{dz}\left[\frac{H'(z-\zeta)}{H(z-\zeta)}\right]& \\ + \frac{(-1)^{n-1}A}{1.2\ldots n-1}\frac{d^{n-1}}{dz}\left[\frac{H'(z-\zeta)}{H(z-\zeta)}\right]&. \end{aligned}$$

V. — *Proposition de M. Liouville.*

Nous fonderons la démonstration sur la formule précédente, en y supposant

$$F(z) = \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)},$$

$\Phi(z)$ étant une fonction doublement périodique uniforme dont les périodes seront, comme plus haut, $2K$ et $2iK'$. Alors les racines ζ comprendront les solutions des équations

$$\begin{cases} \Phi(z) = 0, \\ \dfrac{1}{\Phi(z)} = 0. \end{cases}$$

Nous désignerons les premières par ζ et les secondes par ζ', en admettant toujours qu'elles soient représentées par la formule

$$p + 2Kt + 2iK'u,$$

t et u restant compris entre zéro et l'unité. A l'égard des résidus de $\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}$, on sait qu'ils sont égaux à $+1$ ou à -1 suivant qu'ils se rapportent aux quantités ζ ou ζ', et, comme leur somme est nulle, on est amené à la conséquence remarquable que ces quantités ζ et ζ' sont précisément en même nombre.

Cela posé, et en désignant ce nombre par n, on aura

$$\begin{aligned} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = C &+ \frac{H'(z-\zeta_1)}{H(z-\zeta_1)} + \frac{H'(z-\zeta_2)}{H(z-\zeta_2)} + \ldots + \frac{H'(z-\zeta_n)}{H(z-\zeta_n)} \\ &- \frac{H'(z-\zeta'_1)}{H(z-\zeta'_1)} - \frac{H'(z-\zeta'_2)}{H(z-\zeta'_2)} - \ldots - \frac{H'(z-\zeta'_n)}{H(z-\zeta'_n)}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en désignant par A une constante arbitraire,

$$\Phi(z) = A\, e^{Cz}\frac{H(z-\zeta_1)H(z-\zeta_2)\ldots H(z-\zeta_n)}{H(z-\zeta'_1)H(z-\zeta'_2)\ldots H(z-\zeta'_n)},$$

expression qui doit avoir les quantités $2K$ et $2iK'$ pour périodes.

Or, en faisant usage des relations

$$\begin{aligned} H(x+2K) &= -H(x), \\ H(x+2iK') &= -H(x)\, e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}, \end{aligned}$$

et représentant la somme des racines ζ par $\Sigma\zeta$, la somme des racines ζ' par $\Sigma\zeta'$, on trouvera

$$\begin{aligned} \Phi(z+2K) &= \Phi(z)\, e^{2KC}, \\ \Phi(z+2iK') &= \Phi(z)\, e^{2iK'C + \frac{i\pi}{K}\Sigma\zeta - \frac{i\pi}{K}\Sigma\zeta'}, \end{aligned}$$

de sorte qu'il faut poser

$$e^{2KC} = 1,$$
$$e^{2iK'C + \frac{i\pi}{K}\Sigma\zeta - \frac{i\pi}{K}\Sigma\zeta'} = 1,$$

et ces conditions donnent, en désignant par α et β des nombres entiers arbitraires,

$$C = -\frac{i\pi}{K}\beta,$$

et, en second lieu,

$$\Sigma\zeta - \Sigma\zeta' = 2\alpha K + 2\beta iK'.$$

On observera combien est digne de remarque cette relation dont la découverte appartient à M. Liouville, entre les racines des équations

$$\begin{cases} \Phi(z) = 0, \\ \dfrac{1}{\Phi(z)} = 0; \end{cases}$$

quant aux nombres entiers α et β qui y figurent, j'ajouterai seule-