Plus généralement, on aura

$$\frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} = (a_0 + a_1 u^2 + a_2 u^4 + \ldots + a_n u^{2n})\,vw,$$

$$\frac{d^{2n}u}{dx^{2n}} = (\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 u^2 + \mathrm{A}_2 u^4 + \ldots + \mathrm{A}_n u^{2n})\,u,$$

les coefficients étant des fonctions entières de k^2. On en déduit ce développement qui subsiste entre les limites -1 et $+1$ de la variable, et où l'on a fait

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right),$$

$$\begin{aligned} u = x - 2k\alpha\,\frac{x^3}{1.2.3} &+ 4k^2(\alpha^2+3)\,\frac{x^5}{1.2.3.4.5} \\ &- 8k^3(\alpha^3+33\alpha)\,\frac{x^7}{1.2\ldots7} + 16k^4(\alpha^4+306\alpha^2+189)\,\frac{x^9}{1.2\ldots9} \\ &- 32k^5(\alpha^5+2766\alpha^3+8289\alpha)\,\frac{x^{11}}{1.2\ldots11} + \ldots. \end{aligned}$$

On trouve de même

$$\begin{aligned} v = 1 - \frac{x^2}{1.2} &+ (1+4k^2)\,\frac{x^4}{1.2.3.4} - (1+44k^2+16k^4)\,\frac{x^6}{1.2\ldots6} \\ &+ (1+408k^2+912k^4+64k^6)\,\frac{x^8}{1.2\ldots8} - \ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w = 1 - k^2\,\frac{x^2}{1.2} &+ k^2(4+k^2)\,\frac{x^4}{1.2.3.4} - k^2(16+44k^2+k^4)\,\frac{x^6}{1.2\ldots6} \\ &+ k^2(64+912k^2+408k^4+k^6)\,\frac{x^8}{1.2\ldots8} - \ldots. \end{aligned}$$

M. Gudermann (¹) a fait la remarque qu'on pouvait poser, aux termes près du cinquième ordre,

$$u = \frac{\sin\left(x\sqrt{1+k^2}\right)}{\sqrt{1+k^2}}$$

et

$$v = \cos x, \qquad w = \cos kx,$$

en négligeant seulement x^4, ce qu'on vérifiera sans peine par le développement.

Voici donc une nouvelle et complète définition des trois fonctions doublement périodiques, en joignant aux équations diffé-

(¹) *Journal de Crelle*, t. 19.

rentielles les valeurs initiales $u = 0$, $v = 1$, $w = 1$ pour $x = 0$. En particulier, la fonction $\sin \operatorname{am}(x)$ sera déterminée en posant

$$x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

et c'est cette intégrale, ou, plus généralement,

$$\int \frac{\mathrm{F}(u)\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

en désignant par $\mathrm{F}(u)$ une fonction rationnelle, dont l'étude a ouvert la voie pour parvenir aux fonctions elliptiques. On reconnaît ainsi l'origine de cette expression de fonctions inverses, dont nous avons plusieurs fois fait usage, puisque u est la fonction inverse de l'intégrale dont la valeur est x, et l'on peut juger quel long enchaînement d'idées et quels efforts il a fallu pour parvenir de là aux notions de fonctions doublement périodiques et aux séries qui nous ont servi de point de départ. Mais ce long travail a été fécond pour la Science; c'est comme conséquences de ces recherches que nous ont été acquises plusieurs notions analytiques entièrement fondamentales, et en particulier ce que nous savons sur le mode même d'existence des fonctions intégrales. Après avoir trouvé, par exemple, que $\sin \operatorname{am}(x)$ ne change pas lorsqu'on change x en $x + 4m\mathrm{K} + 2m'i\mathrm{K}'$, m et m' étant des nombres entiers, on a dû nécessairement rechercher dans l'intégrale

$$\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

la raison de cette sorte d'indétermination qui donne naissance à la périodicité dans la fonction inverse. M. Cauchy, dans son Mémoire sur les intégrales prises entre des limites imaginaires, avait donné les principes essentiels de cette étude si importante; elle a été complètement faite par M. Puiseux, dans un excellent travail intitulé : *Recherches sur les fonctions algébriques* (*Journal de M. Liouville*, année 1850), et auquel nous renvoyons le lecteur. Un autre résultat encore consiste dans ce sens plus complet et plus approfondi, que l'on a été conduit à attacher en Analyse à l'expression même de *fonction*, en reconnaissant et en caractérisant, entre les divers modes de dépendance de deux quantités, des distinctions essentielles et dont les recherches auxquelles a donné lieu la théorie des fonctions elliptiques ont montré toute l'importance. Ainsi ont été proposées ces questions dont l'objet est de reconnaître dans la définition même d'une fonction, donnée, par exemple, par une équation différentielle, si elle est *uniforme* ou non, et dans le premier cas si elle est entière ou fractionnaire. Les résultats les plus beaux par leur grande généralité qui ont été obtenus dans cette voie sont dus à M. Weierstrass (1) et à M. Riemann (2).

III. — *Des quantités* K *et* K'.

En particularisant les périodes de manière à rendre égale à l'unité la limite du rapport $\frac{\sin\operatorname{am} x}{x}$ pour x infiniment petit, nous sommes parvenus à l'expression

$$\frac{\sqrt{k}\,\mathrm{K}}{\pi} = \sqrt[4]{q}\left[\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}\right]^2,$$

qui conduit à une conséquence importante. Observons d'abord qu'en supposant $x = \mathrm{K}$ et, par conséquent, $\sin\operatorname{am}\mathrm{K} = 1$ (3) dans l'expression en produit infini de $\sin\operatorname{am} x$, on aura

$$\sqrt{k} = 2\sqrt[4]{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^2.$$

En divisant membre à membre ces deux équations et extrayant

(1) *Theorie der Abel'schen Functionen* (*Journal de Crelle*, 1856). *Voyez* aussi diverses Notes de M. Cauchy, publiées à cette époque dans les *Comptes rendus*, et un Mémoire de MM. Briot et Bouquet : *Sur l'intégration des équations différentielles du premier ordre.*

(2) *Allgemeine Voraussetzungen und Hülfsmittel für die Untersuchung von Functionen unbeschränkt veränderlicher Grössen, etc.* (*Journal de Crelle*, 1857).

(3) On trouve que $\sin\operatorname{am}\mathrm{K} = 1$ par la formule $\sin\operatorname{am} x = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}$, en se rappelant que par définition $\sqrt{k} = \frac{\mathrm{H}(\mathrm{K})}{\Theta(\mathrm{K})}$, page 162.

la racine carrée, il en résulte

$$\sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}} = \left[\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}\right] \times \left[\frac{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}\right],$$

expression susceptible d'une simplification remarquable. Employons à cet effet la relation donnée par Euler

$$\begin{aligned}(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots &= \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots}\\ &= \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots};\end{aligned}$$

on obtiendra d'abord

$$\begin{aligned}\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots} = {}& (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots\\ &\times(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots,\end{aligned}$$

et en remarquant ensuite que

$$\begin{aligned}(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots = {}& (1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots\\ &\times(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots\end{aligned}$$

on verra tous les dénominateurs disparaître dans la valeur de $\sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}}$, qui deviendra ainsi

$$\sqrt{\frac{\mathrm{K}2}{\pi}} = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots[(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots]^2.$$

Cela étant, si l'on pose $x = 0$ dans la formule précédemment démontrée

$$\begin{aligned}\Theta_1\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right) &= 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots\\ &= (1+2q\cos 2x + q^2)(1+2q^3\cos 2x + q^6)\\ &\quad\times(1+2q^5\cos 2x + q^{10})\ldots(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots,\end{aligned}$$

il viendra

$$\begin{aligned}\Theta_1(0) &= 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots\\ &= (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots[(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots]^2,\end{aligned}$$

d'où ce résultat, qui est d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques,

$$\sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}} = \Theta_1(0) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots.$$

On en déduit, en ayant égard aux équations

$$\sqrt{k} = \frac{\mathrm{H}(\mathrm{K})}{\Theta(\mathrm{K})} = \frac{\mathrm{H}_1(0)}{\Theta_1(0)},$$
$$\sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)},$$

les deux suivantes :

$$\sqrt{\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}} = \mathrm{H}_1(0) = 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + 2\sqrt[4]{q^{19}} + \ldots,$$
$$\sqrt{\frac{2k'\mathrm{K}}{\pi}} = \Theta\,(0) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots.$$

C'est la seule quantité K qui donne lieu à des relations de cette forme ; la quantité K′, entrant d'une manière différente dans l'expression $q = e^{-\pi\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}$, ne paraît pas susceptible de développements analogues en série. Mais toutes deux s'expriment d'une manière parfaitement semblable à l'aide des modules k et k' par ces intégrales définies

$$\mathrm{K} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \qquad \mathrm{K}' = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2u^2)}},$$

comme nous allons le démontrer.

Précédemment nous avons déjà fait voir que $\sin\operatorname{am}\mathrm{K} = 1$; remarquons maintenant qu'en faisant $x = \mathrm{K}$ dans les relations

$$\Theta(x + i\mathrm{K}') = i\mathrm{H}(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x+i\mathrm{K}')},$$
$$\mathrm{H}(x + i\mathrm{K}') = i\Theta(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x+i\mathrm{K}')},$$

et en divisant membre à membre, il viendra

$$\frac{\mathrm{H}(\mathrm{K}+i\mathrm{K}')}{\Theta(\mathrm{K}+i\mathrm{K}')} = \frac{\Theta(\mathrm{K})}{\mathrm{H}(\mathrm{K})} = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

par conséquent, $\sin\operatorname{am}x = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}$ aura la valeur $\frac{1}{k}$ pour

$x = \mathrm{K} + i\mathrm{K}'$. Ayant donc

$$x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

nous en conclurons que

$$\mathrm{K} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$
$$\mathrm{K} + i\mathrm{K}' = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

et, par suite, en retranchant membre à membre,

$$i\mathrm{K}' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Or, en faisant

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2v^2}},$$

cette dernière intégrale deviendra

$$\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k'^2v^2)}},$$

ce qui donne le résultat annoncé.

Mais ce que nous venons de dire laisse subsister une lacune importante : nous sommes en effet à l'un de ces points de la théorie des fonctions elliptiques qui appellent de nouvelles recherches pour être aussi complètement traités qu'on peut le désirer. En passant de l'équation différentielle

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}$$

à la relation

$$x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

on laisse absolument arbitraire la loi de succession des valeurs de la variable u dans l'intégrale, de sorte que les relations précédentes

$$\mathrm{K} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

$$i\mathrm{K}' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

n'auront un sens entièrement déterminé qu'en définissant le chemin (¹) décrit par la quantité $u = \operatorname{sin\,am} x$, lorsque x varie de zéro à K, puis de K à $\mathrm{K} + i\mathrm{K}'$, et, comme l'argument x peut varier entre ces limites suivant une infinité de lois, il faut de plus connaître comment les chemins correspondants qui en résultent donnent tous au point de vue de l'intégration par rapport à u le même résultat. C'est seulement dans le cas où l'on suppose K, K', et par suite k, des quantités réelles, et qu'on se donne ces lois particulières

$$x = \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\, t,$$

$$x = \mathrm{K} + \frac{2i\mathrm{K}'}{\pi}\, \tau,$$

t et τ croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ d'une manière continue, que l'on peut traiter la question que nous avons posée.

Et d'abord on voit que $u = \operatorname{sin\,am}\left(\frac{2\mathrm{K}t}{\pi}\right)$ est réel par le développement

$$\operatorname{sin\,am}\left(\frac{2\mathrm{K}t}{\pi}\right) = \frac{2\sqrt[4]{q}\,\sin t - 2\sqrt[4]{q^9}\,\sin 3t + 2\sqrt[4]{q^{25}}\,\sin 5t - \ldots}{1 - 2q\cos 2t + 2q^4\cos 4t - 2q^9\cos 6t + \ldots}.$$

D'ailleurs entre les limites zéro et K la dérivée

$$\frac{du}{dx} = \frac{k'}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{H}_1(x)\,\Theta_1(x)}{\Theta^2(x)},$$

dont la valeur initiale est l'unité, sera toujours positive. Elle ne peut effectivement s'annuler qu'en faisant

$$\mathrm{H}_1(x) = 0,$$

$$\Theta_1(x) = 0,$$

(¹) Nous supposons que les notions fondamentales dues à M. Cauchy sur la représentation géométrique des imaginaires, et sur les intégrales prises le long d'une courbe, sont connues du lecteur.

c'est-à-dire (*voyez* p. 143),

$$x = (2m+1)\mathrm{K} + 2m'i\mathrm{K}',$$

$$x = (2m+1)\mathrm{K} + (2m'+1)i\mathrm{K}',$$

et aucune de ces racines n'est comprise dans l'intervalle considéré, la valeur $x = \mathrm{K}$ se trouvant précisément la limite supérieure de cet intervalle. Nous conclurons de là que, t croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, u croît de même de 0 à 1 et que dans l'expression

$$\mathrm{K} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

l'intégrale est prise dans le sens habituel.

Soit en second lieu

$$x = \mathrm{K} + \frac{2i\mathrm{K}'\tau}{\pi};$$

comme on a

$$\mathrm{H}\left(\mathrm{K} + \frac{2i\mathrm{K}'\tau}{\pi}\right) = \mathrm{H}_1\left(\frac{2i\mathrm{K}'\tau}{\pi}\right),$$

$$\Theta\left(\mathrm{K} + \frac{2i\mathrm{K}'\tau}{\pi}\right) = \Theta_1\left(\frac{2i\mathrm{K}'\tau}{\pi}\right),$$

on pourra écrire

$$\operatorname{sin\,am}\left(\mathrm{K} + \frac{2i\mathrm{K}'\tau}{\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{H}_1\left(\frac{2i\mathrm{K}'\tau}{\pi}\right)}{\Theta_1\left(\frac{2i\mathrm{K}'\tau}{\pi}\right)},$$

et en introduisant les fonctions

$$\eta_1(x) = e^{\frac{\pi x^2}{4\mathrm{KK}'}}\,\mathrm{H}_1(x),$$

$$\theta_1(x) = e^{\frac{\pi x^2}{4\mathrm{KK}'}}\,\Theta_1(x),$$

$$\operatorname{sin\,am}\left(\mathrm{K} + \frac{2i\mathrm{K}'\tau}{\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\eta_1\left(\frac{2i\mathrm{K}'\tau}{\pi}\right)}{\theta_1\left(\frac{2i\mathrm{K}'\tau}{\pi}\right)},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{1 - 2q_0\cos 2\tau + 2q_0^4\cos 4\tau - 2q_0^9\cos 6\tau\ldots}{1 + 2q_0\cos 2\tau + 2q_0^4\cos 4\tau + 2q_0^9\cos 6\tau\ldots},$$

ce qui est encore une quantité réelle (¹). On conclura, comme

(¹) On se rappelle que $q_0 = e^{-\pi\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}}$, *voyez* p. 158.

tout à l'heure, que la dérivée par rapport à τ, qui est nulle aux deux limites $\tau = 0$, $\tau = \frac{\pi}{2}$, ne peut s'évanouir dans leur intervalle, de sorte que c'est encore dans le sens ordinaire d'une intégration rectiligne que l'on a l'équation

$$i\mathrm{K}' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

d'où nous avons tiré

$$\mathrm{K}' = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2u^2)}}.$$

Avant de quitter ce sujet et afin d'en montrer la difficulté lorsque K, K′ et k sont imaginaires, je remarquerai que la supposition qui vient le plus naturellement à l'esprit, qu'on peut faire varier x, par exemple, de 0 à K, suivant une loi telle que u soit constamment réel, ne saurait être admise. Autrement dit, il est impossible, en général, que, dans l'expression

$$\mathrm{K} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

l'intégrale soit toujours rectiligne, comme nous l'avons trouvé tout à l'heure.

Effectivement, soient

$$\mathcal{K} = a\mathrm{K} + bi\mathrm{K}',$$
$$i\mathcal{K}' = c\mathrm{K} + di\mathrm{K}',$$

a, b, c, d étant des nombres entiers qui vérifient ces conditions :

$$ad - bc = 1,$$
$$\left.\begin{aligned} a &\equiv 1 \\ b &\equiv 0 \\ c &\equiv 0 \\ d &\equiv 1 \end{aligned}\right\} \bmod 2.$$

En posant

$$\mathfrak{Q} = e^{-\pi\frac{\mathcal{K}'}{\mathcal{K}}},$$

on aura

$$\sin\operatorname{am}\left(\frac{2\mathcal{K}x}{\pi}\right) = \frac{(-1)^{\frac{a+c-1}{2}}}{\sqrt{k}} \frac{2\sqrt[4]{\mathfrak{Q}}\sin x - 2\sqrt[4]{\mathfrak{Q}^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{\mathfrak{Q}^{25}}\sin 5x - \ldots}{1 - 2\mathfrak{Q}\cos 2x + 2\mathfrak{Q}^4\cos 4x - 2\mathfrak{Q}^9\cos 6x + \ldots},$$

ce qui est la même expression analytique ([1]), au signe près en $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$, que

$$\sin\operatorname{am}\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 3x + \ldots}$$

en K et K′. On en conclura que $\mathcal{K}$ sera donné comme K par l'intégrale $\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$. Or, en supposant b différent de 0, la valeur imaginaire

$$\mathcal{K} = a\mathrm{K} + bi\mathrm{K}'$$

ne pourra évidemment résulter que d'une intégrale curviligne. Mais voici un résultat important et qui subsiste quel que soit le mode d'intégration : c'est que les quantités K et K′ vérifient la même équation linéaire du second ordre

$$(k - k^3)\frac{d^2z}{dk^2} + (1 - 3k^2)\frac{dz}{dk} - kz = 0,$$

dont l'intégrale avec deux constantes arbitraires C et C′ est par suite

$$z = \mathrm{CK} + \mathrm{C'K'}.$$

Cette équation conduit au développement de K et K′ sous cette forme : soient

$$\mathrm{k} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \ldots + \left(\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\right) k^{2n} + \ldots$$

([1]) Les relations analogues relativement à $\cos\operatorname{am}(x)$ et $\Delta\operatorname{am}(x)$ sont

$$\cos\operatorname{am}\left(\frac{2\mathcal{K}x}{\pi}\right) = (-1)^{\frac{b+c}{2}}\sqrt{\frac{k}{k'}} \frac{2\sqrt[4]{\mathfrak{Q}}\cos x + 2\sqrt[4]{\mathfrak{Q}^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{\mathfrak{Q}^{25}}\cos 5x + \ldots}{1 - 2\mathfrak{Q}\cos 2x + 2\mathfrak{Q}^4\cos 4x - 2\mathfrak{Q}^9\cos 6x + \ldots},$$

$$\Delta\operatorname{am}\left(\frac{2\mathcal{K}x}{\pi}\right) = (-1)^{\frac{b}{2}}\sqrt{k'} \frac{1 + 2\mathfrak{Q}\cos 2x + 2\mathfrak{Q}^4\cos 4x + 2\mathfrak{Q}^9\cos 6x + \ldots}{1 - 2\mathfrak{Q}\cos 2x + 2\mathfrak{Q}^4\cos 4x - 2\mathfrak{Q}^9\cos 6x + \ldots};$$

on en déduit, en supposant $x = 0$, ce qui concerne $\sqrt{k}$ et $\sqrt{k'}$ lorsqu'on y change K et K′ en $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$.

et $\mathfrak{k}_n$, la somme des n premiers termes de cette suite, on aura $\mathrm{K} = \frac{\pi}{2}\,\mathfrak{k}$,

$$\mathrm{K}' = \mathfrak{k}\log\frac{4}{k} - (\mathfrak{k} - 1) - \frac{2}{3.4}(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_1) - \frac{2}{5.6}(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_2) - \ldots.$$

On en déduit aussi cette propriété remarquable, à laquelle nous parviendrons plus loin par une autre voie :

$$\mathrm{KJ}' - \mathrm{JK}' = \frac{\pi}{2}$$

en faisant

$$\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{{}^2u^2\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \qquad \mathrm{J}' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2u^2\,du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}}.$$

Addition des arguments. — Théorème d'Abel.

C'est Euler qui a donné le premier les formules pour exprimer $\sin\mathrm{am}(a+b)$, $\cos\mathrm{am}(a+b)$, $\Delta\mathrm{am}(a+b)$, au moyen des fonctions semblables relatives aux arguments a et b, et cette importante découverte a été le point de départ et la base des travaux qui ont fondé la théorie des fonctions elliptiques, de même à peu près qu'en Trigonométrie élémentaire on est parvenu aux propriétés analytiques du sinus et du cosinus en partant des relations qui donnent le sinus et le cosinus de la somme de deux arcs, en fonction des sinus et cosinus de ces arcs. L'illustre analyste, par une sorte de divination restée célèbre dans l'histoire de la Science, obtint sous forme algébrique l'intégrale générale de l'équation

$$(1) \qquad \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} + \frac{du'}{\sqrt{(1-u'^2)(1-k^2u'^2)}} = 0.$$

Or ce résultat revient exactement à l'expression du sinus d'amplitude de la somme de deux arguments, comme nous allons le montrer. Effectivement, en désignant par C la constante arbitraire, l'intégrale est

$$(2) \qquad \mathrm{C} = \frac{u\sqrt{(1-u'^2)(1-k^2u'^2)} + u'\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}{1-k^2u^2u'^2}.$$

Mais si l'on fait,

$$u = \sin\mathrm{am}\,a,$$
$$u' = \sin\mathrm{am}\,a',$$

l'équation (1), réduite à la forme

$$da + da' = 0,$$

donne immédiatement

$$a + a' = c.$$

Voilà donc, sous deux formes différentes, l'intégrale d'une même équation différentielle, et l'on devra passer de l'une à l'autre en établissant la relation qui lie les deux constantes arbitraires. Je remarque à cet effet que c est évidemment la valeur de a pour $a' = 0$, et, si l'on fait semblablement $a' = 0$ et, par suite, $u' = 0$ dans l'équation (2), elle donne $c = u = \sin\mathrm{am}\,a$. La relation entre les constantes est donc

$$\mathrm{C} = \sin\mathrm{am}\,c.$$

Ainsi la valeur de C en u et u' donne précisément la détermination de $\sin\mathrm{am}(a+a')$ en fonction algébrique de $\sin\mathrm{am}\,a$ et $\sin\mathrm{am}\,a'$. La Géométrie fournit aussi plusieurs méthodes extrêmement intéressantes pour parvenir à ce même résultat; ne pouvant ici les indiquer, nous nous bornons à donner sous sa forme analytique si remarquable le théorème découvert par Abel pour l'addition d'un nombre quelconque d'arguments.

I. — *Théorème d'Abel.*

Les expressions de $\sin\mathrm{am}\,x$, $\cos\mathrm{am}\,x$, $\Delta\mathrm{am}\,x$ par $\Theta(x)$, $\mathrm{H}(x)$, etc., fournissent les relations suivantes qui établissent la double périodicité de ces fonctions, savoir :

$$\text{I.} \qquad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(x+2\mathrm{K}) = -\sin\mathrm{am}\,x, \\ \sin\mathrm{am}(x+2i\mathrm{K}') = +\sin\mathrm{am}\,x; \end{cases}$$

$$\text{II.} \qquad \begin{cases} \cos\mathrm{am}(x+2\mathrm{K}) = -\cos\mathrm{am}\,x, \\ \cos\mathrm{am}(x+2i\mathrm{K}') = -\cos\mathrm{am}\,x; \end{cases}$$

$$\text{III.} \qquad \begin{cases} \Delta\mathrm{am}(x+2\mathrm{K}) = +\Delta\mathrm{am}\,x, \\ \Delta\mathrm{am}(x+2i\mathrm{K}') = -\Delta\mathrm{am}\,x. \end{cases}$$

Or on remarque que les trois fonctions se reproduisent dans le second membre au signe près, de sorte que les diverses combinaisons deux à deux de ces signes, pour l'une et l'autre période, forment pour chacune d'elles un caractère spécial et qui lie entre elles, d'une certaine manière, toutes les fonctions plus générales, composées de $\sin \operatorname{am} x$, $\cos \operatorname{am} x$, $\Delta \operatorname{am} x$, qui à l'égard des périodes satisferont aux mêmes relations. Ainsi, en désignant par $\mathrm{F}(x)$ et $f(x)$ deux polynomes entiers en $\sin \operatorname{am} x$ respectivement des degrés n et $n-1$, et faisant

$$\varphi_1(x) = \sin \operatorname{am} x \, \mathrm{F}(\sin^2 \operatorname{am} x) + \frac{d \sin \operatorname{am} x}{dx} f(\sin^2 \operatorname{am} x),$$

$$\varphi_2(x) = \cos \operatorname{am} x \, \mathrm{F}(\cos^2 \operatorname{am} x) + \frac{d \cos \operatorname{am} x}{dx} f(\cos^2 \operatorname{am} x),$$

$$\varphi_3(x) = \Delta \operatorname{am} x \, \mathrm{F}(\Delta^2 \operatorname{am} x) + \frac{d \Delta \operatorname{am} x}{dx} f(\Delta^2 \operatorname{am} x),$$

on aura, comme précédemment,

$$\text{I.} \quad \begin{cases} \varphi_1(x + 2\mathrm{K}) = -\varphi_1(x), \\ \varphi_1(x + 2i\mathrm{K}') = +\varphi_1(x); \end{cases}$$

$$\text{II.} \quad \begin{cases} \varphi_2(x + 2\mathrm{K}) = -\varphi_2(x), \\ \varphi_2(x + 2i\mathrm{K}') = -\varphi_2(x); \end{cases}$$

$$\text{III.} \quad \begin{cases} \varphi_3(x + 2\mathrm{K}) = +\varphi_3(x), \\ \varphi_3(x + 2i\mathrm{K}') = -\varphi_3(x). \end{cases}$$

Ce sont ces diverses expressions qui figurent dans le théorème que nous allons établir, ou plutôt encore la suivante qui possède le caractère résultant de la quatrième combinaison possible des deux signes dans le second membre, savoir :

$$\varphi(x + 2\mathrm{K}) = +\varphi(x),$$
$$\varphi(x + 2i\mathrm{K}') = +\varphi(x).$$

En désignant par $\mathrm{F}(x)$ et $\mathrm{F}_1(x)$ des polynomes respectivement de degré n et $n-2$, $\varphi(x)$ sera représenté de cette manière, savoir :

$$\varphi(x) = \mathrm{F}(z^2) + \frac{dz}{dx} z \, \mathrm{F}_1(z^2),$$

z désignant indifféremment $\sin \operatorname{am} x$, $\cos \operatorname{am} x$, ou $\Delta \operatorname{am} x$. Mais, soit pour fixer les idées, $z = \sin \operatorname{am} x$, et afin de mettre en évidence dans $\varphi(x)$ le numérateur et le dénominateur, employons l'expression $z = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}$, qui conduira évidemment au dénominateur $\Theta^{2n}(x)$, de sorte qu'on pourra écrire

$$\varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{\Theta^{2n}(x)}.$$

Cela posé, ayant

$$\Theta^{2n}(x + 2\mathrm{K}) = \Theta^{2n}(x),$$
$$\Theta^{2n}(x + 2i\mathrm{K}') = \Theta^{2n}(x) e^{-2n \frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x + i\mathrm{K}')},$$

la relation

$$\Phi(x) = \varphi(x) \Theta^{2n}(x)$$

donne immédiatement, en ayant égard à ce que $\varphi(x)$ admet les périodes $2\mathrm{K}$, $2i\mathrm{K}'$, ces deux conditions

$$(1) \quad \begin{cases} \Phi(x + 2\mathrm{K}) = \Phi(x), \\ \Phi(x + 2i\mathrm{K}') = \Phi(x) e^{-2n \frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x + i\mathrm{K}')}. \end{cases}$$

Or on peut satisfaire à ces relations, et de la manière la plus générale, en n'employant, bien entendu, que des expressions entières, si l'on fait, en désignant par A un facteur constant,

$$\Phi(x) = \mathrm{AH}(x - \alpha_1) \mathrm{H}(x - \alpha_2) \ldots \mathrm{H}(x - \alpha_{2n}).$$

Effectivement, on vérifiera, à l'aide des équations

$$\mathrm{H}(x - \alpha + 2\mathrm{K}) = -\mathrm{H}(x - \alpha),$$
$$\mathrm{H}(x - \alpha + 2i\mathrm{K}') = -\mathrm{H}(x - \alpha) e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x - \alpha + i\mathrm{K}')},$$

qu'il suffit pour cela de poser la condition

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n} = 0.$$

Les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n-1}$ restent donc arbitraires, ainsi que le facteur constant A, et il est aisé d'établir que la fonction entière, la plus générale qui satisfait aux relations (1), ne contient pareillement que $2n$ constantes arbitraires.

Soit, en effet,

$$\Phi(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m e^{m \frac{i\pi x}{2\mathrm{K}}},$$

ou plutôt

$$\Phi(x) = \sum a_m q^{\frac{m^2}{2n}} e^{m\frac{i\pi x}{K}};$$

la seconde des relations (1) donnera la condition

$$a_{m+2n} = a_m,$$

ce qui ne laisse subsister dans l'expression de $\Phi(x)$ que les $2n$ constantes $a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}$.

Nous pouvons ainsi poser

$$(1) \qquad \varphi(x) = \frac{\mathrm{A}\,\mathrm{H}(x-\alpha_1)\,\mathrm{H}(x-\alpha_2)\ldots\mathrm{H}(x-\alpha_{2n})}{\Theta^{2n}(x)},$$

et cette équation remarquable aura également lieu en prenant pour $\varphi(x)$ la fonction déduite de

$$\mathrm{F}(z^2) + \frac{dz}{dx}\,z\,\mathrm{F}_1(z^2),$$

en faisant $z = \cos\mathrm{am}\,x$ et $z = \Delta\,\mathrm{am}\,x$.

Maintenant, une analyse toute semblable donnera, à l'égard des trois fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, les théorèmes suivants, où A_1, A_2, A_3 désignent des constantes, savoir :

$$\varphi_1(x) = \frac{\mathrm{A}_1\,\mathrm{H}(x-\alpha_1)\,\mathrm{H}(x-\alpha_2)\ldots\mathrm{H}(x-\alpha_{2n+1})}{\Theta^{2n+1}(x)},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\mathrm{A}_2\,\mathrm{H}_1(x-\alpha_1)\,\mathrm{H}_1(x-\alpha_2)\ldots\mathrm{H}_1(x-\alpha_{2n+1})}{\Theta^{2n+1}(x)},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{\mathrm{A}_3\,\Theta(x-\alpha_1)\,\Theta(x-\alpha_2)\ldots\Theta(x-\alpha_{2n+1})}{\Theta^{2n+1}(x)},$$

et l'on aura encore entre les quantités α la relation

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n+1} = 0.$$

C'est dans la conséquence que nous allons en déduire que consiste, à proprement parler, le théorème d'Abel.

Nous partirons à cet effet des équations relatives à $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ où figure la fonction $\mathrm{H}(x)$ qui s'annule avec x et met ainsi en évidence les racines des équations $\varphi(x) = 0$, $\varphi_1(x) = 0$. En particulier, considérons la fonction $\varphi(x)$, où trois cas différents

se présentent et correspondent à

$$z = \sin\mathrm{am}\,x,$$
$$z = \cos\mathrm{am}\,x,$$
$$z = \Delta\,\mathrm{am}\,x.$$

Les polynomes F et F_1 introduisant $2n$ constantes, on pourra, ayant pris égal à l'unité le coefficient de z^{2n}, déterminer les $2n-1$ autres coefficients par les équations du premier degré

$$\varphi(\alpha_1) = 0, \quad \varphi(\alpha_2) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi(\alpha_{2n-1}) = 0.$$

Cela fait, la relation (1) nous montre qu'on aura encore $\varphi(x) = 0$ pour $x = \alpha_{2n}$, c'est-à-dire d'après la condition posée entre les quantités α

$$x = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1}).$$

Or le produit

$$\left[\mathrm{F}(z^2) + \frac{dz}{dx}\,z\,\mathrm{F}_1(z^2)\right]\left[\mathrm{F}(z^2) - \frac{dz}{dx}\,z\,\mathrm{F}_1(z^2)\right]$$

donne dans les trois cas que nous avons à considérer un polynome entier de degré $4n$ et ne renfermant que des puissances paires de z, car on a successivement pour

$$z = \sin\mathrm{am}\,x \qquad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = (1-z^2)(1-k^2z^2),$$

$$z = \cos\mathrm{am}\,x \qquad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = (1-z^2)(k'^2+k^2z^2),$$

$$z = \Delta\,\mathrm{am}\,x \qquad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = -(1-z^2)(k'^2-z^2).$$

Dans le premier, ce polynome, décomposé en facteurs, sera donc

$$\begin{gathered}(z^2-\sin^2\mathrm{am}\,\alpha_1)(z^2-\sin^2\mathrm{am}\,\alpha_2)\ldots(z^2-\sin^2\mathrm{am}\,\alpha_{2n-1})\\ \times[z^2-\sin^2\mathrm{am}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n-1})],\end{gathered}$$

dans le second

$$\begin{gathered}(z^2-\cos^2\mathrm{am}\,\alpha_1)(z^2-\cos^2\mathrm{am}\,\alpha_2)\ldots(z^2-\cos^2\mathrm{am}\,\alpha_{2n-1})\\ \times[z^2-\cos^2\mathrm{am}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n-1})],\end{gathered}$$

et enfin dans le troisième

$$\begin{gathered}(z^2-\Delta^2\,\mathrm{am}\,\alpha_1)(z^2-\Delta^2\,\mathrm{am}\,\alpha_2)\ldots(z^2-\Delta^2\,\mathrm{am}\,\alpha_{2n-1})\\ \times[z^2-\Delta^2\,\mathrm{am}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n-1})].\end{gathered}$$

Les identités que nous venons ainsi d'établir donnent un résultat important lorsqu'on y fait $z = 0$. Si l'on désigne en effet, suivant les trois cas, par L, M, N le terme qui ne contient pas z dans le polynome $F(z^2)$, on obtiendra les relations

$$\sin\mathrm{am}\,(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n-1}) = \frac{\pm L}{\sin\mathrm{am}\,\alpha_1\,\sin\mathrm{am}\,\alpha_2\ldots\sin\mathrm{am}\,\alpha_{2n-1}},$$

$$\cos\mathrm{am}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n-1}) = \frac{\pm M}{\cos\mathrm{am}\,\alpha_1\,\cos\mathrm{am}\,\alpha_2\ldots\cos\mathrm{am}\,\alpha_{2n-1}},$$

$$\Delta\mathrm{am}\quad(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n-1}) = \frac{\pm N}{\Delta\mathrm{am}\,\alpha_1\;\Delta\mathrm{am}\,\alpha_2\ldots\Delta\,\mathrm{am}\,\alpha_{2n-1}}.$$

Des conclusions toutes pareilles seront données par la fonction

$$\varphi_1(x) = \sin\mathrm{am}\,x\,F(\sin^2\mathrm{am}\,x) + \frac{d\sin\mathrm{am}\,x}{dx}f(\sin^2\mathrm{am}\,x),$$

où F et f introduisent $2n+1$ constantes arbitraires. En prenant encore égal à l'unité le coefficient de la puissance la plus élevée dans $F(z^2)$ et déterminant les autres coefficients par les conditions

$$\varphi_1(\alpha_1) = 0,\qquad \varphi_1(\alpha_2) = 0,\qquad \ldots,\qquad \varphi_1(\alpha_{2n}) = 0,$$

on aura

$$\sin^2\mathrm{am}\,x\,F^2(\sin^2\mathrm{am}\,x) - \left(\frac{d\sin\mathrm{am}\,x}{dx}\right)^2 f^2(\sin^2\mathrm{am}\,x)$$
$$= (\sin^2\mathrm{am}\,x - \sin^2\mathrm{am}\,\alpha_1)(\sin^2\mathrm{am}\,x - \sin^2\mathrm{am}\,\alpha_2)\ldots(\sin^2\mathrm{am}\,x - \sin^2\mathrm{am}\,\alpha_{2n})$$
$$\times[\sin^2\mathrm{am}\,x - \sin^2\mathrm{am}\,(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n})].$$

Ce second théorème donnerait la valeur de

$$\sin^2\mathrm{am}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n}),$$

où figure un nombre pair d'arguments, mais le premier a l'avantage de conduire en même temps à l'expression de

$$\sin\mathrm{am}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n-1}),$$
$$\cos\mathrm{am}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n-1}),$$
$$\Delta\,\mathrm{am}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n-1}),$$

où il importe peu que le nombre des arguments soit impair, car rien n'empêche d'en supposer un égal à zéro. Une dernière conséquence à cet égard nous reste encore à établir. Observons que les

équations

$$\varphi(\alpha_1) = 0,\qquad \varphi(\alpha_2) = 0,\qquad \ldots,\qquad \varphi(\alpha_{2n-1}) = 0,$$

ou, pour abréger,

$$\varphi(\alpha_i) = 0,$$

déterminent pour les coefficients de F et F_1 des fonctions rationnelles, dans le premier cas, pour $z = \sin\mathrm{am}\,x$, de

$$\sin\mathrm{am}\,\alpha_i\qquad\text{et}\qquad \frac{d\sin\mathrm{am}\,\alpha_i}{d\alpha_i} = \cos\mathrm{am}\,\alpha_i\,\Delta\,\mathrm{am}\,\alpha_i;$$

dans le second, pour $z = \cos\mathrm{am}\,x$, de

$$\cos\mathrm{am}\,\alpha_i\qquad\text{et}\qquad \frac{d\cos\mathrm{am}\,\alpha_i}{d\alpha_i} = -\sin\mathrm{am}\,\alpha_i\,\Delta\,\mathrm{am}\,\alpha_i;$$

dans le troisième enfin, pour $z = \Delta\,\mathrm{am}\,\alpha_i$, de

$$\Delta\,\mathrm{am}\,\alpha_i\qquad\text{et}\qquad \frac{d\Delta\,\mathrm{am}\,\alpha_i}{d\alpha_i} = -k^2\sin\mathrm{am}\,\alpha_i\cos\mathrm{am}\,\alpha_i.$$

Telle sera donc la forme des quantités que nous avons tout à l'heure désignées par L, M, N, et, par suite, des valeurs elles-mêmes de

$$\sin\mathrm{am}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n-1}),$$
$$\cos\mathrm{am}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n-1}),$$
$$\Delta\,\mathrm{am}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n-1}).$$

Quant au double signe, il suffira, pour le déterminer, d'un cas particulier; nous allons en donner un exemple.

II. — *Formules pour l'addition de deux arguments.*

Nous appliquerons les théorèmes précédents au cas de trois arguments α_1, α_2 et α_3, en supposant le dernier égal à zéro, et nous prendrons

$$\varphi(x) = (z^4 + az^2 + b) + cz\frac{dz}{dx}.$$

On remarquera alors que, dans le cas de $z = \sin\mathrm{am}\,x$, l'équation fondamentale a cette forme

$$(z^4 + az^2 + b)^2 - c^2 z^2 \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = z^2(z^2 - \sin^2 \operatorname{am} \alpha_1)(z^2 - \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2) \times [z^2 - \sin^2 \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2)],$$

de sorte qu'on doit déjà poser $b = 0$. Si l'on supprime dans les deux membres le facteur z^2, et qu'on fasse ensuite $z = 0$, on obtiendra

$$\sin \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\pm c}{\sin \operatorname{am} \alpha_1 \sin \operatorname{am} \alpha_2}.$$

Cela posé, les équations $\varphi(\alpha_1) = 0$, $\varphi(\alpha_2) = 0$ deviennent

$$\sin^3 \operatorname{am} \alpha_1 + a \sin \operatorname{am} \alpha_1 + c \cos \operatorname{am} \alpha_1 \Delta \operatorname{am} \alpha_1 = 0,$$
$$\sin^3 \operatorname{am} \alpha_2 + a \sin \operatorname{am} \alpha_2 + c \cos \operatorname{am} \alpha_2 \Delta \operatorname{am} \alpha_2 = 0,$$

d'où

$$\frac{c}{\sin \operatorname{am} \alpha_1 \sin \operatorname{am} \alpha_2} = \frac{\sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 - \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2}{\sin \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2 \Delta \operatorname{am} \alpha_2 - \sin \operatorname{am} \alpha_2 \cos \operatorname{am} \alpha_1 \Delta \operatorname{am} \alpha_1},$$

valeur qui se réduit à $\sin am \alpha_2$ pour $\alpha_2 = 0$, de sorte qu'on doit prendre dans la formule le signe supérieur. Il vient ainsi, en multipliant les deux termes de la fraction par

$$\sin \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2 \Delta \operatorname{am} \alpha_2 + \sin \operatorname{am} \alpha_2 \cos \operatorname{am} \alpha_1 \Delta \operatorname{am} \alpha_1,$$

et supprimant haut et bas le facteur $\sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 - \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2$,

$$\sin \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\sin \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2 \Delta \operatorname{am} \alpha_2 + \sin \operatorname{am} \alpha_2 \cos \operatorname{am} \alpha_1 \Delta \operatorname{am} \alpha_1}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2}.$$

Dans les autres cas où $z = \cos \operatorname{am} x$ et $z = \Delta \operatorname{am} x$, l'équation

$$z^4 + az^2 + b + cz \frac{dz}{dx} = 0$$

admet la racine $z = 1$ qui répond au troisième argument supposé nul. On doit donc faire

$$z^4 + az^2 + b = (z^2 - 1)(z^2 + m),$$

ce qui conduit, pour $z = \cos \operatorname{am} x$, aux équations

$$\cos^2 \operatorname{am} \alpha_1 + m + c \frac{\cos \operatorname{am} \alpha_1 \Delta \operatorname{am} \alpha_1}{\sin \operatorname{am} \alpha_1} = 0,$$
$$\cos^2 \operatorname{am} \alpha_2 + m + c \frac{\cos \operatorname{am} \alpha_2 \Delta \operatorname{am} \alpha_2}{\sin \operatorname{am} \alpha_2} = 0,$$

et à la valeur

$$\cos \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\pm m}{\cos \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2};$$

de même pour $z = \Delta \operatorname{am} x$, on a les relations toutes semblables

$$\Delta^2 \operatorname{am} \alpha_1 + m + c \frac{\cos \operatorname{am} \alpha_1 \Delta \operatorname{am} \alpha_1}{\sin \operatorname{am} \alpha_1} = 0,$$
$$\Delta^2 \operatorname{am} \alpha_2 + m + c \frac{\cos \operatorname{am} \alpha_2 \Delta \operatorname{am} \alpha_2}{\sin \operatorname{am} \alpha_2} = 0,$$
$$\Delta \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\pm m}{\Delta \operatorname{am} \alpha_1 \Delta \operatorname{am} \alpha_2}.$$

Un calcul, entièrement analogue à celui qui concerne le sinus, donne les formules suivantes :

$$\cos \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\cos \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2 - \sin \operatorname{am} \alpha_1 \sin \operatorname{am} \alpha_2 \Delta \operatorname{am} \alpha_1 \Delta \operatorname{am} \alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2},$$
$$\Delta \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\Delta \operatorname{am} \alpha_1 \Delta \operatorname{am} \alpha_2 - k^2 \sin \operatorname{am} \alpha_1 \sin \operatorname{am} \alpha_2 \cos \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2}.$$

Les trois formules que nous venons de déduire du théorème d'Abel sont nommées à juste titre *fondamentales*, car elles suffisent pour déterminer complètement les fonctions

$$\sin \operatorname{am} x, \quad \cos \operatorname{am} x, \quad \Delta \operatorname{am} x.$$

On peut voir dans les premiers Mémoires d'Abel, et postérieurement dans les Travaux de Gudermann [1], l'un des meilleurs auteurs qui aient écrit sur la théorie des fonctions elliptiques, comment elles donnent la double périodicité, puis les expressions de

$$\sin \operatorname{am}(nx), \quad \cos \operatorname{am}(nx), \quad \Delta \operatorname{am}(nx),$$

où n est un nombre entier quelconque, d'où l'on déduit, en remplaçant x par $\frac{x}{n}$, et passant à la limite pour n infini, les expressions analytiques sous forme de quotients des séries Θ et H. Nous y joindrons les suivantes, qui s'en déduisent immédiatement, savoir :

$$\sin \operatorname{am}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\sin \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2 \Delta \operatorname{am} \alpha_2 - \sin \operatorname{am} \alpha_2 \cos \operatorname{am} \alpha_1 \Delta \operatorname{am} \alpha_1}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2},$$
$$\cos \operatorname{am}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\cos \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2 + \sin \operatorname{am} \alpha_1 \sin \operatorname{am} \alpha_2 \Delta \operatorname{am} \alpha_1 \Delta \operatorname{am} \alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2},$$
$$\Delta \operatorname{am}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\Delta \operatorname{am} \alpha_1 \Delta \operatorname{am} \alpha_2 + k^2 \sin \operatorname{am} \alpha_1 \sin \operatorname{am} \alpha_2 \cos \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 \sin \operatorname{am} \alpha_2}.$$

[1] Voir *Journal de Crelle*, t. 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 25 et 41.

Par voie d'addition et de soustraction on en conclut

$$\left\{\begin{aligned} \sin\operatorname{am}(\alpha_1+\alpha_2)+\sin\operatorname{am}(\alpha_1-\alpha_2) &= \frac{2\sin\operatorname{am}\alpha_1\cos\operatorname{am}\alpha_2\,\Delta\operatorname{am}\alpha_2}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\alpha_1\sin^2\operatorname{am}\alpha_2}, \\ \cos\operatorname{am}(\alpha_1+\alpha_2)+\cos\operatorname{am}(\alpha_1-\alpha_2) &= \frac{2\cos\operatorname{am}\alpha_1\cos\operatorname{am}\alpha_2}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\alpha_1\sin^2\operatorname{am}\alpha_2}, \\ \Delta\operatorname{am}(\alpha_1+\alpha_2)+\Delta\operatorname{am}(\alpha_1-\alpha_2) &= \frac{2\Delta\operatorname{am}\alpha_1\,\Delta\operatorname{am}\alpha_2}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\alpha_1\sin^2\operatorname{am}\alpha_2}. \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \sin\operatorname{am}(\alpha_1+\alpha_2)-\sin\operatorname{am}(\alpha_1-\alpha_2) &= \frac{2\sin\operatorname{am}\alpha_2\cos\operatorname{am}\alpha_1\,\Delta\operatorname{am}\alpha_1}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\alpha_1\sin^2\operatorname{am}\alpha_2}, \\ \cos\operatorname{am}(\alpha_1-\alpha_2)-\cos\operatorname{am}(\alpha_1+\alpha_2) &= \frac{2\sin\operatorname{am}\alpha_1\sin\operatorname{am}\alpha_2\,\Delta\operatorname{am}\alpha_1\,\Delta\operatorname{am}\alpha_2}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\alpha_1\sin^2\operatorname{am}\alpha_2}, \\ \Delta\operatorname{am}(\alpha_2-\alpha_2)-\Delta\operatorname{am}(\alpha_1+\alpha_2) &= \frac{2k^2\sin\operatorname{am}\alpha_1\sin\operatorname{am}\alpha_2\cos\operatorname{am}\alpha_1\cos\operatorname{am}\alpha_2}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\alpha_1\sin^2\operatorname{am}\alpha_2}. \end{aligned}\right.$$

Les trois dernières équations, en faisant

$$\alpha_1+\alpha_2=x, \qquad \alpha_1-\alpha_2=a,$$

conduisent à déterminer toutes les valeurs de x, qui donnent

$$\begin{aligned} \sin\operatorname{am}x &= \sin\operatorname{am}a, \\ \cos\operatorname{am}x &= \cos\operatorname{am}a, \\ \Delta\operatorname{am}x &= \Delta\operatorname{am}a. \end{aligned}$$

Ainsi, dans le premier cas, on reconnaît que toutes les solutions sont données par celles des équations

$$\begin{aligned} \sin\operatorname{am}\frac{x-a}{2} &= 0 \quad \text{ou} \quad \infty, \\ \cos\operatorname{am}\frac{x+a}{2} &= 0, \\ \Delta\operatorname{am}\frac{x+a}{2} &= 0. \end{aligned}$$

On en conclut immédiatement, d'après les formules données page 143 pour les racines des équations

$$\Theta(x)=0, \qquad \mathrm{H}(x)=0, \qquad \Theta_1(x)=0, \qquad \mathrm{H}_1(x)=0,$$

qu'on a

$$\left\{\begin{aligned} x &= a+4m\mathrm{K}+2m'i\mathrm{K}', \\ x &= -a+(4m+2)\mathrm{K}+2m'i\mathrm{K}'; \end{aligned}\right.$$

de même, pour

$$\cos\operatorname{am}x=\cos\operatorname{am}a,$$

on obtiendrait

$$\left\{\begin{aligned} x &= \pm a+4m\mathrm{K}+4m'i\mathrm{K}', \\ x &= \pm a+(4m+2)\mathrm{K}+(4m'+2)i\mathrm{K}', \end{aligned}\right.$$

ou plus simplement

$$x=\pm a+2m(\mathrm{K}+i\mathrm{K}')+4m'i\mathrm{K}',$$

et pour

$$\Delta\operatorname{am}x=\Delta\operatorname{am}a,$$

$$x=\pm a+2m\mathrm{K}+4m'i\mathrm{K}'.$$

Dans ces formules m et m' désignent des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs.

Les formules pour l'addition de deux arguments donneraient lieu à beaucoup d'autres remarques; je me bornerai ici aux résultats relatifs à la duplication et aux valeurs que prennent les trois fonctions lorsqu'on suppose l'argument égal à une demi-période. Les premières découlent des formules fondamentales, qui donnent immédiatement

$$\begin{aligned} \sin\operatorname{am}2\alpha &= \frac{2\sin\operatorname{am}\alpha\cos\operatorname{am}\alpha\,\Delta\operatorname{am}\alpha}{1-k^2\sin^4\operatorname{am}\alpha}, \\ \cos\operatorname{am}2\alpha &= \frac{1-2\sin^2\operatorname{am}\alpha+k^2\sin^4\operatorname{am}\alpha}{1-k^2\sin^4\operatorname{am}\alpha}, \\ \Delta\operatorname{am}2\alpha &= \frac{1-2k^2\sin^2\operatorname{am}\alpha+k^2\sin^4\operatorname{am}\alpha}{1-k^2\sin^4\operatorname{am}\alpha}, \end{aligned}$$

et l'on en déduit les valeurs suivantes, qu'a données Gudermann :

$$\left\{\begin{aligned} \sin\operatorname{am}\frac{\mathrm{K}}{2} &= \frac{1}{\sqrt{1+k'}}, \\ \cos\operatorname{am}\frac{\mathrm{K}}{2} &= \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}, \\ \Delta\operatorname{am}\frac{\mathrm{K}}{2} &= \sqrt{k'}; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \sin\operatorname{am}\frac{i\mathrm{K}'}{2} &= \frac{i}{\sqrt{k}}, \\ \cos\operatorname{am}\frac{i\mathrm{K}'}{2} &= \frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}, \\ \Delta\operatorname{am}\frac{i\mathrm{K}'}{2} &= \sqrt{1+k}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \sin\operatorname{am}\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\pm i\mathrm{K}'\right) &= \frac{1}{\sqrt{1-k'}}, \\ \cos\operatorname{am}\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\pm i\mathrm{K}'\right) &= \mp i\sqrt{\frac{k'}{1-k'}}, \\ \Delta\operatorname{am}\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\pm i\mathrm{K}'\right) &= \mp i\sqrt{k'}; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \sin\operatorname{am}\left(\mathrm{K}\pm\frac{i\mathrm{K}'}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{k}}, \\ \cos\operatorname{am}\left(\mathrm{K}\mp\frac{i\mathrm{K}'}{2}\right) &= \mp i\sqrt{\frac{1-k}{k}}, \\ \Delta\operatorname{am}\left(\mathrm{K}\pm\frac{i\mathrm{K}'}{2}\right) &= \sqrt{1-k}; \end{aligned}\right.$$

et

$$\left\{\begin{aligned} \sin\operatorname{am}\left(\frac{K \pm iK'}{2}\right) &= \sqrt{1 \pm \frac{ik'}{k}}, \\ \cos\operatorname{am}\left(\frac{K \pm iK'}{2}\right) &= (1 \mp i)\sqrt{\frac{k'}{2k}}, \\ \Delta\operatorname{am}\left(\frac{K \pm iK'}{2}\right) &= k'\sqrt{1 \mp \frac{k}{ik'}}. \end{aligned}\right.$$

III. — *De la multiplication des arguments.*

Ce point important de la théorie des fonctions elliptiques est si intimement lié à la théorie de la transformation, dont nous ne nous occuperons pas ici, que nous devons nous borner à l'indication d'un petit nombre de résultats.

En premier lieu, soit n un nombre pair, et posons

$$m = \frac{n^2}{2},$$

on aura

$$\sin\operatorname{am}(nx) = n\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x\,\frac{\sin\operatorname{am}x + A'\sin^3\operatorname{am}x + \ldots + H'\sin^{2m-3}\operatorname{am}x}{1 + A\sin^2\operatorname{am}x + \ldots + H\sin^{2m}\operatorname{am}x},$$

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\cos\operatorname{am}(nx) = \frac{1 + A'_1\cos^2\operatorname{am}x + \ldots + H'_1\cos^{2m}\operatorname{am}x}{1 + A_1\cos^2\operatorname{am}x + \ldots + H_1\cos^{2m}\operatorname{am}x},$$

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\Delta\operatorname{am}(nx) = \frac{1 + A'_2\Delta^2\operatorname{am}x + \ldots + H'_2\Delta^{2m}\operatorname{am}x}{1 + A_2\Delta^2\operatorname{am}x + \ldots + H_2\Delta^{2m}\operatorname{am}x}.$$

Soit, en second lieu, n impair et faisons

$$m = \frac{n^2 - 1}{2},$$

on aura

$$\sin\operatorname{am}(nx) = n\,\frac{\sin\operatorname{am}x + a'\sin^3\operatorname{am}x + \ldots + h'\sin^{2m+1}\operatorname{am}x}{1 + a\sin^2\operatorname{am}x + \ldots + h\sin^{2m}\operatorname{am}x},$$

$$\cos\operatorname{am}(nx) = n\,\frac{\cos\operatorname{am}x + a'_1\cos^3\operatorname{am}x + \ldots + h'\cos^{2m+1}\operatorname{am}x}{1 + a_1\cos^2\operatorname{am}x + \ldots + h_1\cos^{2m}\operatorname{am}x},$$

$$\Delta\operatorname{am}(nx) = n\,\frac{\Delta\operatorname{am}x + a'_2\Delta^3\operatorname{am}x + \ldots + h'_2\Delta^{2m+1}\operatorname{am}x}{1 + a_2\Delta^2\operatorname{am}x + \ldots + h_2\Delta^{2m}\operatorname{am}x}.$$

Tous les coefficients dans ces diverses formules sont des fonc-

tions rationnelles et entières de k^2, et Jacobi a donné pour leur détermination, dans le cas où n est impair, le théorème suivant :

Soient

$$\operatorname{sim}\operatorname{am}x = \frac{u}{\sqrt{k}}, \qquad \sin\operatorname{am}(nx) = \frac{U}{\sqrt{k}} \qquad \text{et} \qquad U = \frac{P}{Q},$$

P *et* Q *étant des polynomes entiers en* u; *si l'on fait*

$$\alpha = k + \frac{1}{k},$$

ces deux polynomes satisferont à l'équation linéaire aux différences partielles que voici :

$$u^2(n^2 - 1)u^2 z + (n^2 - 1)(\alpha u - 2u^3)\frac{dz}{du} + (1 - \alpha u^2 + u^4)\frac{d^2 z}{du^2} = 2n^2(\alpha^2 - 4)\frac{dz}{d\alpha}.$$

Sur les intégrales de seconde et de troisième espèce.

On y est amené par la considération de l'intégrale

$$\int F(\sin\operatorname{am}x,\ \cos\operatorname{am}x,\ \Delta\operatorname{am}x)\,dx,$$

où F désigne une fonction rationnelle quelconque, et qui va maintenant nous occuper.

Soit, comme précédemment,

$$u = \sin\operatorname{am}x,$$
$$v = \cos\operatorname{am}x,$$
$$w = \Delta\operatorname{am}x.$$

On reconnaîtra d'abord qu'elle peut être réduite à la forme

$$\int (A + Bv + Cw + Dvw)\,dx,$$

où A, B, C, D sont des fonctions rationnelles de la quantité u. Il en résulte que la première partie

$$\int A\,dx$$

demande seule un examen attentif, car, à l'égard des deux suivantes, l'intégration s'effectuera par les règles relatives aux radicaux carrés du second degré, en prenant u pour variable indépendante, et la dernière se trouvera même ainsi ramenée aux fonctions rationnelles. C'est donc seulement dans l'expression $\int \mathrm{A}\,dx$ que l'on peut s'attendre à voir résulter de l'intégration des fonctions nouvelles, et que les considérations suivantes vont mettre effectivement en évidence.

Soit

$$\mathrm{A} = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)},$$

φ et ψ désignant des polynomes entiers; en multipliant par $\psi(-u)$ les deux termes de la fraction et faisant

$$\psi(u)\psi(-u) = \Psi(u^2),$$
$$\varphi(u)\psi(-u) = \Phi(u^2) + u\,\Phi_1(u^2),$$

on décomposera l'intégrale proposée dans les deux suivantes :

$$\int \frac{\Psi(u^2)}{\Phi(u^2)}\,dx, \qquad \int \frac{u\,\Phi_1(u^2)}{\Psi(u^2)}\,dx,$$

dont la seconde se ramène encore aux radicaux du second degré, puisqu'en faisant $u^2 = t$ elle devient

$$\frac{1}{2}\int \frac{\Phi_1(t)}{\Psi(t)} \cdot \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1-k^2 t)}}.$$

Il y a donc seulement lieu de s'occuper de la première, qu'on fera dépendre, en décomposant en fractions simples $\frac{\varphi(u^2)}{\psi(u^2)}$, de termes tels que

$$\int u^{2n}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{(1+\alpha u^2)^p},$$

ou bien

$$\int \frac{u^{2n}\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \qquad \int \frac{du}{(1-\alpha u^2)^p\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

et ces termes sont eux-mêmes réductibles, comme on va voir, aux cas les plus simples de $n = 1$, $p = 1$.

Partons en premier lieu de la relation

$$\frac{du^m}{dx} = mu^{m-1}\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)},$$

qui différentiée donnera

$$\frac{d^2u^m}{dx^2} = m(m-1)\,u^{m-2} - m^2(1+k^2)\,u^m + m(m+1)\,k^2u^{m+2}.$$

En intégrant par rapport à x les deux membres de cette équation, on trouvera cette formule de réduction

$$\frac{du^m}{dx} = m(m-1)\int u^{m-2}\,dx - m^2(1+k^2)\int u^m\,dx + m(m+1)k^2\int u^{m+2}\,dx,$$

qui montre comment de proche en proche on ramènera l'intégrale proposée où $m = 2n$, aux seuls cas de $n = 0$, $n = 1$.

Le premier donne un terme proportionnel à la variable, et c'est le second qui conduit à un nouvel élément analytique, dans la théorie des fonctions elliptiques.

En introduisant comme facteur constant le carré du module, nous poserons

$$\mathrm{Z}(x) = \int_0^x k^2 \sin^2 \mathrm{am}\,x\,dx,$$

ce sera ce que l'on nomme et ce que nous appellerons dorénavant la *fonction de seconde espèce*.

Partons en second lieu de la relation

$$\begin{aligned}\frac{u\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}{(1-\alpha u^2)^{p-1}} = {} & (2p-2)\left(1+\frac{1+k^2}{\alpha}+\frac{k^2}{\alpha^2}\right)\int\frac{dx}{(1-\alpha u^2)^p} \\ & -(2p-3)\left(1+\frac{2+2k^2}{\alpha}+\frac{3k^2}{\alpha^2}\right)\int\frac{dx}{(1-\alpha u^2)^{p-1}} \\ & +(2p-4)\left(\frac{1+k^2}{\alpha}+\frac{3k^2}{\alpha^2}\right)\int\frac{dx}{(1-\alpha u^2)^{p-2}} \\ & -(2p-5)\,\frac{k^2}{\alpha^2}\int\frac{dx}{(1-\alpha u^2)^{p-3}},\end{aligned}$$

qu'on trouvera identique par la différentiation. Il est clair que, de proche en proche, elle fait dépendre le cas le plus général des trois suivants où l'on suppose $p = -1$, $p = 0$, $p = 1$. Le premier nous ramène à la fonction de seconde espèce, le second donne un terme proportionnel à la variable : c'est donc seulement le dernier qui met encore en évidence une fonction nouvelle, que nous étudierons sous la forme

$$\int \frac{\mathrm{A}\, u^2\, dx}{1 - \alpha u^2}$$

au lieu de

$$\int \frac{dx}{1 - \alpha u^2}.$$

En faisant

$$\alpha = k^2 \sin^2 \operatorname{am} a,$$

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2} \frac{d\alpha}{da} k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a\, \Delta \operatorname{am} a,$$

nous poserons

$$\Pi(x, a) = \int_0^u \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a\, \Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x . dx}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x},$$

et cette expression sera désormais pour nous la *fonction de troisième espèce*.

I. — *Expression par $\Theta(x)$ des intégrales de seconde et de troisième espèce.*

Nous avons précédemment établi la relation suivante :

$$\sin \operatorname{am} x (\sin^2 \operatorname{am} x + \mathrm{A}) + \mathrm{B} \frac{d \sin \operatorname{am} x}{dx} = \mathrm{C} \frac{\mathrm{H}(x - \alpha_1)\mathrm{H}(x - \alpha_2)\mathrm{H}(x - \alpha_3)}{\Theta^3(x)},$$

où les coefficients A et B s'expriment par α_1 et α_2 en posant

$$\sin \operatorname{am} \alpha_1 (\sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 + \mathrm{A}) + \mathrm{B} \frac{d \sin \operatorname{am} \alpha_1}{d\alpha_1} = 0,$$

$$\sin \operatorname{am} \alpha_2 (\sin^2 \operatorname{am} \alpha_2 + \mathrm{A}) + \mathrm{B} \frac{d \sin \operatorname{am} \alpha_2}{d\alpha_2} = 0.$$

Soit

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = a,$$

et, par suite,

$$\alpha_3 = 0;$$

d'après la condition

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

on trouvera

$$\mathrm{B} = 0, \qquad \mathrm{A} = -\sin^2 \operatorname{am} a,$$

et, par conséquent,

$$\sin \operatorname{am} x (\sin^2 \operatorname{am} x - \sin^2 \operatorname{am} a) = \mathrm{C} \frac{\mathrm{H}(x + a)\mathrm{H}(x - a)\mathrm{H}(x)}{\Theta^3(x)}.$$

Déterminant C en faisant $x = 0$, il viendra enfin

$$\sin^2 \operatorname{am} x - \sin^2 \operatorname{am} a = \frac{\Theta^2(0)\mathrm{H}(x + a)\mathrm{H}(x - a)}{k \Theta^2(x)\Theta^2(a)}.$$

Cette relation importante prend, si l'on change a en $a + i\mathrm{K}'$, cette nouvelle forme

$$1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x = \frac{\Theta^2(0)\Theta(x + a)\Theta(x - a)}{\Theta^2(x)\Theta^2(a)},$$

à laquelle on parviendrait encore d'une autre manière en employant l'identité

$$\frac{1}{k} \frac{\mathrm{H}(x + a)\mathrm{H}(x - a)}{\Theta(x + a)\Theta(x - a)} = \sin \operatorname{am}(x + a) \sin \operatorname{am}(x - a)$$
$$= \frac{\sin^2 \operatorname{am} x - \sin^2 \operatorname{am} a}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x}.$$

Elle donne, en prenant les logarithmes de deux membres,

$$\log(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x) = \log \Theta^2(0) + \log \Theta(x + a)$$
$$+ \log \Theta(x - a) - 2 \log \Theta(x) - 2 \log \Theta(a),$$

et de là on tire immédiatement, en différentiant par rapport à a et en intégrant ensuite par rapport à x,

$$\int_0^x \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a\, \Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x\, dx}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x}$$
$$= \Pi(x, a) = x \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(x - a)}{\Theta(x + a)};$$

c'est l'expression analytique découverte par Jacobi de la fonction de troisième espèce. En divisant par a et supposant ensuite $a = 0$, on en déduit

$$\int_0^x k^2 \sin^2 \operatorname{am} x\, dx = \mathrm{Z}(x) = \zeta x - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

où l'on a posé

$$\zeta = 8 \frac{q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + 25q^{25} - \ldots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots} \times \frac{1}{\left(\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\right)^2};$$

c'est l'expression donnée également par Jacobi de la fonction de seconde espèce et qui va nous conduire aisément à ses propriétés fondamentales.

II. — *De la fonction* Z(x).

La première de ces propriétés est de n'avoir qu'une seule et unique détermination pour toute valeur réelle ou imaginaire de la variable. C'est aussi ce qui résulte directement de la considération de l'intégrale

$$\int_0^x k^2 \sin^2 \operatorname{am} z\, dz.$$

En effet, pour l'une quelconque des racines de l'équation

$$\frac{1}{\sin \operatorname{am} z} = 0,$$

savoir

$$z = 2m\mathrm{K} + (2m'+1)i\mathrm{K}',$$

le résidu correspondant de $k^2 \sin^2 \operatorname{am} z$, c'est-à-dire le coefficient de $\frac{1}{\varepsilon}$ dans

$$k^2 \sin^2 \operatorname{am}[2m\mathrm{K} + (2m'+1)i\mathrm{K}' + \varepsilon] = \frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} \varepsilon},$$

s'évanouit, car $\sin^2 \operatorname{am} \varepsilon$ ne contient que des puissances paires de ε dans son développement. L'intégration, quel que soit le chemin décrit par la variable z, ne donnera donc qu'une seule et unique détermination. Nous pouvons ainsi poser sans aucune ambiguïté, en adoptant les dénominations de M. Weierstrass,

$$\mathrm{J} = \int_0^{\mathrm{K}} k^2 \sin^2 \operatorname{am} x\, dx,$$

$$i\mathrm{J}' = \int_{\mathrm{K}}^{\mathrm{K}+i\mathrm{K}'} k^2 \sin^2 \operatorname{am} x\, dx.$$

Ces quantités se nomment *les fonctions complètes* de seconde espèce et sont liées à K et K' fonctions complètes de première espèce par la relation que nous avons déjà mentionnée

$$\mathrm{KJ}' - \mathrm{K}'\mathrm{J} = \frac{\pi}{2}$$

et que nous allons maintenant démontrer.

A cet effet, faisons successivement

$$z = \mathrm{K},$$
$$z = \mathrm{K} + i\mathrm{K}',$$

dans l'équation fondamentale

$$\mathrm{Z}(x) = \zeta x - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}.$$

La première substitution donnera tout d'abord

$$\mathrm{J} = \zeta \mathrm{K},$$

car on a

$$\Theta'(\mathrm{K}) = 0.$$

Pour la seconde, nous partirons de la relation donnée page 143 :

$$\Theta_1(x + i\mathrm{K}') = \mathrm{H}_1(x)\, e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x + i\mathrm{K}')}$$

et d'où l'on tire

$$\log \Theta_1(x + i\mathrm{K}') = \log \mathrm{H}_1(x) - \frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x + i\mathrm{K}').$$

En différentiant par rapport à x, on en déduit

$$\frac{\Theta'_1(x + i\mathrm{K}')}{\Theta_1(x + i\mathrm{K}')} = \frac{\mathrm{H}'_1(x)}{\mathrm{H}_1(x)} - \frac{i\pi}{2\mathrm{K}}.$$

Maintenant, si l'on fait $x = 0$, la dérivée de la fonction paire $\mathrm{H}_1(x)$ s'évanouissant, il viendra

$$\frac{\Theta'_1(i\mathrm{K}')}{\Theta_1(i\mathrm{K}')} = \frac{\Theta'(\mathrm{K} + i\mathrm{K}')}{\Theta(\mathrm{K} + i\mathrm{K}')} = -\frac{i\pi}{2\mathrm{K}}.$$

On en conclut

$$\mathrm{Z}(\mathrm{K} + i\mathrm{K}') = \zeta(\mathrm{K} + i\mathrm{K}') + \frac{i\pi}{2\mathrm{K}}$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{J}' = \frac{\mathrm{Z}(\mathrm{K} + i\mathrm{K}') - \mathrm{Z}(\mathrm{K})}{i} = \zeta \mathrm{K}' + \frac{\pi}{2\mathrm{K}},$$

ce qui donne la relation annoncée en remplaçant ζ par $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$.