Tel est l'objet de la proposition suivante due à M. Liouville, et dont l'illustre géomètre a fait la base d'une théorie complète des fonctions doublement périodiques ([1]).

IV. — *Proposition de M. Liouville.*

Elle consiste en ce que toute fonction uniforme $f(x)$, possédant deux périodes a et b, se réduit nécessairement à une constante si elle ne devient infinie pour aucune valeur de la variable. Partons en effet de l'expression suivante, de toute fonction entière, uniforme, ayant pour période a, savoir :

$$f(x) = \sum_{m}^{-\infty \; +\infty} A_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}.$$

La condition $f(x+b) = f(x)$ donnera l'égalité

$$\sum A_m e^{2m\frac{i\pi b}{a}} e^{2m\frac{i\pi x}{a}} = \sum A_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}$$

et, si l'on multiplie les deux membres par $e^{-2m\frac{i\pi x}{a}}$, on trouve, en intégrant entre les limites zéro et a,

$$A_m e^{2m\frac{i\pi b}{a}} = A_m.$$

On en conclut que A_m est nul, car en supposant imaginaire, ainsi qu'on le doit, le rapport des deux périodes $\frac{b}{a}$, on ne peut avoir $e^{2m\frac{i\pi b}{a}} = 1$ que pour la seule valeur $m = 0$. A_m devant être supposé nul pour toute valeur de m, sauf $m = 0$, on voit que $f(x)$ se réduit à la constante A_0.

Cette proposition, aussi simple qu'importante, nous fait voir que les fonctions à deux périodes seront nécessairement des transcendantes fractionnaires; elle rend compte *a priori* des singularités que présente la nature des produits doublement infinis

$$\prod x\left(1 + \frac{x}{ma+nb}\right),$$

et montre l'impossibilité de donner pour origine aux fonctions à deux périodes l'expression plus générale

$$\begin{gathered}\varphi(x)\varphi(x-a)\varphi(x-2a)\varphi(x-3a)\ldots\\ \varphi(x+a)\varphi(x+2a)\varphi(x+3a)\ldots,\end{gathered}$$

en prenant pour $\varphi(x)$ une fonction périodique entière. Mais ces expressions, si elles ne peuvent conduire aux fonctions à double période, nous amènent à celles qui leur servent de numérateur et de dénominateur, et c'est à ce moment qu'à proprement parler nous entrons dans l'étude des fonctions elliptiques.

([1]) On pourra consulter sur ce sujet l'Ouvrage de MM. Briot et Bouquet, intitulé : *Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques,* Paris, Mallet-Bachelier.

Définition des fonctions $\Theta(x)$, $H(x)$, leur expression en produits et en séries.

Rien n'est plus important ni plus digne d'intérêt que l'étude attentive des procédés par lesquels, en partant des notions antérieurement acquises, on parvient à la connaissance d'une fonction nouvelle qui devient l'origine d'un nouvel ordre de notions analytiques, et un traité complet sur le sujet qui nous occupe ne devrait omettre aucune des méthodes découvertes et suivies à l'égard des fonctions $\Theta(x)$ et $H(x)$. Mais ici nous n'en indiquerons que deux, la première se liant naturellement à ce qui précède, et la seconde devant nous permettre de donner un aperçu sur les fonctions analogues, mais à plusieurs variables et d'un ordre plus élevé, qu'on nomme *fonctions abéliennes* ou *ultra-elliptiques*.

I. — *Première méthode.*

Nous adopterons désormais les notations employées par Jacobi dans l'immortel Ouvrage intitulé : *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum,* et nous représenterons les quantités qui serviront de périodes par K et iK', i désignant $\sqrt{-1}$. Cela posé, en désignant par $\varphi(x)$ une fonction entière ayant pour période $2K$, nous considérerons, au lieu des expressions

$$\begin{aligned}&\varphi(x)\,\varphi(x-iK')\,\varphi(x-2iK')\ldots\\&\qquad\varphi(x+iK')\,\varphi(x+2iK')\ldots,\end{aligned}$$

que nous savons ne pouvoir servir à la définition d'une fonction entièrement déterminée, la suivante :

$$\begin{aligned}\Phi(x)=\varphi(x+iK')\,\varphi(x+3iK')\,\varphi(x+5iK')\ldots\\ \varphi(-x+iK')\,\varphi(-x+3iK')\,\varphi(-x+5iK')\ldots.\end{aligned}$$

On aura d'abord

$$\Phi(x+2K)=\Phi(x),$$

et l'on trouvera ensuite immédiatement

$$\Phi(x+2iK')=\Phi(x)\,\frac{\varphi(-x-iK')}{\varphi(x+iK')}.$$

On n'a donc pas ainsi une fonction doublement périodique, mais ce nouveau type d'expressions conduit, comme nous allons voir, à des fonctions parfaitement définies et déterminées.

Soit, par exemple, la fonction entière ayant $2K$ pour période

$$\varphi(x)=1-e^{\frac{i\pi x}{K}},$$

ce qui donnera

$$\frac{\varphi(-x-iK')}{\varphi(x+iK')}=-e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}.$$

En posant

$$q=e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

on trouvera

$$\begin{aligned}&\varphi[x+(2m+1)iK']\,\varphi[-x+(2m+1)iK']\\&\qquad=1-2q^{2m+1}\cos\frac{\pi x}{K}+q^{4m+2},\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\Phi(x)&=\left(1-2q\cos\frac{\pi x}{K}+q^2\right)\\&\quad\times\left(1-2q^3\cos\frac{\pi x}{K}+q^6\right)\left(1-2q^5\cos\frac{\pi x}{K}+q^{10}\right)\ldots.\end{aligned}$$

Or il suffit que le module de q soit inférieur à l'unité pour que

ce produit représente une fonction complètement définie et déterminée, car la dérivée logarithmique donne cette série

$$\begin{aligned}\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}&=\frac{2\pi}{K}\sin\frac{\pi x}{K}\\&\quad\times\left(\frac{q}{1-2q\cos\frac{\pi x}{K}+q^2}+\frac{q^3}{1-2q^3\cos\frac{\pi x}{K}+q^6}+\frac{q^5}{1-2q^5\cos\frac{\pi x}{K}+q^{10}}+\ldots\right),\end{aligned}$$

qui, dans ce cas, est toujours convergente, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de la variable x.

En introduisant en facteur une constante A, nous poserons avec Jacobi

$$\Theta(x)=A\,\Phi(x),$$

ou bien

$$\begin{aligned}\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)&=A(1-2q\cos 2x+q^2)\\&\quad\times(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots.\end{aligned}$$

C'est la première des fonctions que nous voulions définir; elle vérifie les relations

$$(1)\qquad\left\{\begin{aligned}\Theta(x+2K)&=\Theta(x),\\ \Theta(x+2iK')&=-\Theta(x)\,e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')},\end{aligned}\right.$$

qui servent de base à la théorie.

En second lieu, soit

$$H(x)=-i\Theta(x+iK')\,e^{\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')},$$

on trouve immédiatement les relations toutes semblables aux précédentes

$$(2)\qquad\left\{\begin{aligned}H(x+2K)&=-H(x),\\ H(x+2iK')&=-H(x)\,e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')},\end{aligned}\right.$$

et, pour l'expression développée, la formule

$$\begin{aligned}H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)&=A.2\sqrt[4]{q}\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)\\&\quad\times(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots.\end{aligned}$$

C'est la seconde de nos fonctions fondamentales; en la divisant par la première, on obtient une fonction à double période, car, à cause des relations (1) et (2), le quotient $\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}$ satisfait aux conditions

$$\frac{\mathrm{H}(x+2\mathrm{K})}{\Theta(x+2\mathrm{K})} = -\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)},$$

$$\frac{\mathrm{H}(x+4\mathrm{K})}{\Theta(x+4\mathrm{K})} = \frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)},$$

$$\frac{\mathrm{H}(x+2i\mathrm{K}')}{\Theta(x+2i\mathrm{K}')} = \frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}.$$

Faisons enfin

$$\Theta_1(x) = \Theta(x+\mathrm{K}),$$
$$\mathrm{H}_1(x) = \mathrm{H}(x+\mathrm{K}),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\Theta_1\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right) &= \mathrm{A}(1+2q\cos 2x+q^2)\\ &\quad\times(1+2q^3\cos 2x+q^6)(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_1\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right) &= \mathrm{A}\,2\sqrt[4]{q}\cos x(1+2q^2\cos 2x+q^4)\\ &\quad\times(1+2q^4\cos 2x+q^8)(1+2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots.\end{aligned}$$

Ces deux nouvelles fonctions conduisent aux relations

$$(3)\quad \begin{cases}\Theta_1(x+2\mathrm{K}) = \Theta_1(x),\\ \Theta_1(x+2i\mathrm{K}') = \Theta_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')},\end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases}\mathrm{H}_1(x+2\mathrm{K}) = -\mathrm{H}_1(x),\\ \mathrm{H}_1(x+2i\mathrm{K}') = \mathrm{H}_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')},\end{cases}$$

de sorte que les quotients $\frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)}$, $\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}$ seront encore des fonctions à double période qui se lient chacune à la précédente à peu près comme le sinus au cosinus, et complètent le système des trois nouvelles transcendantes dont l'étude constitue la théorie des fonctions elliptiques. Nous allons les retrouver sous une forme analytique différente, qui les rattache aux transcendantes ultra-elliptiques à plusieurs variables et à périodicité multiple. Mais cette première méthode a l'avantage de donner immédiatement les racines en nombre infini des équations transcendantes qu'on ob-

tient en égalant à zéro chacune de ces fonctions, savoir :

$$\begin{cases}\Theta(x)=0, & x = 2m\mathrm{K}+(2m'+1)i\mathrm{K}',\\ \mathrm{H}(x)=0, & x = 2m\mathrm{K}+2m'i\mathrm{K}',\\ \Theta_1(x)=0, & x=(2m+1)\mathrm{K}+(2m'+1)i\mathrm{K}',\\ \mathrm{H}_1(x)=0, & x=(2m+1)\mathrm{K}+2m'i\mathrm{K}',\end{cases}$$

m et m' désignant des nombres entiers quelconques. Aux diverses relations fondamentales que nous venons de donner, nous joindrons encore celles-ci, dont il est souvent fait usage,

$$\begin{cases}\Theta(x+i\mathrm{K}') = i\,\mathrm{H}(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x+i\mathrm{K}')},\\ \mathrm{H}(x+i\mathrm{K}') = i\Theta(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x+i\mathrm{K}')},\\ \Theta_1(x+i\mathrm{K}') = \mathrm{H}_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x+i\mathrm{K}')},\\ \mathrm{H}_1(x+i\mathrm{K}') = \Theta_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x+i\mathrm{K}')}.\end{cases}$$

Enfin nous remarquerons que ces fonctions ne changent point en y remplaçant x par λx, K et K′ par $\lambda\mathrm{K}$ et $\lambda\mathrm{K}'$, de sorte qu'on peut particulariser l'une des périodes, prendre par exemple $\mathrm{K}=1$, car, de ce cas spécial, on reviendra immédiatement à nos expressions générales. Mais c'est une particularisation différente de celle-là que nous aurons à mettre en usage, et dont nous parlerons lorsqu'elle viendra naturellement s'offrir.

II. — *Deuxième méthode.*

La proposition de M. Liouville consistant en ce qu'une fonction uniforme entière $\sum \mathrm{A}_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}$, qui admet la période a, ne peut, sans se réduire à une constante, admettre une autre période b, conduit naturellement à rechercher l'expression analytique des fonctions à double période sous la forme fractionnaire

$$\frac{\sum \mathrm{A}_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}}{\sum \mathrm{B}_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}}.$$

Essayons, d'après cela, de déterminer A_m et B_m par la condition

$$\frac{\sum A_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}}{\sum B_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}} = \frac{\sum A_m e^{2m\frac{i\pi}{a}(x+b)}}{\sum B_m e^{2m\frac{i\pi}{a}(x+b)}},$$

b désignant la seconde période. Faisant, pour abréger,

$$\mathfrak{q} = e^{i\pi\frac{b}{a}},$$

il viendra, en chassant les dénominateurs,

$$\sum A_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}} \sum B_m e^{2m\frac{i\pi}{a}(x+b)} = \sum B_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}} \sum A_m e^{2m\frac{i\pi}{a}(x+b)},$$

et dans cette nouvelle égalité les coefficients d'une même exponentielle $e^{2\mu\frac{i\pi x}{a}}$ devront être égaux. Or on reconnaît immédiatement que ces coefficients seront les séries

$$\sum_{m}{}_{-\infty}^{+\infty} A_{\mu-m} B_m \mathfrak{q}^{2m} \quad \text{et} \quad \sum_{m}{}_{-\infty}^{+\infty} A_{\mu-m} B_m \mathfrak{q}^{2(\mu-m)},$$

de sorte qu'en mettant pour un instant n au lieu de m pour indice dans le terme général de la seconde, on sera conduit à cette égalité, qui devra avoir lieu quel que soit μ :

$$\sum_{m}{}_{-\infty}^{+\infty} A_{\mu-m} B_m \mathfrak{q}^{2m} = \sum_{n}{}_{-\infty}^{+\infty} A_{\mu-n} B_n \mathfrak{q}^{2(\mu-n)}.$$

Il pourra sembler difficile de tirer de là les fonctions inconnues A_m et B_m dans toute leur généralité; aussi nous bornerons-nous à chercher cette solution qui s'offre d'elle-même, et qui consiste à obtenir l'égalité des séries en les rendant identiques. Nous poserons donc

$$A_{\mu-m} B_m \mathfrak{q}^{2m} = A_{\mu-n} B_n \mathfrak{q}^{2(\mu-n)},$$

et nous imaginerons que n soit exprimé en fonction de m, de manière que ces deux quantités puissent représenter en même temps la série complète des nombres entiers. C'est ce qu'on ob-

tiendra en faisant,

$$n = m + k,$$

k étant entier, et après avoir écrit l'égalité précédente sous la forme

$$\frac{A_{\mu-m}}{\mathfrak{q}^{2(\mu-n)} A_{\mu-n}} = \frac{B_n}{\mathfrak{q}^{2m} B_m},$$

on trouvera ainsi

$$\frac{A_{\mu-m}}{\mathfrak{q}^{2(\mu-m-k)} A_{\mu-m-k}} = \frac{B_{m+k}}{\mathfrak{q}^{2m} B_m}.$$

Mais devant satisfaire, quel que soit μ, à cette condition, on pourra poser

$$\mu - m - k = m',$$

m' étant entièrement indépendant de m, ce qui donnera

$$\frac{A_{m'+k}}{\mathfrak{q}^{2m'} A_{m'}} = \frac{B_{m+k}}{\mathfrak{q}^{2m} B_m},$$

d'où l'on voit que chaque membre est une quantité constante. Ainsi les fonctions inconnues A_m et B_m sont deux solutions de cette même équation aux différences finies

$$\frac{z_{m+k}}{\mathfrak{q}^{2m} z_m} = \text{const.},$$

dont l'intégrale générale est

$$z_m = \mathfrak{q}^{\frac{m^2}{k} + \alpha m} u_m,$$

α dépendant de la constante du second membre, et u_m devant vérifier la condition

$$u_{m+k} = u_m.$$

Cette quantité α peut être particularisée, comme on le voit, sans restreindre la généralité du résultat, car il suffira pour la retrouver de changer dans la fonction x en $x + \beta$; nous la supposerons égale à zéro, et nous prendrons pour A_m et B_m les valeurs suivantes :

$$A_m = a_m \mathfrak{q}^{\frac{m^2}{k}},$$

$$B_m = b_m \mathfrak{q}^{\frac{m^2}{k}},$$

les quantités a_m et b_m vérifiant les conditions

$$a_{m+k} = a_m, \qquad b_{m+k} = b_m.$$

Ainsi en faisant

$$\Phi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, a_m \mathfrak{q}^{\frac{m^2}{k}} e^{2m\frac{i\pi x}{a}},$$

$$\Pi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, b_m \mathfrak{q}^{\frac{m^2}{k}} e^{2m\frac{i\pi x}{a}},$$

le quotient $\frac{\Phi(x)}{\Pi(x)}$ sera l'expression d'une fonction doublement périodique, donnée par notre analyse, et il s'agit maintenant d'étudier de plus près ces séries remarquables auxquelles nous sommes conduit pour le numérateur et le dénominateur.

En premier lieu et relativement à la convergence, si l'on suppose, comme nous l'avons fait déjà, le module de $\mathfrak{q}$ inférieur à l'unité, le nombre entier k qui demeure arbitraire devra évidemment être pris positif; mais, cette condition admise, les deux séries considérées comme procédant suivant les puissances quadratiques de $\mathfrak{q}$ présenteront pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de la variable la convergence la plus rapide, et dont aucun exemple n'avait encore été donné en Analyse. En second lieu et pour saisir de quelle manière se réalise la double périodicité dans le quotient, changeons x en $x + b$, par exemple, dans le numérateur. On trouvera

$$\Phi(x+b) = \sum a_m \mathfrak{q}^{\frac{m^2}{k}} e^{2m\frac{i\pi}{a}(x+b)},$$

ou bien

$$\Phi(x+b) = \sum a_m \mathfrak{q}^{\frac{m^2}{k}+2m} e^{2m\frac{i\pi x}{a}},$$

en ayant égard à la valeur de $\mathfrak{q} = e^{\frac{i\pi b}{a}}$. Mais dans le terme général il est permis de remplacer m par $m - k$, puisque l'indice doit recevoir toutes les valeurs entières $-\infty$ à $+\infty$; on trouve ainsi et en faisant $a_{m-k} = a_m$,

$$\begin{aligned}\Phi(x+b) &= \sum a_m \mathfrak{q}^{\frac{(m-k)^2}{k}+2(m-k)} e^{2(m-k)\frac{i\pi x}{a}} \\ &= \sum a_m \mathfrak{q}^{\frac{m^2}{k}-k} e^{2(m-k)\frac{i\pi x}{a}} \\ &= \mathfrak{q}^{-k} e^{-2k\frac{i\pi x}{a}} \sum a_m \mathfrak{q}^{\frac{m^2}{k}} e^{2m\frac{i\pi x}{a}},\end{aligned}$$

de sorte que la série primitive $\Phi(x)$ se reproduit en facteur. Nous écrirons cette relation fondamentale sous la forme suivante :

$$\Phi(x+b) = \Phi(x)\, e^{-k\frac{i\pi}{a}(2x+b)},$$

et en observant qu'elle a été obtenue sans rien supposer sur les coefficients arbitraires a_m, nous y joindrons celle-ci :

$$\Pi(x+b) = \Pi(x)\, e^{-k\frac{i\pi}{a}(2x+b)}.$$

Par là se manifeste de la manière la plus claire à quoi tient la double périodicité du quotient des deux fonctions $\Phi(x)$ et $\Pi(x)$. Chacune d'elles admet la période a, et, lorsqu'on y change x en $x + b$, elles ne font qu'acquérir un même facteur exponentiel qui disparaît par la division (1).

Bientôt on verra le rôle important que joue le nombre entier k qui introduit au numérateur et au dénominateur k constantes arbitraires d'après les relations

$$a_{m+k} = a_m, \qquad b_{m+k} = b_m.$$

Mais nous devons dès à présent remarquer qu'il est impossible de satisfaire aux conditions

$$\Phi(x+a) = \Phi(x),$$
$$\Phi(x+b) = \Phi(x)\, e^{-k\frac{i\pi}{a}(2x+b)},$$

par d'autres fonctions *uniformes entières,* que par la série précédente. Qu'on fasse, en effet, pour se placer dans cette hypothèse en vérifiant la première de ces conditions,

$$\Phi(x) = \sum \mathrm{A}_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}},$$

---

(1) Dans le cas où k est un nombre pair, on remarquera la relation suivante. Faisons

$$\Phi_0(x) = \sum a_{m+\frac{1}{2}k} \mathfrak{q}^{\frac{m^2}{k}} e^{2m\frac{i\pi x}{a}},$$

fonction qui ne diffère de $\Phi(x)$ qu'en ce que les constantes arbitraires a_m sont disposées dans un autre ordre; on aura

$$\Phi\left(x+\frac{b}{2}\right) = \Phi_0(x)\, e^{-\frac{ki\pi}{2a}(2x+b)}.$$

ou plutôt

$$\Phi(x) = \sum a_m q^{\frac{m^2}{k}} e^{2m\frac{i\pi x}{a}},$$

il viendra, en substituant dans la seconde égalité et en comparant les coefficients d'une même exponentielle, $a_{m+k} = a_m$. Avant d'aller plus loin, nous nous proposerons dans une courte digression de dire quelques mots d'une généralisation aussi remarquable qu'importante des séries que nous venons de rencontrer.

III. — *Aperçu sur les fonctions de plusieurs variables à périodicité multiple.*

Une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables peut être périodique non seulement par rapport à chaque variable considérée isolément, mais par rapport à leur ensemble, lorsqu'elle vérifie une condition de cette forme

$$f(x_1 + a_1, x_2 + a_2, \ldots, x_n + a_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Sous ce point de vue plus général, on a d'abord cette proposition qu'une fonction uniforme de n variables ne peut admettre plus de $2n$ périodes simultanées [1]. Mais il est extrêmement remarquable et c'est à M. le Dr Riemann, de Göttingue, qu'on doit cette belle découverte analytique, qu'à l'égard des fonctions uniformes ou bien déterminées, les $2n$ périodes simultanées ne peuvent être des quantités données *a priori*, et indépendantes les unes des autres. Qu'on forme, en effet, avec n périodes simultanées convenablement choisies :

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_n, \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots, & \ldots, \\ g_1, & g_2, & \ldots, & g_n, \end{matrix}$$

les n fonctions linéaires

$$\begin{aligned} X_1 &= a_1 x_1 + b_1 x_2 + \ldots + g_1 x_n, \\ X_2 &= a_2 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + g_2 x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n &= a_n x_1 + b_n x_2 + \ldots + g_n x_n. \end{aligned}$$

(1) Si elle est entière, elle n'en peut admettre plus de n.

En posant

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

on aura une fonction transformée simplement périodique par rapport à chaque variable, mais qui conservera n autres périodes simultanées, et c'est à leur égard que se manifeste dans toute sa simplicité la relation que nous voulons énoncer. Représentons-les par

$$\begin{matrix} A_1, & A_2, & \ldots, & A_n, \\ B_1, & B_2, & \ldots, & B_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots, & \ldots, \\ G_1, & G_2, & \ldots, & G_n. \end{matrix}$$

La proposition de M. Riemann consiste en ce que les termes de ce Tableau qui sont placés symétriquement par rapport à la diagonale $A_1, B_2, \ldots, G_n$ sont égaux entre eux, ou, ce qui revient au même, en ce que les fonctions linéaires

$$\begin{aligned} &A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n, \\ &B_1 x_1 + B_2 x_2 + \ldots + B_n x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &G_1 x_1 + G_2 x_2 + \ldots + G_n x_n \end{aligned}$$

sont les dérivées partielles d'une même forme quadratique à n indéterminées.

Voici maintenant la généralisation des séries relatives aux fonctions à double période, et qui donnent l'expression analytique des fonctions analogues à n variables et $2n$ périodes simultanées.

Représentons la forme quadratique dont il vient d'être question par $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et posons

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum a_{m_1, m_2, \ldots} e^{2i\pi(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots) + \frac{i\pi}{k}\varphi(m_1, m_2 \ldots)},$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$ des n indices $m_1, m_2, \ldots, m_n$, et le coefficient constant $a_{m_1, m_2, \ldots, m_n}$ étant assujetti à la condition de reprendre la même valeur lorsqu'on augmente du nombre entier k l'un quelconque des indices. Cette fonction est évidemment périodique à l'égard de chacune des variables considérée séparément, et voici la propriété fondamentale qui la rattache aux séries elliptiques.

Désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n nombres entiers arbitraires, on aura

$$\Phi\left(x_1 + \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{da_1},\ x_2 + \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{da_2},\ \ldots,\ x_n + \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{da_n}\right)$$
$$= \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e^{-ki\pi[2a_1x_1 + 2a_2x_2 + \ldots + \varphi(a_1, a_2, \ldots)]}.$$

Cette relation ne contenant pas les constantes $a_{m_1, m_2, \ldots, m_n}$, une autre série $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, où ces constantes auront des déterminations différentes, donnera de même

$$\Pi\left(x_1 + \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{da_1},\ x_2 + \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{da_2},\ \ldots,\ x_n + \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{da_n}\right)$$
$$= \Pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e^{-ki\pi[2a_1x_1 + 2a_2x_2 + \ldots + \varphi(a_1, a_2, \ldots)]}.$$

Il en résulte que le quotient $\dfrac{\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ représentera une fonction de n variables à $2n$ périodes, n d'entre elles égales à l'unité et appartenant séparément à chaque variable, les n autres étant les termes du Tableau dont on a déduit la forme quadratique $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Elles résultent effectivement des égalités précédentes, en y supposant successivement nuls, sauf un seul qu'on prendra égal à l'unité, les nombres entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Nous voyons aussi figurer dans les séries un entier k dont dépend le nombre des constantes arbitraires qu'elles renferment; or ce nombre sera limité et fini, lorsque la condition suivante, dont la découverte appartient encore à M. Riemann, sera remplie.

Soit

$$\begin{matrix} p_1, & p_2, & \ldots, & p_n, \\ q_1, & q_2, & \ldots, & q_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots, & \ldots, \\ s_1, & s_2, & \ldots, & s_n, \end{matrix}$$

un système de n^2 constantes arbitraires, il sera nécessaire et suffisant que les fonctions

$$\begin{aligned} &f(x_1 + p_1,\ x_2 + p_2,\ \ldots,\ x_n + p_n), \\ &f(x_1 + q_1,\ x_2 + q_2,\ \ldots,\ x_n + q_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &f(x_1 + s_1,\ x_2 + s_2,\ \ldots,\ x_n + s_n), \end{aligned}$$

égalées à zéro ou à l'infini, n'admettent qu'un nombre fini et limité de solutions qu'on ne puisse réduire les unes aux autres en ayant égard aux périodes.

C'est à Göpel et à M. Rosenhain qu'est due la première notion des séries dont nous venons de parler, et leur application dans le cas de deux variables, à l'expression des fonctions inverses des intégrales de radicaux carrés de polynomes du cinquième ou du sixième degré. M. Weierstrass, dépassant de beaucoup les résultats obtenus par ces deux illustres analystes, résolut dans toute sa généralité à l'aide des mêmes séries le problème de l'inversion des intégrales de radicaux carrés de polynomes de degré quelconque. Après lui, en suivant une voie toute différente, M. Riemann parvint aux mêmes résultats, et c'est dans le champ plus vaste encore des transcendantes à différentielles algébriques quelconques que ces deux grands Géomètres se rencontrèrent en obtenant en même temps la solution du problème si général de l'inversion des intégrales de fonctions algébriques quelconques, l'une des plus belles et des plus importantes questions qui se soient jamais offertes en Analyse.

IV. — *Comparaison entre les expressions sous forme de produits infinis et de séries des fonctions* Θ *et* H.

Nous venons, dans un rapide aperçu, de montrer le lien et l'analogie des séries qui donnent l'expression des fonctions doublement périodiques à une seule variable, et de celles qui conduisent aux transcendantes abéliennes les plus générales. Mais le cas le plus simple dont nous allons nous occuper exclusivement est le seul où ait lieu une décomposition en facteurs que ne comportent aucunement les cas les plus généraux où les séries renferment deux ou un plus grand nombre de variables. Le rapprochement de ces deux genres d'expressions se présente de lui-même, et résulte de ces relations qui ont été précédemment données et que nous réunissons ici :

$$\begin{aligned}
\Theta\,(x + 2\mathrm{K}) &= \Theta\,(x), & \Theta\,(x + 2i\mathrm{K}') &= -\Theta\,(x)\, e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x + i\mathrm{K}')}, \\
\mathrm{H}\,(x + 2\mathrm{K}) &= -\mathrm{H}\,(x), & \mathrm{H}\,(x + 2i\mathrm{K}') &= -\mathrm{H}\,(x)\, e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x + i\mathrm{K}')}, \\
\Theta_1(x + 2\mathrm{K}) &= \Theta_1(x), & \Theta_1(x + 2i\mathrm{K}') &= \Theta_1(x)\, e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x + i\mathrm{K}')}, \\
\mathrm{H}_1(x + 2\mathrm{K}) &= -\mathrm{H}_1(x), & \mathrm{H}_1(x + 2i\mathrm{K}') &= \mathrm{H}_1(x)\, e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x + i\mathrm{K}')}.
\end{aligned}$$

Comme on a évidemment

$$\Theta(x+4\mathrm{K})=\Theta(x),\qquad \mathrm{H}(x+4\mathrm{K})=\mathrm{H}(x),$$

on voit que les fonctions $\Theta(x)$ et $\mathrm{H}(x)$ satisfont toutes deux à ces conditions

$$\begin{aligned}\Phi(x+4\mathrm{K})&=\Phi(x),\\ \Phi(x+2i\mathrm{K}')&=-\Phi(x)\,e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')},\end{aligned}$$

et les fonctions $\Theta_1(x)$ et $\mathrm{H}_1(x)$ à celles-ci, pour une raison semblable,

$$\begin{aligned}\Phi(x+4\mathrm{K})&=\Phi(x),\\ \Phi(x+2i\mathrm{K}')&=\Phi(x)\,e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')}.\end{aligned}$$

Mais ce sont précisément celles que vérifie l'expression générale

$$\Phi(x)=\sum a_m q^{\frac{m^2}{k}}e^{2m\frac{i\pi x}{a}},$$

lorsqu'en supposant le nombre k égal à 2, on prend pour périodes

$$\begin{aligned}a&=4\mathrm{K},\\ b&=2i\mathrm{K}'.\end{aligned}$$

Les constantes a_m se réduisent alors à deux, a_0 et a_1, et, comme elles suffisent, ainsi que nous l'avons établi, à représenter la solution de ces équations la plus générale par des fonctions entières, en leur attribuant des valeurs convenables, les fonctions $\Theta_1(x)$ et $\mathrm{H}_1(x)$ seront données par la série

$$\sum a_m q^{\frac{m^2}{2}}e^{2m\frac{i\pi x}{a}}=a_0\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, q^{m^2}e^{m\frac{i\pi x}{\mathrm{K}}}+a_1\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}e^{(2m+1)\frac{i\pi x}{2\mathrm{K}}}.$$

Cette détermination résulte d'ailleurs immédiatement des conditions

$$\begin{aligned}\Theta_1(x+2\mathrm{K})&=\Theta_1(x),\\ \mathrm{H}_1(x+2\mathrm{K})&=-\mathrm{H}_1(x);\end{aligned}$$

on remarque en effet que les séries qui multiplient a_0 et a_1 vérifient respectivement la première et la seconde, de sorte qu'on

aura

$$\begin{aligned}\alpha\Theta_1(x)&=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, q^{m^2}e^{2m\frac{i\pi x}{2\mathrm{K}}},\\ \beta\mathrm{H}_1(x)&=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}e^{(2m+1)\frac{i\pi x}{2\mathrm{K}}},\end{aligned}$$

en désignant par α et β des quantités constantes. Si l'on remplace les exponentielles par les lignes trigonométriques et la variable x par $\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}$, on obtiendra ces développements remarquables

$$\begin{aligned}\alpha\Theta_1\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right)&=1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\ldots,\\ \beta\mathrm{H}_1\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right)&=2\sqrt[4]{q}\cos x+2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x+\ldots.\end{aligned}$$

En y remplaçant x par $x+\frac{\pi}{2}$, on en déduira

$$\begin{aligned}\alpha\Theta\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right)&=1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\ldots,\\ \beta\mathrm{H}\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right)&=2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\ldots.\end{aligned}$$

D'ailleurs, en ayant égard à la relation

$$\Theta_1(x+i\mathrm{K}')=\mathrm{H}_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x+i\mathrm{K}')},$$

on trouvera que les deux constantes α et β sont égales entre elles. Voici donc entre les séries et les produits infinis des relations d'identité extrêmement dignes d'intérêt, et auxquelles bien d'autres méthodes pourraient conduire. Jacobi, le premier auteur de leur découverte, et M. Cauchy, en ont donné plusieurs qui sont tout à fait élémentaires, mais c'est surtout la suivante qui appartient à M. Cauchy, et présente ce caractère ainsi qu'on va le voir.

Considérons avec l'illustre Géomètre le polynome entier et fini

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=(1+z)(1+qz)(1+q^2z)\ldots(1+q^{n-1}z)\\ &=1+\mathrm{A}_1z+\mathrm{A}_2z^2+\ldots+\mathrm{A}_nz^n.\end{aligned}$$

La relation identique

$$(1+z)\varphi(qz)=(1+q^nz)\varphi(z)$$

donne cette suite d'égalités

$$\begin{aligned} A_1(1-q) &= 1-q^n, \\ A_2(1-q^2) &= A_1(q-q^n), \\ A_3(1-q^3) &= A_2(q^2-q^n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$A_i = q^{\frac{i(i-1)}{2}} \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\ldots(1-q^{n-i+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^i)}.$$

Cela posé, nommons un instant $\Phi(z)$ ce que devient $\varphi(z)$ en y remplaçant q par q^2, n par $2n$ et z par $\frac{z}{q^{2n-1}}$. Si l'on fait

$$\Phi(z) = 1 + \mathfrak{a}_1 z + \mathfrak{a}_2 z^2 + \ldots + \mathfrak{a}_{2n} z^{2n},$$

on trouvera aisément $\mathfrak{a}_i$ au moyen de A_i, et, en introduisant $n+i$ pour indice, on aura cette expression

$$\mathfrak{a}_{n+i} = q^{i^2-n^2} \frac{(1-q^{4n})(1-q^{4n-2})\ldots(1-q^{2n-2i+2})}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2n+2i})}.$$

Le nombre entier i doit être regardé comme recevant toutes les valeurs de $-n$ à $+n$, mais on peut se borner par exemple aux valeurs positives, car on vérifie sans peine la relation

$$\mathfrak{a}_{n-i} = \mathfrak{a}_{n+i},$$

il en résulte pour $\Phi(z)$ cette forme

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \mathfrak{a}_n z^n &+ \mathfrak{a}_{n+1}(z^{n-1} + z^{n+1}) \\ &+ \mathfrak{a}_{n+2}(z^{n-2} + z^{n+2}) + \ldots + \mathfrak{a}_{2n}(1 + z^{2n}), \end{aligned}$$

ou encore

$$\Phi(z) = \mathfrak{a}_n z^n \left[1 + \frac{\mathfrak{a}_{n+1}}{\mathfrak{a}_n}(z + z^{-1}) + \frac{\mathfrak{a}_{n+2}}{\mathfrak{a}_n}(z^2 + z^{-2}) + \ldots\right].$$

Mais revenons à la valeur de $\Phi(z)$ sous forme de produit, et observons d'abord qu'en remplaçant q par q^2 et n par $2n$ dans $\varphi(z)$, il vient

$$\begin{aligned} &(1+z)(1+q^2z)(1+q^4z)\ldots(1+q^{4n-2}z) \\ &\quad = [(1+z)(1+q^2z)\ldots(1+q^{2n}z)][(1+q^{2n+2}z)(1+q^{2n+4}z)\ldots(1+q^{4n-2}z)], \end{aligned}$$

de sorte qu'en mettant en dernier lieu $\frac{z}{q^{2n-1}}$ au lieu de z, on trouvera

$$\begin{aligned} \Phi(z) = &\left[\left(1+\frac{z}{q^{2n-1}}\right)\left(1+\frac{z}{q^{2n-3}}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{q}\right)\right] \\ &\times [(1+qz)(1+q^3z)\ldots(1+q^{2n-1}z)]. \end{aligned}$$

Or on peut écrire autrement les facteurs du premier produit, en remarquant que

$$\begin{aligned} 1+\frac{z}{q} &= \frac{z}{q}\left(1+\frac{q}{z}\right), \\ 1+\frac{z}{q^3} &= \frac{z}{q^3}\left(1+\frac{q^3}{z}\right), \\ 1+\frac{z}{q^5} &= \frac{z}{q^5}\left(1+\frac{q^5}{z}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

cela donne pour $\Phi(z)$ cette nouvelle valeur

$$\begin{aligned} \Phi(z) = &\frac{z^n}{q^{n^2}}\left(1+\frac{q}{z}\right)\left(1+\frac{q^3}{z}\right)\cdots\left(1+\frac{q^{2n-1}}{z}\right) \\ &\times (1+qz)(1+q^3z)\ldots(1+q^{2n-1}z). \end{aligned}$$

Telle est la forme définitive du produit de facteurs dont nous avons le développement suivant les puissances de z. En faisant, pour abréger,

$$\mathfrak{a}_n = \frac{\mathfrak{A}_n}{q^{n^2}}, \qquad \frac{\mathfrak{a}_{n+i}}{\mathfrak{a}_n} = a_i q^{i^2},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_n &= \frac{(1-q^{4n})(1-q^{4n-2})\ldots(1-q^{2n+2})}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2n})}, \\ a_i &= \frac{(1-q^{2n})(1-q^{2n-2})\ldots(1-q^{2n-2i+2})}{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})\ldots(1-q^{2n+2i})}, \end{aligned}$$

l'identité algébrique que nous venons d'obtenir s'écrira ainsi

$$\begin{aligned} &\left(1+\frac{q}{z}\right)\left(1+\frac{q^3}{z}\right)\cdots\left(1+\frac{q^{2n-1}}{z}\right) \\ &(1+qz)(1+q^3z)\ldots(1+q^{2n-1}z) \\ &\quad = \mathfrak{A}_n[1 + a_1 q(z+z^{-1}) + a_2 q^4(z^2+z^{-2}) + \ldots + a_n q^{n^2}(z^n+z^{-n})], \end{aligned}$$

et par suite, en faisant $z = e^{2ix}$,

$$\begin{aligned} &(1+2q\cos 2x + q^2)(1+2q^3\cos 2x + q^6)\ldots(1+2q^{2n-1}\cos 2x + q^{4n-2}) \\ &\quad = \mathfrak{A}_n(1 + 2a_1 q\cos 2x + 2a_2 q^4 \cos 4x + \ldots + 2a_n q^{n^2}\cos 2nx). \end{aligned}$$

Or on a pour n infini

$$\mathfrak{A}_n = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots},$$
$$\mathfrak{a}_i = 1,$$

et l'identité algébrique fournit l'importante propriété de la transcendante $\Theta_1(x)$, exprimée par la relation

$$(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots$$
$$= \frac{1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\ldots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}.$$

Ce résultat nous conduit à préciser complètement la définition première que nous avons donnée des quatre fonctions $\Theta(x)$, $\mathrm{H}(x)$, $\Theta_1(x)$, $\mathrm{H}_1(x)$, en les représentant par un produit de facteurs affecté d'un coefficient A resté jusqu'ici arbitraire. Nous ferons désormais

$$\mathrm{A} = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots,$$

et nous aurons de la sorte

$$\Theta_1\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right) = 1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\ldots.$$

En partant de là et à l'aide de la relation

$$\Theta_1(x+i\mathrm{K}') = \mathrm{H}_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x+i\mathrm{K}')},$$

on aura ensuite

$$\mathrm{H}_1\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}\cos x+2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x+\ldots,$$

et ces deux formules, en y changeant x en $x+\frac{\pi}{2}$, donneront

$$\Theta\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right) = 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\ldots,$$
$$\mathrm{H}\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\ldots.$$

Telles sont sous les formes de produits infinis et de séries les transcendantes dont nous allons établir les propriétés.

Des deux formes principales que peuvent prendre parmi une infinité d'autres les fonctions Θ, H, etc.

Ce point touche à la plus belle partie de la théorie des fonctions elliptiques, à la théorie de la transformation, que les bornes de cette Note ne nous permettent point d'aborder. Mais, indépendamment de leur intérêt propre, les formules que nous allons établir et qui donnent cette transformation spéciale des fonctions Θ, H, etc., où l'on remplace l'une par l'autre les quantités K et $i\mathrm{K}'$, nous seront indispensables plus tard, et nous devons d'autant moins les omettre qu'il est extrêmement facile d'y parvenir, comme on va voir. D'ailleurs, on sera mis ainsi sur la voie de la recherche analogue et plus générale, où l'on remplace K et $i\mathrm{K}$ par $m\mathrm{K}+m'i\mathrm{K}'$, $n\mathrm{K}+n'i\mathrm{K}'$, m, m', n, n' désignant des nombres entiers, et qui constitue le sujet même de la théorie de la transformation. Dans le cas où $mn'-m'n=1$, on est amené à ce que Jacobi nomme la théorie des formes en nombre infini des fonctions Θ, H, etc.; mais, parmi toutes ces formes, ce sont celles que nous allons établir et dont nous aurons à faire usage, qui méritent d'être particulièrement distinguées. Posons

$$\theta\,(x) = e^{\frac{\pi x^2}{4\mathrm{KK}'}}\,\Theta\,(x),$$
$$\eta\,(x) = e^{\frac{\pi x^2}{4\mathrm{KK}'}}\,\mathrm{H}\,(x),$$
$$\theta_1(x) = e^{\frac{\pi x^2}{4\mathrm{KK}'}}\,\Theta_1(x),$$
$$\eta_1(x) = e^{\frac{\pi x^2}{4\mathrm{KK}'}}\,\mathrm{H}_1(x),$$

on verra immédiatement correspondre aux relations fondamentales propres aux fonctions Θ, H, Θ_1, H_1, à savoir :

$$(a)\quad \begin{cases} \Theta\,(x+\mathrm{K}) = \Theta_1(x), \\ \mathrm{H}\,(x+\mathrm{K}) = \mathrm{H}_1(x), \\ \Theta_1(x+\mathrm{K}) = \Theta\,(x), \\ \mathrm{H}_1(x+\mathrm{K}) = -\mathrm{H}\,(x), \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} \Theta\,(x+i\mathrm{K}') = i\mathrm{H}(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x+i\mathrm{K}')}, \\ \mathrm{H}\,(x+i\mathrm{K}') = i\Theta\,(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x+i\mathrm{K}')}, \\ \Theta_1(x+i\mathrm{K}') = \mathrm{H}_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x+i\mathrm{K}')}, \\ \mathrm{H}_1(x+i\mathrm{K}') = \Theta_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x+i\mathrm{K}')}, \end{cases}$$

celles-ci :

$$(c)\qquad \begin{cases} \theta\,(x+i\mathrm{K}') = i\eta(x), \\ \eta\,(x+i\mathrm{K}') = i\theta\,(x), \\ \theta_1(x+i\mathrm{K}') = \eta_1(x), \\ \eta_1(x+i\mathrm{K}') = \theta_1(x), \end{cases}$$

$$(d)\qquad \begin{cases} \theta\,(x+\mathrm{K}) = \theta_1(x)\,e^{\frac{\pi}{4\mathrm{K}'}(2x+\mathrm{K})}, \\ \eta\,(x+\mathrm{K}) = \eta_1(x)\,e^{\frac{\pi}{4\mathrm{K}'}(2x+\mathrm{K})}, \\ \theta_1(x+\mathrm{K}) = \theta\,(x)\,e^{\frac{\pi}{4\mathrm{K}'}(2x+\mathrm{K})}, \\ \eta_1(x+\mathrm{K}) = -\eta\,(x)\,e^{\frac{\pi}{4\mathrm{K}'}(2x+\mathrm{K})}. \end{cases}$$

Cela posé, remplaçons les équations (a) par les suivantes, qui évidemment leur sont équivalentes :

$$(a')\qquad \begin{cases} \Theta\,(x-\mathrm{K}) = \Theta_1(x), \\ \mathrm{H}\,(x-\mathrm{K}) = -\mathrm{H}_1(x), \\ \Theta_1(x-\mathrm{K}) = \Theta(x), \\ \mathrm{H}_1(x-\mathrm{K}) = \mathrm{H}(x). \end{cases}$$

Alors, en comparant les équations (a') et (b) aux équations (c) et (d), on remarque que le second système de relations coïncide avec le premier lorsqu'on y remplace d'une part

$$\mathrm{K} \quad \text{et} \quad i\mathrm{K}'$$

respectivement par

$$i\mathrm{K}' \quad \text{et} \quad -\mathrm{K},$$

et de l'autre

$$\theta(x), \quad \eta(x), \quad \theta_1(x), \quad \eta_1(x)$$

par

$$\mathrm{H}_1(x), \quad \frac{1}{i}\,\mathrm{H}(x), \quad \Theta_1(x), \quad \Theta(x).$$

Les nouvelles fonctions que nous avons introduites se trouvent ainsi ramenées aux anciennes et, si l'on remarque que par le changement de K en $i\mathrm{K}'$, et de $i\mathrm{K}'$ en $-\mathrm{K}$ la quantité $q = e^{-\pi\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}$ devient $q_0 = e^{-\pi\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}}$, on aura en conclusion les expressions suivantes,

où M et N désignent deux facteurs constants :

1°
$$\theta\left(\frac{2i\mathrm{K}'x}{\pi}\right) = \mathrm{M}.2\sqrt[4]{q_0}\cos x(1+2q_0^2\cos 2x+q_0^4)$$
$$\times(1+2q_0^4\cos 2x+q_0^8)(1+2q_0^6\cos 2x+q_0^{12}),\ \ldots,$$
$$i\eta\left(\frac{2i\mathrm{K}'x}{\pi}\right) = \mathrm{M}.2\sqrt[4]{q_0}\sin x(1-2q_0^2\cos 2x+q_0^4)$$
$$\times(1-2q_0^4\cos 2x+q_0^8)(1-2q_0^6\cos 2x+q_0^{12}),\ \ldots,$$
$$\theta_1\left(\frac{2i\mathrm{K}'x}{\pi}\right) = \mathrm{M}.(1+2q_0\cos 2x+q_0^2)$$
$$\times(1+2q_0^3\cos 2x+q_0^6)(1+2q_0^5\cos 2x+q_0^{10}),\ \ldots,$$
$$\eta_1\left(\frac{2i\mathrm{K}'x}{\pi}\right) = \mathrm{M}\,(1-2q_0\cos 2x+q_0^2)$$
$$\times(1-2q_0^3\cos 2x+q_0^6)(1-2q_0^5\cos 2x+q_0^{10}),\ \ldots,$$

2°
$$\theta\left(\frac{2i\mathrm{K}'x}{\pi}\right) = \mathrm{N}\left(2\sqrt[4]{q_0}\cos x+2\sqrt[4]{q_0^9}\cos 3x+2\sqrt[4]{q_0^{25}}\cos 5x+\ldots\right),$$
$$i\eta\left(\frac{2i\mathrm{K}'x}{\pi}\right) = \mathrm{N}\left(2\sqrt[4]{q_0}\sin x-2\sqrt[4]{q_0^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q_0^{25}}\sin 5x-\ldots\right),$$
$$\theta_1\left(\frac{2i\mathrm{K}'x}{\pi}\right) = \mathrm{N}\,(1+2q_0\cos 2x+2q_0^4\cos 4x+2q_0^9\cos 6x+\ldots),$$
$$\eta_1\left(\frac{2i\mathrm{K}'x}{\pi}\right) = \mathrm{N}\,(1-2q_0\cos 2x+2q_0^4\cos 4x-2q_0^9\cos 6x+\ldots).$$

Le principal intérêt de la seconde forme analytique qui nous est ainsi donnée par les quantités $\theta(x)$, $\eta(x)$, etc., consiste en ce que l'on introduit, au lieu de $\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}$, l'argument imaginaire $\frac{2i\mathrm{K}'x}{\pi}$. En supposant K et K' réels, on a donc sous forme réelle et l'on peut suivre la marche des fonctions, que l'argument soit lui-même réel ou multiplié par $\sqrt{-1}$; bientôt on en verra une application.

Propriétés fondamentales des fonctions Θ et H ; définition de $\sin\mathrm{am}\,x$, $\cos\mathrm{am}\,x$, $\Delta\,\mathrm{am}\,x$.

En employant dans ce qui précède la considération de la fonction

$$\Phi(x) = \sum a_m q^{\frac{m^2}{k}} e^{2m\frac{i\pi x}{a}},$$

pour le cas de $k = 2$, nous avons supposé

$$a = 4\mathrm{K},$$
$$b = 2i\mathrm{K}'.$$

Désormais nous garderons pour périodes ces deux quantités, et nous ferons par suite

$$\Phi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m}\, a_m\, q^{\frac{m^2}{2k}} e^{m\frac{i\pi x}{2\mathrm{K}}},$$

avec la condition

$$a_{m+b} = a_m,$$

ce qui donnera, comme nous l'avons établi, la manière la plus générale de satisfaire par des fonctions entières uniformes aux deux conditions

$$\begin{cases} \Phi(x + \;\; 4\mathrm{K}) = \Phi(x), \\ \Phi(x + 2i\mathrm{K}') = \Phi(x)\, e^{-\frac{k i\pi}{2\mathrm{K}}(x + i\mathrm{K}')}. \end{cases}$$

Cette solution générale renfermera donc pour $k = 4$, par exemple, quatre constantes arbitraires, que l'on mettra en évidence en distinguant ces quatre formes de l'indice m, $m = 4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, ce qui donnera

$$\begin{aligned} \Phi(x) = \quad & a_0 \sum q^{2n^2} e^{2n\frac{i\pi x}{\mathrm{K}}} \\ & + a_1 \sum q^{\frac{(4n+1)^2}{8}} e^{(4n+1)\frac{i\pi x}{2\mathrm{K}}} \\ & + a_2 \sum q^{\frac{(2n+1)^2}{2}} e^{(2n+1)\frac{i\pi x}{\mathrm{K}}} \\ & + a_3 \sum q^{\frac{(4n+3)^2}{8}} e^{(4n+3)\frac{i\pi x}{2\mathrm{K}}}, \end{aligned}$$

ou bien, pour abréger,

$$\Phi(x) = a_0 \Phi_0(x) + a_1 \Phi_1(x) + a_2 \Phi_2(x) + a_3 \Phi_3(x).$$

Par là on voit que, dans le cas où

$$\Phi(x + 2\mathrm{K}) = \Phi(x),$$

la solution est représentée par

$$\Phi(x) = a_0 \Phi_0(x) + a_2 \Phi_2(x),$$

et ne contient plus que deux constantes.

De même, en supposant

$$\Phi(x + 2\mathrm{K}) = -\Phi(x),$$

on aura avec deux constantes arbitraires seulement

$$\Phi(x) = a_1 \Phi_1(x) + a_3 \Phi_3(x).$$

Ainsi nous avons la manière la plus générale de vérifier ces deux systèmes de conditions, savoir :

$$\text{I.} \quad \begin{cases} \Phi(x + \;\; 2\mathrm{K}) = \Phi(x), \\ \Phi(x + 2i\mathrm{K}') = \Phi(x)\, e^{-\frac{2i\pi}{\mathrm{K}}(x + i\mathrm{K}')}, \end{cases}$$

$$\text{II.} \quad \begin{cases} \Phi(x + \;\; 2\mathrm{K}) = -\Phi(x), \\ \Phi(x + 2i\mathrm{K}') = \Phi(x)\, e^{-\frac{2i\pi}{\mathrm{K}}(x + i\mathrm{K}')}. \end{cases}$$

Cela établi, nous remarquons qu'en élevant au carré les deux membres des diverses équations fondamentales de la page 152, les résultats sont précisément de la forme du premier de ces deux systèmes. Nous en tirons cette conséquence, qu'en désignant par a, b, etc., des constantes, on aura

$$\begin{aligned} \Theta^2(x) &= a\,\Phi_0(x) + b\,\Phi_2(x), \\ \mathrm{H}^2(x) &= c\,\Phi_0(x) + d\,\Phi_2(x), \end{aligned}$$

et en changeant x en $x + \mathrm{K}$,

$$\begin{aligned} \Theta_1^2(x) &= a\,\Phi_0(x) - b\,\Phi_2(x), \\ \mathrm{H}_1^2(x) &= c\,\Phi_0(x) - d\,\Phi_2(x). \end{aligned}$$

En second lieu, si l'on multiplie membre à membre, soit les deux premières, soit les deux dernières de ces mêmes équations, c'est à la forme du second système qu'on se trouve amené, par suite on a

$$\Theta(x)\,\mathrm{H}(x) = \mathrm{A}\,\Phi_1(x) + \mathrm{B}\,\Phi_3(x),$$

A et B désignant de nouvelles constantes, et cette relation donne, en y changeant x en $x + \mathrm{K}$, la suivante :

$$\Theta_1(x)\,\mathrm{H}_1(x) = i\mathrm{A}\,\Phi_1(x) - i\mathrm{B}\,\Phi_3(x).$$

De là se tirent, parmi bien d'autres conséquences (1), les relations algébriques et différentielles de nos fonctions.

(1) Notamment la transformation du second ordre.

I. — *Relations algébriques. — Du module et de son complément.*

Deux équations linéaires entre les carrés Θ^2, H^2, Θ_1^2, H_1^2 résultent évidemment des expressions de ces quantités par $\Phi_0(x)$ et $\Phi_2(x)$. L'une d'elles pourra être présentée sous la forme

$$\Theta^2(x) = \alpha H^2(x) + \alpha' H_1^2(x),$$

α et α' désignant des constantes que nous allons déterminer.

Pour cela faisons ces deux hypothèses $x = 0$ et $x = K$; comme on a, d'après les formules de la page 143, $H(0) = 0$, $H_1(K) = 0$, il viendra

$$\alpha = \frac{\Theta^2(K)}{H^2(K)},$$

$$\alpha' = \frac{\Theta^2(0)}{H_1^2(0)}.$$

Mais on introduit au lieu de α et α' les quantités suivantes :

$$k = \frac{H^2(K)}{\Theta^2(K)},$$

$$k' = \frac{\Theta^2(0)}{\Theta^2(K)},$$

et comme la relation

$$H(x + K) = H_1(x)$$

donne

$$H(K) = H_1(0),$$

on aura

$$\alpha = \frac{1}{k}, \qquad \alpha' = \frac{k'}{k},$$

d'où

$$k\Theta^2(x) = H^2(x) + k' H_1^2(x).$$

Cette première relation obtenue, la seconde en résulte en y changeant x en $x + iK'$; si l'on emploie à cet effet les formules données page 143, il viendra, en supprimant le facteur exponentiel,

$$-kH^2(x) = -\Theta^2(x) + k'\Theta_1^2(x),$$

ou bien

$$\Theta^2(x) = kH^2(x) + k'\Theta_1^2(x).$$

Ces deux équations représentent d'ailleurs toutes les relations algébriques possibles entre nos quatre fonctions; elles conduisent

à la notion des quantités que nous avons désignées par k et k', et dont les racines carrées s'expriment en série de cette manière :

$$\sqrt{k} = \frac{H(K)}{\Theta(K)} = \frac{2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + 2\sqrt[4]{q^{49}} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots},$$

$$\sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta(K)} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots}.$$

La première, k, s'appelle le module de $\Theta(x)$, $H(x)$, $\Theta_1(x)$, $H_1(x)$, et la seconde, k', le complément du module. Considérées par rapport à q, ou plutôt en faisant

$$q = e^{i\pi\omega},$$

par rapport à la variable ω, ces quantités constituent un genre de fonctions analytiques entièrement nouvelles et de la plus haute importance parmi les fonctions d'une seule variable. C'est principalement en Algèbre, dans la théorie des équations, et en Arithmétique, dans la théorie des formes quadratiques à deux indéterminées, que la considération de ces fonctions a suggéré d'elle-même des points de vue tout nouveaux et ouvert des voies fécondes, où ont été obtenus les plus intéressants résultats. Les bornes de cette Note ne nous permettent pas d'entrer dans ce champ déjà si étendu de belles recherches, mais ce que nous dirons à l'égard des fonctions Θ, H, etc. servira de préparation suffisante pour lire les Mémoires spéciaux qui y sont consacrés. C'est de ces fonctions, en effet, étudiées à la fois par rapport à x et ω, que découle tout ce qui concerne k et k' qui contiennent seulement ω, et il ne semble pas possible, dans l'état actuel de nos connaissances en Analyse, d'arriver à toutes leurs propriétés en partant uniquement de leur définition comme quotient des séries données précédemment [1].

---

[1] Poisson et M. Cauchy sont arrivés, par deux méthodes différentes, à cette identité :

$$\sqrt{-i\omega}\,(1 + 2e^{i\pi\omega} + 2e^{4i\pi\omega} + 2e^{9i\pi\omega} + \ldots)$$
$$= \left(1 + 2e^{-\frac{i\pi}{\omega}} + 2e^{-4\frac{i\pi}{\omega}} + 2e^{-9\frac{i\pi}{\omega}} + \ldots\right),$$

qui conduit à des propriétés fondamentales des modules considérés comme fonction de ω. Mais il n'est possible de tirer de là que la transformation pour le premier ordre, et aucune autre voie pour parvenir aux *équations modulaires* ne s'est encore offerte que celle qui a été donnée par les fondateurs de la théorie des fonctions elliptiques.

On se rendra compte, jusqu'à un certain point, de cette difficulté, en observant que k et k' n'existent comme fonctions de ω qu'autant qu'en supposant cette variable imaginaire et de la forme

$$\omega = \alpha + i\beta,$$

β est *essentiellement différent de zéro et positif*. Ce sont donc véritablement des parties de fonctions qui, dès lors, échappent à beaucoup des méthodes les plus habituellement employées. Ainsi, il n'existe pas pour k et k' de développement suivant les puissances de ω, et si l'on fait

$$\omega = \omega_0 + h$$

pour pouvoir employer la série de Taylor, voici encore les circonstances particulières qui viennent s'offrir. Les quantités k et k' sont déterminables par la résolution d'une équation numérique, pour une infinité de valeurs de ω, telles que

$$\omega_0 = \frac{A + \sqrt{-B}}{C},$$

A, B, C étant entiers, et B essentiellement positif; mais, si l'emploi de ces valeurs initiales, en faisant $\omega = \omega_0 + h$, donne pour premier terme des séries une simple irrationnelle numérique, les termes suivants sont nécessairement des transcendantes. Ainsi, par exemple, pour $\omega_0 = i$, on aura

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad k' = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

et, en prenant $\omega = i + h$, ce sera l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$$

qui entrera dans tous les coefficients des développements de k et k', suivant les puissances croissantes de h. On voit par là combien on est éloigné des séries qui définissent les transcendantes simples, où les coefficients sont toujours commensurables. Mais, sans nous étendre plus longuement là-dessus, et pour revenir à ce

qui concerne notre sujet, nous allons justifier les dénominations de module et de son complément, données à k et k', en démontrant cette égalité

$$k^2 + k'^2 = 1.$$

Les deux relations que nous avons obtenues sont

$$\begin{cases} k\Theta^2(x) = \mathrm{H}_2(x) + k'\mathrm{H}_1^2(x), \\ \Theta^2(x) = k\,\mathrm{H}^2(x) + k'\,\Theta_1^2(x). \end{cases}$$

Faisons dans la seconde $x = \mathrm{K}$, après avoir divisé les deux membres par $\Theta^2(x)$, en remarquant qu'on a

$$\Theta_1(x + \mathrm{K}) = \Theta(x),$$

et, par suite,

$$\Theta_1(\mathrm{K}) = \Theta(0),$$

on trouvera précisément l'égalité qu'il fallait démontrer.

Il en résulte cette relation entre les séries infinies

$$\begin{aligned} &(2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + 2\sqrt[4]{q^{49}} + \ldots)^4 \\ &+ (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots)^4 \\ &= (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots)^4, \end{aligned}$$

qu'il est extrêmement facile d'établir directement à l'aide des propositions arithmétiques connues sur la décomposition des nombres entiers en quatre carrés. Mais, laissant encore de côté ces questions, nous allons compléter ce qui concerne la définition même de k et k' dont nous avons obtenu les racines carrées comme fonctions uniformes et bien déterminées de ω. Jacobi a fait voir que les racines quatrièmes possèdent la même propriété en donnant les formules remarquables que nous réunissons ici :

1. $$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1 - q^4 - q^8 + q^{20} + \ldots}{1 + q - q^2 - q^5 - \ldots}$$

2. $$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \ldots}{1 + q + q^3 + q^6 + \ldots}$$

3. $$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1 - q - q^3 + q^6 + \ldots}{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} - \ldots}$$

4. $$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1 + q + q^3 + q^6 + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots}.$$

Les lois de ces séries sont données par ces formules où le signe $\sum$ s'étend à toutes les valeurs de l'indice n de $-\infty$ à $+\infty$, savoir :

$$1.\qquad \sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum (-1)^n q^{6n^2+2n}}{\sum (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} q^{\frac{3n^2+n}{2}}}$$

$$2.\qquad = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum q^{4n^2+2n}}{\sum q^{2n^2+n}}$$

$$3.\qquad = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum (-1)^n q^{2n^2+n}}{\sum (-1)^n q^{2n^2}}$$

$$4.\qquad = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum q^{2n^2+n}}{\sum q^{n^2}}.$$

En second lieu, et pour le complément du module, on a

$$1.\qquad \sqrt[4]{k'} = \frac{1-q-q^2+q^5+q^7-\ldots}{1+q-q^2-q^5-q^7-\ldots}$$

$$2.\qquad = \frac{1-q-q^3+q^6+q^{10}-\ldots}{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\ldots}$$

$$3.\qquad = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\ldots}{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\ldots}$$

$$4.\qquad = \frac{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\ldots}$$

ou, en mettant en évidence les termes généraux,

$$1.\qquad \sqrt[4]{k'} = \frac{\sum (-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}}}{\sum (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} q^{\frac{3n^2+n}{2}}}$$

$$2.\qquad = \frac{\sum (-1)^n q^{2n^2+n}}{\sum q^{2n^2+n}}$$

$$3.\qquad \sqrt[4]{k'} = \frac{\sum (-1)^n q^{n^2}}{\sum (-1)^n q^{2n^2}}$$

$$4.\qquad = \frac{\sum (-1)^n q^{2n^2}}{\sum q^{n^2}}.$$

La quantité $\sqrt[4]{kk'}$ qui joue aussi un rôle important est donnée par le développement de forme semblable aux précédents :

$$\sqrt[4]{kk'} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum (-1)^i q^{2i^2+i}}{\sum q^{i^2}}.$$

II. — *Définition de* $\sin \operatorname{am} x$, $\cos \operatorname{am} x$, $\Delta \operatorname{am} x$. *Équations différentielles.*

Posons

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)},\\ v &= \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)},\\ w &= \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}.\end{aligned}\right.$$

Les relations algébriques obtenues précédemment, et qui sont homogènes par rapport aux quatre fonctions, donneront

$$u^2 + v^2 = 1,$$
$$k^2 u^2 + w^2 = 1.$$

La première conduit à représenter u par un sinus, v par un cosinus; c'est ce qu'a fait Jacobi, et, en adoptant les notations de l'illustre géomètre, nous poserons

$$u = \sin \operatorname{am} x,$$
$$v = \cos \operatorname{am} x,$$
$$w = \Delta \operatorname{am} x.$$

Le sinus, le cosinus et le Δ de l'amplitude de la variable x seront ainsi les trois fonctions doublement périodiques fondamentales. Nous voici amenés maintenant au point en quelque sorte le plus essentiel de la théorie, où l'on a pour but de les définir par trois équations différentielles.

Considérons à cet effet la dérivée de u, à savoir :

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}'(x)\Theta(x) - \mathrm{H}(x)\Theta'(x)}{\Theta^2(x)} = \frac{\Phi(x)}{\Theta^2(x)}.$$

Cette dérivée, comme la fonction elle-même, admet la période $2i\mathrm{K}'$ et ne fait que changer de signe lorsqu'on change x en $x+2\mathrm{K}$; ayant donc pour le numérateur la valeur

$$\Phi(x) = \Theta^2(x)\frac{du}{dx},$$

on tirera immédiatement des relations

$$\begin{aligned}\Theta^2(x+2\mathrm{K}) &= \Theta^2(x),\\ \Theta^2(x+2i\mathrm{K}') &= \Theta^2(x)\,e^{-2\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')},\end{aligned}$$

auxquelles donne lieu le dénominateur, celles-ci :

$$\begin{aligned}\Phi(x+2\mathrm{K}) &= \Phi(x),\\ \Phi(x+2i\mathrm{K}') &= \Phi(x)\,e^{-2\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')}.\end{aligned}$$

Or, d'après ce qui a été précédemment établi (p. 160 et 161), on a

$$\Phi(x) = a_1\Phi_1(x) + a_3\Phi_3(x) = m\,\Theta(x)\,\mathrm{H}(x) + m_1\,\Theta_1(x)\,\mathrm{H}_1(x),$$

m et m_1 désignant des constantes. Observant donc que u change de signe avec x, et que, par suite, $\frac{du}{dx}$ est une fonction paire, on voit que la partie impaire $m\Theta(x)\mathrm{H}(x)$ doit disparaître; ainsi $m = 0$, et l'on a simplement

$$\Phi(x) = m_1\Theta_1(x)\,\mathrm{H}_1(x).$$

En divisant par $\Theta^2(x)$ et faisant

$$\frac{m_1\sqrt{k}}{k'} = \mu,$$

il viendra

$$\frac{du}{dx} = \mu v w = \mu\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}.$$

Cette constante μ représente, puisque la fonction u s'évanouit avec x, la limite du rapport $\frac{\sin \operatorname{am} x}{x}$ pour $x = 0$, limite qui dépend en général des quantités K et K'. Mais nous avons précédemment remarqué que l'expression des fonctions $\Theta(x)\,\mathrm{H}(x)$ ne changeait pas en y remplaçant x, K, K' par $\frac{x}{\mu}$, $\frac{\mathrm{K}}{\mu}$, $\frac{\mathrm{K}'}{\mu}$, et que cette circonstance serait utilisée pour particulariser d'une certaine manière les périodes. D'après cela, nous allons introduire une relation qui aura pour effet de rendre égale à l'unité la limite $\frac{\sin \operatorname{am} x}{x}$, afin de rapprocher en ce point essentiel le sinus d'amplitude du sinus trigonométrique. Ayant

$$\frac{\sin \operatorname{am}(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2\sqrt[4]{q}\,\frac{1}{x}\sin\frac{\pi x}{2\mathrm{K}}\left(1-2q^2\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}}+q^4\right)\left(1-2q^4\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}}+q^8\right)\cdots}{\left(1-2q\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}}+q^2\right)\left(1-2q^3\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}}+q^6\right)\cdots},$$

nous ferons, pour $x = 0$,

$$1 = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\pi}{\mathrm{K}}\cdot\frac{\sqrt[4]{q}\,(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\cdots}{(1-q)^2(1-q^3)^2(1+q^5)^2},$$

ou bien

$$\frac{\sqrt{k}\,\mathrm{K}}{\pi} = \sqrt[4]{q}\left[\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots}\right]^2.$$

Ainsi, en admettant que les quantités K et K' vérifient cette condition, nous aurons

$$\frac{du}{dx} = vw;$$

c'est la première des relations différentielles que nous voulions établir. Les autres en découlent à l'aide des équations

$$\begin{aligned}u^2 + v^2 &= 1,\\ k^2u^2 + w^2 &= 1,\end{aligned}$$

et sont

$$\left\{\begin{aligned}\frac{dv}{dx} &= -uw,\\ \frac{dw}{dx} &= -k^2uv.\end{aligned}\right.$$