SUR QUELQUES THÉORÈMES D'ALGÈBRE

ET LA

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XLVI, 1858 (I), p. 961.

On sait que toute équation $f(x)=0$ peut être transformée en une autre du même degré en y par la substitution $y=\varphi(x)$, où φx désigne une fonction rationnelle. Ce procédé de transformation, qui est si fréquemment employé en Algèbre, va nous servir pour ramener l'équation générale du quatrième degré aux équations particulières qui ont été considérées dans un précédent article, et dont j'ai exprimé les racines au moyen des fonctions elliptiques. Mais, en raison de son importance, et notamment de son application à la résolution de l'équation du cinquième degré, ce mode de transformation m'a paru demander une étude nouvelle, et je commencerai d'abord par en donner les résultats.

Soit

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots+gx^2+hx+k=0$$

l'équation proposée; l'expression la plus générale de φx sera, comme on le sait, une fonction entière du degré $n-1$, savoir :

$$\varphi(x)=t+t_0x+t_1x^2+\dots+t_{n-2}x^{n-1}.$$

Cela posé, en représentant la transformée en y par

$$y^n+p_1y^{n-1}+p_2y^{n-2}+\dots+p_n=0,$$

l'un quelconque des coefficients, tel que p_i, sera une fraction ayant pour dénominateur $a^{(n-1)i}$, et pour numérateur une fonction entière,

homogène, de degré i par rapport à $t, t_0, t_1, \dots, t_{n-2}$, et de degré $(n-1)i$ par rapport aux coefficients $a, b, \dots, h, k$. Ce degré si élevé rend en quelque sorte impraticable le calcul de l'équation en y; aussi ce qui a été obtenu de plus important par la considération de cette transformée, en particulier le théorème de M. Jerrard sur l'équation du cinquième degré, ne semble établi qu'à titre de possibilité, en raison de l'excessive complication des opérations nécessaires pour parvenir à un résultat effectif. Mais on peut surmonter ces difficultés par la proposition suivante :

Soit

$$\begin{aligned} t &= a\mathrm{T}+b\mathrm{T}_0+\dots+g\mathrm{T}_{n-3}+h\mathrm{T}_{n-2},\\ t_0 &= a\mathrm{T}_0+b\mathrm{T}_1+\dots+g\mathrm{T}_{n-2},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ t_{n-3} &= a\mathrm{T}_{n-3}+b\mathrm{T}_{n-2},\\ t_{n-2} &= a\mathrm{T}_{n-2}. \end{aligned}$$

Cette substitution effectuée dans la fonction p_i la changera en une fonction P_i du même degré par rapport aux indéterminées nouvelles $\mathrm{T}, \mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \dots, \mathrm{T}_{n-2}$, mais débarrassée de tout dénominateur, et du degré i seulement par rapport aux coefficients $a, b, \dots, h, k$. De plus, P_n sera divisible par a, de sorte que $\frac{1}{a}\mathrm{P}_n$ ne sera que du degré $n-1$ par rapport à ces coefficients.

Cette proposition, très facile à établir, conduit à la véritable forme analytique qu'il est convenable de donner à la fonction $\varphi(x)$, de sorte que désormais la formule de transformation sera ainsi représentée :

$$y=\varphi(x)=\begin{array}{r|r|r|l} a\mathrm{T}+ax & \mathrm{T}_0+ax^2 & \mathrm{T}_1+\dots+ax^{n-1} & \mathrm{T}_{n-2}\\ +b & +bx & +bx^{n-2} & \\ & +c & \vdots & \\ & & +h & \end{array}$$

et l'équation transformée par

$$y^n+\mathrm{P}_1y^{n-1}+\mathrm{P}_2y^{n-2}+\dots+\mathrm{P}_n=0,$$

tous les coefficients étant des fonctions entières de ceux de $f(x)$.

Une autre conséquence résulte encore de l'introduction des variables $\mathrm{T}, \mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \dots, \mathrm{T}_{n-2}$. On sait de combien de travaux a été l'objet la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées, et combien de notions analytiques importantes cette étude a données à l'Algèbre. Par exemple, ces fonctions désignées sous le nom d'*invariants*, en raison même de la propriété qui leur sert de définition, de se reproduire dans toutes les transformées par des substitutions linéaires, donnent les éléments qui caractérisent les propriétés essentielles des racines des équations algébriques, celles qui subsistent dans ces diverses transformées [1]. D'autre part, la connaissance acquise de ces fonctions, et de celles qu'on nomme *covariants*, permet, dans beaucoup de circonstances, d'obtenir sans efforts le résultat de longs calculs qui, sans leur emploi immédiat, n'eussent au fond servi qu'à les mettre en évidence, ou à faire ressortir dans une question spéciale l'une des propriétés dont on possède maintenant la signification la plus étendue. Mais tant de beaux résultats, dont la Science est surtout redevable aux travaux des savants géomètres anglais MM. Cayley et Sylvester, semblent ne pouvoir être utilisés lorsqu'on sort de la comparaison des équations par des substitutions linéaires de la forme

$$(1) \qquad x = \frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta}, \qquad \text{ou bien} \qquad X = \frac{\delta x - \beta}{\alpha - \gamma x},$$

pour considérer, comme nous le faisons ici, les substitutions les plus générales. Effectivement, aucune combinaison rationnelle des coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ne fait apparaître les covariants de l'équation proposée; mais, comme nous allons voir, il arrive que ces quantités se manifestent, au contraire, immédiatement par l'introduction des variables $T, T_0, T_1, \ldots, T_{n-2}$. C'est ce qui résulte de la proposition suivante :

Soit

$$F(X) = (\gamma X + \delta)^n f\left(\frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta}\right) = AX^n + BX^{n-1} + \ldots + HX + K = 0$$

la transformée par la substitution (1) *de l'équation proposée,*

---

(1) Par exemple, les conditions qui déterminent le nombre des racines réelles et imaginaires dans les équations à coefficients réels dépendent uniquement des invariants, sauf le cas du quatrième degré. J'ai donné ces conditions, indépendamment du théorème de M. Sturm, pour les équations du cinquième degré, dans un Mémoire sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées. (*Cambridge and Dublin mathematical Journal,* année 1854.)

et représentons l'expression analogue à $\varphi(x)$, *mais relative à cette équation, par*

$$\Phi(X) = A\mathfrak{t} + AX \,\Big|\, \mathfrak{t}_0 + AX^2 \,\Big|\, \mathfrak{t}_1 + \ldots + AX^{n-1} \,\Big|\, \mathfrak{t}_{n-2}$$
$$\begin{array}{lll} +B & +BX & +BX^{n-2} \\ & +C & \vdots \\ & & +H \end{array}$$

on pourra immédiatement obtenir Φ, *en faisant dans* φ, *en premier lieu :*

$$(2) \qquad \begin{cases} T_0 \;\;\;= (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha + \beta\mathfrak{t})^{n-2}, \\ T_1 \;\;\;= (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha + \beta\mathfrak{t})^{n-3}(\gamma + \delta\mathfrak{t}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_i \;\;\;= (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha + \beta\mathfrak{t})^{n-2-i}(\gamma + \delta\mathfrak{t})^i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_{n-2} = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\gamma + \delta\mathfrak{t})^{n-2}, \end{cases}$$

sous la condition qu'après les développements on remplace $\mathfrak{t}^i$ *par* $\mathfrak{t}_i$, *de manière à parvenir à des expressions linéaires en* $\mathfrak{t}_0, \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_{n-2}$; *en second lieu, et pour ce qui concerne* T, *la valeur à substituer se déduira de la relation*

$$naT + (n-1)bT_0 + (n-2)cT_1 + \ldots + 2gT_{n-3} + hT_{n-2}$$
$$= nA\mathfrak{t} + (n-1)B\mathfrak{t}_0 + (n-2)C\mathfrak{t}_1 + \ldots + 2G\mathfrak{t}_{n-3} + H\mathfrak{t}_{n-2}.$$

On remarquera la liaison qu'établit cette proposition entre les deux groupes d'indéterminées $T_0, T_1, \ldots, T_{n-2}, \mathfrak{t}_0, \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_{n-2}$, et le rôle entièrement séparé de l'indéterminée T. Ces relations (2), indépendantes des coefficients $a, b, \ldots, g, h$, représentent précisément ce que M. Sylvester a nommé une substitution *congrédiente* avec la substitution binaire

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \alpha x' + \beta y', \\ y = \gamma x' + \delta y', \end{cases}$$

et le sens qu'on doit attacher à cette expression se trouvera nettement fixé par cette proposition :

Désignons respectivement par S *et* (S) *les substitutions* (3) *et* (2); *si l'on obtient* S *en composant deux substitutions analogues* S', S'', *de sorte qu'on ait*

$$S = S'S'',$$

la substitution (S) *sera de même composée de deux autres, et, si l'on représente par* (S′) *et* (S″) *les substitutions déduites de* S′ *et* S″, *d'après la même loi que* (S) *de* S, *on aura la relation*

$$(\mathrm{S}) = (\mathrm{S}')(\mathrm{S}'').$$

De là résulte que toute fonction des quantités $P_1, P_2, \ldots, P_n$, indépendante de T, par exemple toutes les fonctions symétriques des différences des racines y, seront, par rapport à $T_0, T_1, \ldots, T_{n-2}$, des covariants de la fonction homogène $y^n f\left(\frac{x}{y}\right)$. Telles seront en particulier les quantités

$$(n-1)P_1^2 - 2nP_2, \quad (n-1)(n-2)P_1^3 - 3n(n-2)P_1P_2 + 3n^2P_3, \text{ etc.}$$

qui jouent le principal rôle dans les recherches que j'espère pouvoir bientôt communiquer à l'Académie sur la réduction de l'équation du cinquième degré à la forme obtenue par M. Jerrard. Mais, en ce moment, c'est aux équations du quatrième degré que je vais appliquer ces considérations, afin de les réduire à la forme

$$(4) \qquad x^4 - 6Sx^2 - 8Tx - 3S^2 = 0,$$

et par là d'en conclure les expressions de leurs racines au moyen des fonctions elliptiques. Je me fonderai à cet effet sur cette remarque que, dans cette équation, comme celles de la théorie des fonctions elliptiques auxquelles elle a été comparée, savoir :

$$v^4 + 2u^3v^3 - 2uv - u^4 = 0$$

et

$$z^4 - 6z^2 - 8(1 - 2k^2)z - 3 = 0,$$

l'invariant quadratique est nul. Or toute équation du quatrième degré

$$Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E = 0,$$

où l'on suppose cette quantité

$$I = AE - 4BD + 3C^2 = 0,$$

devient, en y remplaçant x par $\frac{x - B}{A}$,

$$x^4 - 6(B^2 + AC)x^2 + 4(A^2D - 3ABC + 2B^3)x - 3(B^2 - AC)^2 = 0;$$

ce qui est bien la forme de l'équation (4). Étant donc proposée l'équation générale

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

essayons de déterminer la substitution

$$y = \varphi(x) = a\mathrm{T} + \begin{array}{l|l|l|l} ax & \mathrm{T}_0 + ax^2 & \mathrm{T}_1 + ax^3 & \mathrm{T}_2, \\ +4b & \quad +4bx & \quad +4bx^2 & \\ & \quad +6c & \quad +6cx & \\ & & \quad +4d & \end{array}$$

de manière que, dans la transformée que nous écrirons ainsi

$$y^4 + 4P_1y^3 + 6P_2y^2 + 4P_3y + P_4 = 0,$$

l'invariant quadratique soit égal à zéro. On devra poser

$$P_4 - 4P_1P_3 + 3P_2^2 = 0,$$

relation du quatrième degré par rapport à T_0, T_1, T_2 ; mais, ce qui justifie précisément le mode de réduction que nous avons en vue, c'est qu'elle se décompose en deux facteurs, de sorte qu'en posant

$$\mathfrak{f} = aT_0^2 + 4cT_1^2 + eT_2^2 + 4dT_1T_2 + 2cT_0T_2 + 4bT_0T_1,$$
$$I = ae - 4bd + 3c^2,$$
$$J = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3,$$

on aura l'une ou l'autre de ces équations du second degré seulement

$$I\mathfrak{f} + \left(6J + \frac{2}{\sqrt{-3}}\sqrt{I^3 - 27J^2}\right)(T_0T_2 - T_1^2) = 0,$$

$$I\mathfrak{f} + \left(6J - \frac{2}{\sqrt{-3}}\sqrt{I^3 - 27J^2}\right)(T_0T_2 - T_1^2) = 0.$$

On pourra donc, et d'une infinité de manières, en s'adjoignant de simples racines carrées, déterminer une substitution qui ramène toute équation de quatrième degré à l'équation (4), dont les racines ont été exprimées par les fonctions elliptiques. Et l'on remarquera que $\mathfrak{f}$ est bien un covariant de la forme

$$f = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4,$$

car cette quantité peut s'obtenir en remplaçant, dans l'expression

$$\xi^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + 2\xi\eta \frac{d^2 f}{dx\, dy} + \eta^2 \frac{d^2 f}{dy^2},$$

x^2, xy, y^2 d'une part, $\xi^2, \xi\eta, \eta^2$ de l'autre, respectivement par T_0, T_1, T_2; d'ailleurs I et J sont les deux invariants et $I^3 - 27 J^2$ le discriminant.

Mais il est une autre équation que présente la théorie de la transformation du troisième ordre et à laquelle on pourrait, par une substitution de la forme $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, ramener également toute équation du quatrième degré. Soit, en général, pour un ordre quelconque n,

$$U = \sqrt[4]{kk'}, \qquad V = \sqrt[4]{\lambda\lambda'};$$

en partant des expressions données dans les *Fundamenta* pour λ et λ', et d'où l'on tire

$$V = U^n \frac{\sin \operatorname{coam} 2\omega . \sin \operatorname{coam} 4\omega, \ldots, \sin \operatorname{coam}(n-1)\omega}{\Delta \operatorname{am} 2\omega . \Delta \operatorname{am} 4\omega, \ldots, \Delta \operatorname{am}(n-1)\omega},$$

le P. Joubert a fait la remarque importante que les fonctions rationnelles symétriques des diverses valeurs de V qui correspondent à toutes les déterminations de ω, ne dépendent que du produit du module par son complément, de sorte qu'il existe entre V et U une équation de degré $n+1$, analogue pour plusieurs propriétés essentielles [1] à l'équation modulaire entre v et u. Par exemple, pour $n = 3$, $n = 5$, $n = 7$, le calcul effectué par le P. Joubert donne les relations

$$\begin{aligned}
&V^4 - 4U^3V^3 + 2UV + U^4 = 0,\\
&V^6 - 16U^5V^5 + 15U^2V^4 + 15U^4V^2 + 4UV + U^6 = 0,\\
&V^8 - 64U^7V^7 + 7.48U^6V^6 - 7.96U^5V^5 + 7.94U^4V^4\\
&\quad - 7.48U^3V^3 + 7.12U^2V^2 - 8UV + U^8 = 0.
\end{aligned}$$

C'est la première qui pourrait servir à l'objet que nous indiquons; mais je me bornerai, en terminant cette Note, à montrer qu'elle donne un nouvel exemple de ce rapprochement que j'ai essayé de

[1] Ces propriétés seront l'objet d'un prochain article.

faire ressortir, entre la théorie de la transformation pour le troisième ordre et celle des formes cubiques à trois indéterminées. Effectivement, le paramètre l qui figure dans la transformée canonique

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6lxyz$$

dépend des invariants S et T, ou plutôt de S et S_1 par l'équation

$$\frac{l^4 - l}{8l^3 + 1} = \frac{1}{4}\frac{S}{S_1}.$$

Or il suffit, en introduisant une seule indéterminée, de poser $l = \rho V$ pour la ramener à la relation entre V et U. De là résulte qu'en prenant pour module

$$k^2 = \frac{T + \sqrt{S^3}}{2\sqrt{S^3}},$$

et posant, pour abréger,

$$\varphi = \frac{4}{3}(mK + m'iK'),$$

on a ces expressions des trois quantités δ, Δ et l, savoir :

$$\delta = \sqrt{S}\,\frac{\sin^2 \operatorname{am}\varphi}{\sin^2 \operatorname{coam}\varphi}, \qquad \Delta = \frac{1}{2}\sqrt{S}\,\frac{1 + \cos^2 \operatorname{am}\varphi}{\sin^2 \operatorname{am}\varphi}, \qquad l = -\frac{S}{S_1}\,\frac{\Delta \operatorname{am}\varphi}{\sin \operatorname{coam}\varphi}.$$

Dans ces formules m et m' peuvent être pris égaux à deux nombres entiers quelconques, pourvu qu'on ne les suppose pas en même temps nuls ou divisibles par 3.

SUR

LA THÉORIE DES ÉQUATIONS MODULAIRES.

C. R., t. XLVIII, 1859 (I), p. 940-1079-1096;
t. XLIX, 1859 (II), p. 16-110-141.

On connaît toute l'importance dans la théorie des équations algébriques de cette fonction des coefficients à laquelle a été donné le nom de *discriminant*, et qui représente le produit symétrique des carrés des différences des racines. Aussi les géomètres ont-ils recherché, surtout dans ces derniers temps, les méthodes les plus propres à en abréger le calcul. Mais, dans les applications à une équation donnée, ces méthodes générales sont le plus souvent impraticables en raison des opérations laborieuses qu'elles exigent. C'est cette difficulté qui m'a longtemps arrêté pour former la réduite du onzième degré de l'équation modulaire du douzième, la fonction des racines que j'ai employée pour effectuer l'abaissement conduisant dans les trois cas du sixième, du huitième et du douzième degré à calculer le discriminant de ces équations. J'ai donc essayé d'étudier en général le discriminant des équations modulaires, en prenant pour point de départ les expressions des racines sous forme transcendante, dans l'espérance d'arriver à un calcul qui pût être effectué au moins dans le cas que j'avais en vue. J'y suis effectivement parvenu, et j'ai vu en même temps cette recherche conduire, par une voie aussi simple que naturelle, à d'importantes notions arithmétiques et à des propositions qu'on ne trouvera pas, j'espère, sans intérêt, sur les sommes de nombres de classes de formes quadratiques, dont les déterminants suivent une certaine loi. M. Kronecker a déjà donné dans les *Comptes rendus de l'Académie de Berlin* (séance du

29 octobre 1857) les énoncés de plusieurs beaux théorèmes de cette nature; ceux que je vais établir dans cette Note et qui, si je ne me trompe, tiennent à d'autres principes, contribueront, je pense, avec les propositions dues à cet illustre géomètre, à jeter un nouveau jour sur une des plus importantes théories de l'Arithmétique, en la rattachant par de nouveaux liens à l'Algèbre et à l'Analyse transcendante.

I.

Soit n un nombre premier et $\Theta(v, u) = 0$ l'équation modulaire de degré $n+1$; en faisant, pour abréger, $\varepsilon = \left(\frac{2}{n}\right)$, on trouve très aisément que le produit des carrés des différences des racines v, prises deux à deux, et que je désignerai par D, a la forme suivante :

$$D = u^{n+1}(1-u^8)^{n+\varepsilon}(a_0 + a_1 u^8 + a_2 u^{16} + \ldots + a_\nu u^{8\nu}),$$

le polynome $a_0 + a_1 u^8 + \ldots$ étant réciproque, c'est-à-dire que $a_i = a_{\nu-i}$, et ne contenant ni le facteur u, ni le facteur $1-u^8$; quant au nombre ν, il a pour valeur

$$\nu = \frac{n^2-1}{4} - (n+\varepsilon).$$

Cela posé, je vais en premier lieu établir que D est un carré parfait. Je me fonderai pour cela sur la relation importante donnée par Jacobi, entre le multiplicateur M, le module proposé et le module transformé, savoir :

$$M^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{\lambda(1-\lambda^2)}{k(1-k^2)} \cdot \frac{dk}{d\lambda}.$$

En posant

$$\frac{d\Theta}{dv} = \theta(v, u), \qquad \frac{d\Theta}{du} = \mathfrak{I}(v, u).$$

de sorte qu'on ait, en vertu de l'équation modulaire.

$$\frac{du}{dv} = -\frac{\theta(v, u)}{\mathfrak{I}(v, u)},$$

cette relation, si l'on introduit u et v au lieu de $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{\lambda}$, deviendra

$$M^2 = -\frac{1}{n}\,\frac{v(1-v^8)\theta(v, u)}{u(1-u^8)\mathfrak{S}(v, u)}.$$

D'ailleurs, les valeurs correspondantes de v et de M sont, comme on sait,

$$v = u^n[\sin\operatorname{coam} 2\rho \sin\operatorname{coam} 4\rho \ldots \sin\operatorname{coam}(n-1)\rho],$$

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{\sin\operatorname{coam} 2\rho \sin\operatorname{coam} 4\rho \ldots \sin\operatorname{coam}(n-1)\rho}{\sin\operatorname{am} 2\rho \sin\operatorname{am} 4\rho \ldots \sin\operatorname{am}(n-1)\rho}\right]^2,$$

de sorte qu'en faisant

$$\rho = \frac{K}{n}, \quad \frac{iK'}{n}, \quad \frac{K+iK'}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{(n-1)K+iK'}{n},$$

on obtiendra simultanément les $n+1$ valeurs de M et les $n+1$ racines $v_0, v_1, \ldots, v_n$ de l'équation modulaire. Or les équations entre M et k ont pour coefficients des fonctions entières de k, celui de la plus haute puissance de M étant l'unité, et le dernier la constante numérique $\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}$, de manière que le multiplicateur ne peut jamais devenir nul ou infini pour une valeur finie de k. Cette propriété importante, qui est due au P. Joubert, montre que les valeurs de v et u, qui satisfont à l'équation modulaire et à sa dérivée $\theta(v, u) = 0$, annulent nécessairement aussi le dénominateur de M et, par suite, $\mathfrak{S}(v, u)$, si l'on exclut les cas limites, $u = 0$, $u^8 = 1$, auxquels correspondent, comme on sait, $v = 0$, $v^8 = 1$. Cette restriction faite, on peut conclure que toutes les autres solutions simultanées des équations $\Theta(v, u) = 0$, $\theta(v, u) = 0$ sont doubles; elles annulent, en effet, la déterminante fonctionnelle

$$\frac{d\Theta}{dv}\cdot\frac{d\theta}{du} - \frac{d\Theta}{du}\cdot\frac{d\theta}{dv} = \theta\frac{d\theta}{du} - \mathfrak{S}\frac{d\theta}{dv},$$

car, à cause de l'équation $\theta = 0$, cette déterminante contient le facteur $\mathfrak{S}(v, u)$. C'est dire que tous les facteurs du discriminant, autres que u et $1-u^8$, y entrent au carré, d'où résulte que le polynome $a_0 + a_1 u^8 + \ldots$, qui ne contient pas ces facteurs et, par suite, le discriminant lui-même, est un carré parfait. A la vérité pourrait-on demander en toute rigueur de démontrer qu'il ne renferme pas de facteurs triples ou élevés à une puissance impaire. Mais ce point sera lui-même complètement établi plus tard, à l'aide d'une remarque que je dois encore placer ici. Multiplions membre à membre les $n+1$ équations qu'on déduit de la relation

$$M^2 = -\frac{1}{n}\,\frac{v(1-v^8)\theta(v, u)}{u(1-u^8)\mathfrak{S}(v, u)},$$

en y remplaçant successivement v par toutes les racines de l'équation modulaire. Comme le produit des valeurs de M est $\pm\frac{1}{n}$, on trouvera, en employant, pour abréger, le signe de multiplication Π,

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^{n+1}}\,\frac{\Pi v(1-v^8)}{u^{n+1}(1-u^8)^{n+1}}\,\frac{\Pi\theta(v, u)}{\Pi\mathfrak{S}(v, u)}.$$

Mais on sait que

$$\Pi v = \varepsilon u^{n+1};$$

on en conclut [1] que

$$\Pi(1-v^8) = (1-u^8)^{n+1},$$

et il vient par conséquent

$$\Pi\mathfrak{S}(v, u) = \frac{\varepsilon}{n^{n-1}}\,\Pi\theta(v, u).$$

Or, au signe près, $\Pi\theta(v, u)$ est le discriminant, et cette relation montre qu'on peut le considérer comme provenant de l'élimination de v, entre les équations

$$\Theta(v, u) = 0, \qquad \mathfrak{S}(v, u) = 0,$$

la seconde étant la dérivée $\frac{d\Theta}{dv}$. Cela posé, faisons le changement de v en u, et de u en εv; d'après une propriété fondamentale des équations modulaires, Θ ne changera pas, $\frac{d\Theta}{dv} = 0$ deviendra par conséquent $\frac{d\Theta}{dv} = 0$, et le discriminant, lorsqu'on y aura mis εv au lieu de u, représentera le résultat de l'élimination de u entre les

(1) Il suffit pour cela de poser $u = \varphi(\omega)$, puis de changer ω en $-\frac{1}{\omega}$, et d'élever les deux membres à la puissance huitième, les racines $v_0, v_1, \ldots$ étant ainsi devenues : $\sqrt[8]{1-v_0^8}$, $\sqrt[8]{1-v_1^8}$, etc.

équations

$$\Theta = 0, \qquad \frac{d\Theta}{dv} = 0.$$

Mais, D ne contenant que des puissances paires de u, ce changement reviendra à écrire la lettre v au lieu de u, d'où cette conséquence que l'ensemble des valeurs égales des racines $v_0, v_1, \ldots, v_n$, ne diffère pas de la série des valeurs de u qui font acquérir à l'équation modulaire ces valeurs égales.

I.

Après avoir établi que le discriminant est un carré parfait, ce qui permet d'écrire désormais

$$D = u^{n+1}(1-u^8)^{n+\varepsilon}\theta^2(u),$$

si l'on pose

$$\theta(u) = a_0 + a_1 u^8 + \ldots + a_\nu u^{8\nu}, \qquad \nu = \frac{n^2-1}{8} - \frac{n+\varepsilon}{2},$$

nous introduirons la transcendante dont j'ai donné ailleurs [1] la définition et les propriétés fondamentales, en faisant

$$u = \varphi(\omega),$$

et c'est ainsi que nous parviendrons à représenter explicitement toutes les racines du polynome $\theta(u)$, en donnant pour chacune d'elles la valeur de ω. Le caractère principal de ces valeurs consiste en ce qu'elles sont l'une des racines toujours imaginaires, celle où le coefficient de i [2] est positif, d'équations du second degré à coefficients entiers, et que nous désignerons de cette manière :

$$(a) \qquad P\omega^2 + 2Q\omega + R = 0.$$

Nous allons donner le moyen d'obtenir toutes ces équations en les

(1) *Comptes rendus*, 1858, p. 511.

(2) Peut-être n'est-il pas inutile, pour éviter toute ambiguïté, de dire que la quantité i dont il est question est précisément celle qui figure dans l'expression analytique de $\varphi(\omega)$ où elle a été introduite en posant $q = e^{i\pi\omega}$.

déduisant de certaines classes de formes quadratiques de déterminant négatif, mais il est d'abord nécessaire, à l'égard de cette dépendance que nous établissons entre les équations et les classes, d'indiquer la proposition suivante :

A toutes les classes qui ont même déterminant ou seulement à certains ordres correspondront toujours, sauf deux exceptions dont il sera question plus bas, soit deux groupes, soit six groupes de huit équations, telles, que dans un même groupe toutes les équations se déduisent de l'une d'elles, en y remplaçant ω par $\omega + 2m$, le nombre m étant pris suivant le module 8. De sorte que, si l'on veut avoir seulement les valeurs distinctes de $\varphi^8(\omega)$, on ne conservera qu'une forme de chaque groupe, alors et sous cette condition correspondront à chaque classe deux ou six équations (a).

Désignons dans le premier cas par

$$P\omega^2 + 2Q\omega + R = 0$$

l'une des équations, l'autre s'en déduira en y remplaçant ω par $\frac{\omega}{1+\omega}$, et il en résultera deux valeurs $\varphi(\omega)$ et $\frac{1}{\varphi(\omega)}$ qui seront deux racines réciproques du polynome $\theta(u)$.

Pour le second cas, on aura d'abord les deux équations dont nous venons de parler, et chacune d'elles en donnera en outre deux autres, en y remplaçant ω par $-\frac{1}{\omega}$ et $\omega - 1$. Autrement dit, les six équations résulteront de l'une quelconque d'entre elles en y faisant les substitutions

$$\omega, \quad \frac{\omega}{1+\omega}, \quad -\frac{1}{\omega}, \quad \frac{1}{1-\omega}, \quad \omega - 1, \quad 1 - \frac{1}{\omega}.$$

A ces six valeurs de ω répondent six groupes de huit racines du polynome $\theta(u)$, qu'on obtiendra par les relations

$$u^8 = \varphi^8(\omega), \quad \frac{1}{\varphi^8(\omega)}, \quad 1 - \varphi^8(\omega), \quad \frac{1}{1-\varphi^8(\omega)}, \quad \frac{\varphi^8(\omega)}{\varphi^8(\omega)-1}, \quad \frac{\varphi^8(\omega)-1}{\varphi^8(\omega)}.$$

Quant aux cas d'exception à ces règles, ils concernent les classes dérivées de ces deux formes $(1, 0, 1)$ et $(2, 1, 2)$. On rencontre les premières lorsque, le nombre premier n étant $\equiv 1 \pmod 4$, on peut faire

$$n = a^2 + 4b^2.$$

Selon qu'elles présentent les caractères propres aux formes qui fournissent deux ou six équations, on n'en doit prendre qu'une seule, savoir :

$$\omega^2 - 2\omega + 2 = 0,$$

d'où

$$\omega = 1 + i, \qquad \varphi^8(\omega) = -1;$$

ou bien les trois suivantes :

$$\omega^2 + 1 = 0,$$
$$\omega^2 - 2\omega + 2 = 0,$$
$$2\omega^2 + 2\omega + 1 = 0,$$

d'où

$$\omega = i, \qquad \varphi^8(\omega) = \frac{1}{2},$$
$$\omega = 1 + i, \qquad \varphi^8(\omega) = -1,$$
$$\omega = \frac{-1}{1+i}, \qquad \varphi^8(\omega) = 2.$$

Le premier cas a lieu lorsque b est impair ou impairement pair, et le second lorsque b est divisible par 4 dans l'équation

$$n = a^2 + 4b^2.$$

Les classes dérivées de $(2, 1, 2)$ s'offrent lorsque

$$n = a^2 + 3b^2,$$

et toujours avec les caractères propres aux formes qui fournissent six équations. Mais on en doit prendre seulement deux, qui sont

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0, \qquad \omega^2 - \omega + 1 = 0,$$

et, quant aux valeurs de $\varphi(\omega)$ qu'elles déterminent, elles dépendent de l'équation

$$\varphi^{16}(\omega) - \varphi^8(\omega) + 1 = 0.$$

Ainsi le facteur $u^{16} - u^8 + 1$ se présentera dans le polynome $\theta(u)$ pour $n = 7, 13, 19$, etc.

Ces préliminaires établis, nous arrivons à la formation même des équations en ω. A cet effet, nous considérerons deux séries de déterminants, les uns donnés par l'expression

$$\Delta = (8\delta - 3n)(n - 2\delta),$$

les autres par celle-ci :

$$\Delta' = 8\delta(n - 8\delta),$$

en attribuant à δ toutes les valeurs en nombre évidemment fini qui les rendent positives, et nous aurons les propositions suivantes :

Première série : $\Delta = (8\delta - 3n)(n - 2\delta)$.

Pour $\Delta \equiv 1 \pmod 4$, toutes les classes de déterminants $-\Delta$ peuvent être représentées par des formes (P, Q, R), où Q est impair et R impairement pair. Ces formes fourniront deux équations, dont le type sera précisément

$$P\omega^2 + 2Q\omega + R = 0.$$

Pour $\Delta \equiv -1 \pmod 4$, les seules classes de l'ordre improprement primitif ou dérivées d'ordres improprement primitifs pourront être représentées de même; les autres seront exclues, et chacune des premières fournira deux ou six équations, suivant qu'on aura $\Delta \equiv -1$ ou $3 \pmod 8$.

Deuxième série : $\Delta' = 8\delta(n - 8\delta)$.

Pour δ impair, on exclut les classes où les trois coefficients sont divisibles par 2; toutes les autres fournissent chacune deux équations.

Si δ est pair, on prend sans exception toutes les classes de déterminants $-\Delta'$, et c'est alors seulement qu'on rencontre les groupes de classes auxquelles correspondent six équations. Le premier de ces groupes se présente lorsque $\delta \equiv -2n \pmod 8$; il est composé de toutes les classes dont les coefficients sont divisibles par 4, et qui, ce facteur supprimé, constituent l'ordre improprement primitif, ainsi que les dérivés d'ordres improprement primitifs [1], de déterminant $-\frac{\Delta'}{16}$. Le second est donné par les valeurs de δ qui sont multiples de 8, et il est composé de toutes les classes dont les coefficients sont divisibles par 8. L'une quelconque de ces classes, auxquelles correspondent six équations, étant désignée par (P, Q, R), conduit immédiatement à

[1] Cette réunion d'ordres qui se présente dans les deux séries de déterminants pourrait être appelée simplement le *groupe improprement primitif;* ce serait ainsi l'ensemble des classes (A, B, C), où B est impair, A et C pairs, ces trois nombres pouvant avoir d'ailleurs un diviseur impair quelconque.

l'équation type

$$P\omega^2 + 2Q\omega + R = 0;$$

mais pour les autres, auxquelles correspondent deux équations, et qu'on peut représenter ainsi :

$$\rho(A, B, C),$$

ρ étant 1, 2 ou 4, et A, B, C n'étant plus à la fois divisibles par 2, il sera toujours possible de déduire de (A, B, C) une transformée (P, Q, R) où P est impair, R pair, et l'équation en ω sera encore

$$P\omega^2 + 2Q\omega + R = 0.$$

Une observation essentielle doit être enfin jointe aux propriétés précédentes : c'est que, dans la série des équations dont nous devons donner la formation, jamais on n'obtiendra deux fois la même, si l'on a égard à ce qui a été précédemment dit relativement aux classes dérivées des formes (1, 0, 1) et (2, 1, 2). La considération des formes réduites permet de le démontrer très aisément, et il en résulte cette remarque qu'un nombre premier n'a qu'une seule représentation dans le groupe des formes de même déterminant où le coefficient moyen est nul.

III.

Plusieurs des résultats précédemment établis s'étendent aux équations plus générales qui fournissent la relation entre les modules pour toutes les transformations des fonctions elliptiques. Ceux que je vais indiquer, en considérant pour l'ordre de la transformation un nombre n impair sans diviseur carré, montreront, je pense, l'intérêt qui m'a attaché à ces recherches, auxquelles j'espère donner par la suite de nouveaux développements. Dans ce cas, l'équation rationnelle entre $v = \sqrt[4]{\lambda}$ et $u = \sqrt[4]{k}$ est d'un degré égal à la somme des diviseurs de n, et le premier point que j'ai dû établir consiste en ce que, si l'on pose $u = \varphi(\omega)$, les racines seront représentées ainsi :

$$v = \left(\frac{2}{\delta}\right) \varphi\left(\frac{\delta\omega + 16m}{\delta_1}\right),$$

δ et δ_1 étant deux diviseurs de n, de sorte que $n = \delta\delta_1$, m étant pris suivant le module δ_1 et $\left(\frac{2}{\delta}\right)$ ayant la signification habituelle relative aux nombres composés.

Considérant ensuite le produit des carrés des différences des racines, j'ai trouvé qu'en le désignant toujours par D, on avait

$$D = u^N(1 - u^8)^{N'}(a_0 + a_1 u^8 + a_2 u^{16} + \ldots + a_\nu u^{8\nu}),$$

où N, N' et ν sont des nombres entiers dont la détermination dépend des fonctions numériques suivantes, qui s'offrent pour la première fois en analyse.

Soient δ et δ' deux diviseurs de n, tels que l'on ait

$$\delta\delta' < n,$$

la première de ces fonctions sera la somme de toutes les quantités $\delta\delta'$, et je la désignerai ainsi :

$$\Delta_n = \Sigma\delta\delta'.$$

Le seconde Δ'_n sera définie comme la précédente, mais en employant seulement pour δ et δ' les diviseurs de n qui satisfont à la condition

$$\left(\frac{2}{\delta}\right) = \left(\frac{2}{n\delta'}\right) \text{ (1)}.$$

Cela étant, si $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$ représentent la somme et le nombre des diviseurs de n, on aura

$$N = n\mathfrak{N}' - \mathfrak{N} + 2\Delta_n,$$
$$N' = n\mathfrak{N}' - \mathfrak{N} + 2\Delta'_n,$$
$$4\nu = \mathfrak{N}^2 - \mathfrak{N} - N - 4N'.$$

Ces quantités auxquelles conduit immédiatement le discriminant de l'équation modulaire montrent donc le premier emploi des fonctions Δ_n, Δ'_n, qui, si on les prend complètes, c'est-à-dire en introduisant dans les sommes tous les diviseurs de n, seront de la nature des fonctions numériques qui ont été récemment l'objet de travaux importants de M. Liouville. Mais la limitation $\delta\delta' < n$

(1) δ, δ' ne peuvent être pris égaux entre eux et égaux à l'unité.

leur imprime un caractère spécial qui rappelle dans la théorie des nombres la notion analytique de *parties de fonctions*. Telle est encore cette expression de la somme des diviseurs de n, moindres que $\sqrt{n}$, dont M. Kronecker a montré le premier l'usage dans le beau travail que j'ai déjà cité. Et il semble jusqu'ici que ce soit dans l'évaluation des sommes de nombres de classes de formes quadratiques, dont les déterminants suivent certaines progressions du second ordre, que ces trois fonctions se trouvent appelées à jouer leur principal rôle; mais, à cet égard, j'aurai surtout pour but de faire ressortir, dans le cas où n est premier, la liaison qui existe entre le degré du discriminant et ces nombres de classes. Pour cela, il est nécessaire que je démontre, comme je l'ai déjà annoncé, que le discriminant ne contient pas de facteurs multiples autres que u et $1-u^8$, dont le degré de multiplicité soit supérieur à deux.

IV.

Les valeurs de ω par lesquelles les racines du discriminant, en exceptant $u=0$, $u^8=1$, ont été exprimées sous la forme

$$u=\varphi(\omega),$$

présentent ce caractère que deux quantités $\varphi(\omega)$, $\varphi(\omega')$ sont essentiellement différentes du moment que ω et ω' ne dépendent pas de la même équation; et il en résulte, en premier lieu, que les valeurs communes que prennent respectivement deux racines de l'équation modulaire pour $u=\varphi(\omega)$ et $u=\varphi(\omega')$ ne pourront non plus jamais être égales. Ce point établi, j'observe ensuite que le déterminant Q^2-PR de l'équation

$$P\omega^2+2Q\omega+R=0$$

étant résidu quadratique de n, la congruence

$$Px^2+2Qx+R\equiv 0 \pmod n$$

admet, si P n'est pas multiple du module, deux solutions réelles

qu'il sera toujours possible de représenter par des nombres multiples de 16 :

$$x\equiv\mu,\quad x\equiv\mu'.$$

Cela étant, les deux racines de l'équation modulaire, qui deviennent égales lorsqu'on fait $u=\varphi(\omega)$, seront

$$\varphi\left(\frac{\omega-\mu}{n}\right)\quad\text{et}\quad\varphi\left(\frac{\omega-\mu'}{n}\right).$$

Et dans le cas où l'on suppose $P\equiv 0 \pmod n$, la congruence n'admettant plus qu'une solution $x\equiv\mu$, on aurait l'égalité

$$\varphi\left(\frac{\omega-\mu}{n}\right)=\left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\omega).$$

Mais on peut toujours faire en sorte d'exclure l'un des cas, de rester dans le premier, par exemple, en tirant l'équation en ω d'une forme quadratique (P, Q, R) où P ne soit pas divisible par n. Cela posé, l'équation modulaire ne saurait présenter non plus, quand on y fait $u=\varphi(\omega)$, une troisième racine $\varphi\left(\frac{\omega-\mu''}{n}\right)$ égale aux précédentes; car μ'' devrait nécessairement vérifier, ainsi que μ et μ', la congruence $Px^2+2Qx+R\equiv 0 \pmod n$, ce qui est impossible lorsqu'on suppose le module un nombre premier. Or, ayant démontré que les racines du discriminant ne différaient pas de l'ensemble des valeurs égales des racines $v_0, v_1, \ldots, v_n$, de l'équation modulaire, nous concluons qu'il n'existe pas de facteurs triples dans le discriminant, précisément de ce que trois des quantités $v_0, v_1, \ldots, v_n$ ne peuvent jamais coïncider pour aucune valeur finie de ω. Ayant donc fait

$$D=u^{n+1}(1-u^8)^{n+\varepsilon}\theta^2(u),$$

nous pouvons regarder comme inégales toutes les racines de l'équation $\theta(u)=0$; et c'est la proposition que nous voulions établir afin d'arriver à celle-ci :

Pour tout nombre premier n, la somme des nombres d'équations déduites des classes quadratiques de la première série de déterminants $-\Delta$, et de la seconde série de déterminants $-\Delta'$, est égale au degré du polynome $\theta(u)$.

Mais en considérant, pour plus de simplicité, les seules équations qui fournissent des valeurs distinctes de $\varphi^8(\omega)$, nous pouvons remplacer cet énoncé par le suivant :

Soient σ_1 *et* σ_2 *les nombres de classes de la première série auxquelles correspondent deux ou six équations,* σ'_1 *et* σ'_2 *les quantités analogues dans la seconde série, on aura en tenant compte des classes dérivées de* (1, 0, 1) *et* (2, 1, 2) *la relation*

$$2(\sigma_1 + \sigma'_1) + 6(\sigma_2 + \sigma'_2) = \nu = \frac{n^2 - 1}{8} - \frac{n + \varepsilon}{2}.$$

Tel est donc le théorème, essentiellement limité jusqu'ici au cas où n est premier, que nous allons vérifier par un certain nombre d'exemples, en donnant pour chacun d'eux la série des équations en ω, ce qui va nous conduire en même temps à présenter des applications des diverses règles énoncées précédemment pour la formation de ces équations.

V.

A cet effet, j'emploierai pour abréger la notation suivante : (A, B, C) étant une forme quelconque, je poserai

$$(C, -B, A) = (A, B, C)_1,$$
$$(A, -A + B, A - 2B + C) = (A, B, C)_2.$$

Il deviendra possible ainsi de rattacher immédiatement les équations aux formes réduites, par lesquelles il convient d'autant mieux de représenter les classes, qu'on obtiendra de la sorte les coefficients les plus simples et les valeurs de ω pour lesquelles les séries elliptiques présentent la plus grande convergence. Effectivement, si l'on se borne aux équations qui fournissent des valeurs distinctes de $\varphi^8(\omega)$, ou même à la seule équation type (voyez *Comptes rendus*, p. 946 et § II du présent Mémoire), elle sera toujours l'une de celles-ci :

$$(A, B, C) = 0, \qquad (A, B, C)_1 = 0, \qquad (A, B, C)_2 = 0,$$

les indéterminées x et y étant remplacées par ω et 1, et (A, B, C) étant une forme réduite. Je conviendrai enfin de les désigner seulement par leurs premiers membres et de représenter respectivement par Σ et Σ', pour la première et la seconde série de déterminants, les sommes de nombres d'équations donnant des valeurs distinctes pour $\varphi^8(\omega)$, de sorte que la relation que nous nous proposons de vérifier sera

$$\Sigma + \Sigma' = \nu = \frac{n^2 - 1}{8} - \frac{n + \varepsilon}{2}.$$

Cela posé, voici, en commençant par les cas les plus simples, les résultats que l'on obtient :

$$n = 3.$$

Le nombre ν se réduit à zéro, $\theta(u)$ est une constante, et le discriminant de l'équation modulaire $u^4 - v^4 + 2uv(1 - u^2v^2) = 0$, ainsi que le donne facilement le calcul direct, est

$$D = u^4(1 - u^8)^2.$$

$$n = 5, \qquad \nu = 1.$$

La première série de déterminants fournit la seule valeur $\Delta = 1$, d'où la classe (1, 0, 1), qui par exception donne au lieu de deux équations une seule, $(1, 0, 1)_2$. La seconde série de déterminants n'existe pas, et l'on obtient simplement

$$\theta(u) = 1 + u^8, \qquad D = u^6(1 - u^8)^4(1 + u^8)^2.$$

$$n = 7, \qquad \nu = 2.$$

La première série existe seule et donne $\Delta = 3$, d'où les deux classes (1, 0, 3), (2, 1, 2). Mais on ne doit employer que la classe improprement primitive, qui, par exception encore, au lieu de six équations, n'en donne que deux, dont le type est (2, 1, 2). La valeur D est

$$D = u^8(1 - u^8)^8(1 - u^8 + u^{16})^2.$$

$$n = 11, \qquad \nu = 10.$$

La première série donne $\Delta = 7$, et la classe improprement primitive $(2, 1, 4)$, d'où l'équation type $(2, 1, 4)_1$. On a donc $\Sigma = 2$. Dans la deuxième série $\Delta' = 24$, et l'on obtient les quatre équations types :

$$(1, 0, 24), \quad (3, 0, 8), \quad (4, 2, 7)_1, \quad (5, 1, 5)_2,$$

de sorte que $\Sigma' = 8$, $\Sigma + \Sigma' = 10$.

On verra dans un prochain article comment on parvient ensuite à l'expression ([1]) :

$$\begin{aligned} D = {} & u^{12}(1 - u^8)^{10}(16 - 31u^8 + 16u^{16})^2 \\ & \times (1 - 301\,960\,u^8 + 3\,550\,492\,u^{16} - 2\,178\,232\,u^{24} - 1\,092\,026\,u^{32} \\ & \quad - 2\,178\,232\,u^{40} + 3\,550\,492\,u^{48} - 301\,960\,u^{56} + u^{64})^2. \end{aligned}$$

Pour les valeurs plus grandes de n, je résumerai les résultats dans le Tableau suivant :

([1]) Le calcul fait par M. Bourget nous a amenés à modifier quelques-uns des coefficients numériques donnés par Hermite. E. P.

n	PREMIÈRE SÉRIE.	DEUXIÈME SÉRIE.	ν
13	$\Delta = 3$ $(2, 1, 2)$ $\Delta = 9$ $(1, 0, 9)_2\ (2, 1, 5)_1$ $(3, 0, 3)_2$ $\Sigma = 7$	$\Delta' = 40$ $(1, 0, 40)\ (5, 0, 8)\ (4, 2, 11)_1$ $(7, 3, 7)_2$ $\Sigma' = 8$	15
17	$\Delta = 13$ $(1, 0, 13)_2\ (2, 1, 7)_1$ $\Delta = 15$ $(2, 1, 8)_1\ (4, 1, 4)_2$ $\Sigma = 8$	$\Delta' = 72$ $(1, 0, 72)\ (3, 0, 24)\ (8, 0, 9)_1\ (4, 2, 19)_1$ $(9, 3, 9)_2\ (8, 4, 11)_1$ $\Delta' = 16$ $(1, 0, 16)\ (2, 0, 8)\ (4, 2, 5)_1$ $(4, 0, 4)_2$ $\Sigma' = 19$	27
19	$\Delta = 15$ $(2, 1, 8)_1\ (4, 1, 4)_2$ $\Delta = 21$ $(1, 0, 21)_2\ (3, 0, 7)_2$ $(2, 1, 11)_2\ (5, 2, 5)_2$ $\Sigma = 12$	$\Delta' = 88$ $(1, 0, 88)\ (8, 0, 11)_1\ (4, 2, 23)_1\ (8, 4, 13)_1$ $\Delta' = 48$ $(1, 0, 48)\ (2, 0, 24)\ (3, 0, 16)\ (4, 0, 12)$ $(6, 0, 8)\ (7, 1, 7)_2\ (4, 2, 13)_1\ (8, 4, 8)$ $\Sigma' = 24$	36
23	$\Delta = 19$ $(2, 1, 10)$ $\Delta = 33$ $(1, 0, 33)_2\ (3, 0, 11)_2$ $(2, 1, 17)_1\ (6, 3, 7)_1$ $\Delta = 15$ $(2, 1, 8)_1\ (4, 1, 4)_2$ $\Sigma = 18$	$\Delta' = 112$ $(1, 0, 112)\ (2, 0, 56)\ (4, 0, 28)_2\ (8, 0, 14)_1$ $(7, 0, 16)\ (4, 2, 29)_1\ (11, 3, 11)_2\ (8, 4, 16)$ $\Delta' = 120$ $(1, 0, 120)\ (3, 0, 40)\ (5, 0, 24)\ (8, 0, 15)_1$ $(11, 1, 11)_2\ (4, 2, 31)\ (8, 4, 17)_1\ (12, 6, 13)_1$ $\Sigma' = 36$	54
29	$\Delta = 25$ $(1, 0, 25)_2\ (2, 1, 3)_1$ $(5, 0, 5)_2$ $\Delta = 51$ $(2, 1, 26)\ (6, 3, 10)$ $\Delta = 45$ $(1, 0, 45)_2\ (3, 0, 15)_2\ (5, 0, 9)_2$ $(2, 1, 23)_1\ (7, 2, 7)_2\ (6, 3, 9)_1$ $\Delta = 7$ $(2, 1, 4)_1$ $\Sigma = 31$	$\Delta = 120$ $(1, 0, 120)\ (3, 0, 40)\ (5, 0, 24)\ (8, 0, 15)_1$ $(11, 1, 11)_2\ (4, 2, 32)_1$ $(8, 4, 17)_1\ (12, 6, 13)_1$ $\Delta = 208$ $(1, 0, 208)\ (2, 0, 104)\ (4, 0, 52)\ (8, 0, 26)_1$ $(13, 0, 16)$ $(11, 1, 29)_2\ (11, -1, 29)_2\ (7, 3, 31)_2$ $(7, -3, 31)_2\ (4, 2, 53)_1\ (8, 4, 28)_1$ $(16, 8, 17)_1\ (14, 4, 16)\ (14, -4, 16)$ $\Delta = 168$ $(1, 0, 168)\ (8, 0, 21)_1\ (3, 0, 56)\ (7, 0, 24)$ $(13, 1, 13)_2\ (4, 2, 43)_1$ $(8, 4, 23)_1\ (12, 6, 17)_1$ $\Sigma' = 60$	91