et la fonction $\Pi(x, y)$ sera la somme des dix séries entièrement déterminées, et multipliées respectivement par ces coefficients qui demeurent arbitraires. Cela posé, soient $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ quatre des seize fonctions θ; nommons θ_i l'une d'elles, et $\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_i, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i$ les valeurs des nombres $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$, qui la caractérisent. Faisons encore, pour abréger, $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{p}_i\mathfrak{n}_i + \mathfrak{q}_i\mathfrak{m}_i$; on satisfera évidemment aux équations (19), en prenant pour $\Pi(x, y)$ les quatrièmes puissances de ces fonctions, et les carrés de leurs produits deux à deux, quels que soient $\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_i, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i$. Or on peut joindre à ces expressions, qui sont au nombre de dix, le produit $\theta_0\theta_1\theta_2\theta_3$, si l'on pose, suivant le module 2,

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 \equiv 0, & \mathfrak{n}_0 + \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_3 \equiv 0, \\ \mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 \equiv 0, & \mathfrak{q}_0 + \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2 + \mathfrak{q}_3 \equiv 0, \\ \multicolumn{2}{c}{\mathfrak{s}_0 + \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2 + \mathfrak{s}_3 \equiv 0.} \end{array}\right.$$

Sous ces conditions, on obtient nécessairement, entre les onze quantités que nous considérons, une relation linéaire, puisque toutes s'expriment linéairement par dix fonctions déterminées. Or l'existence de cette relation suffit à notre objet, et nous n'aurons pas à employer les valeurs des coefficients, qu'il serait d'ailleurs bien facile de trouver. Nous nous bornerons aux remarques suivantes :

1° On satisfait aux équations (20) de la manière la plus générale, en prenant, suivant le module 2,

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{m}_0 \equiv \boldsymbol{\mathfrak{m}}, & \mathfrak{m}_1 \equiv \boldsymbol{\mathfrak{m}} + \boldsymbol{\mathfrak{m}}_1, & \mathfrak{m}_2 \equiv \boldsymbol{\mathfrak{m}} + \boldsymbol{\mathfrak{m}}_2, & \mathfrak{m}_3 \equiv \boldsymbol{\mathfrak{m}} + \boldsymbol{\mathfrak{m}}_1 + \boldsymbol{\mathfrak{m}}_2, \\ \mathfrak{n}_0 \equiv \boldsymbol{\mathfrak{n}}, & \mathfrak{n}_1 \equiv \boldsymbol{\mathfrak{n}} + \boldsymbol{\mathfrak{n}}_1, & \mathfrak{n}_2 \equiv \boldsymbol{\mathfrak{n}} + \boldsymbol{\mathfrak{n}}_2, & \mathfrak{n}_3 \equiv \boldsymbol{\mathfrak{n}} + \boldsymbol{\mathfrak{n}}_1 + \boldsymbol{\mathfrak{n}}_2, \\ \mathfrak{p}_0 \equiv \boldsymbol{\mathfrak{p}}, & \mathfrak{p}_1 \equiv \boldsymbol{\mathfrak{p}} + \boldsymbol{\mathfrak{p}}_1. & \mathfrak{p}_2 \equiv \boldsymbol{\mathfrak{p}} + \boldsymbol{\mathfrak{p}}_2, & \mathfrak{p}_3 \equiv \boldsymbol{\mathfrak{p}} + \boldsymbol{\mathfrak{p}}_1 + \boldsymbol{\mathfrak{p}}_2, \\ \mathfrak{q}_0 \equiv \boldsymbol{\mathfrak{q}}, & \mathfrak{q}_1 \equiv \boldsymbol{\mathfrak{q}} + \boldsymbol{\mathfrak{q}}_1, & \mathfrak{q}_2 \equiv \boldsymbol{\mathfrak{q}} + \boldsymbol{\mathfrak{q}}_2, & \mathfrak{q}_3 \equiv \boldsymbol{\mathfrak{q}} + \boldsymbol{\mathfrak{q}}_1 + \boldsymbol{\mathfrak{q}}_2, \end{array}$$

$\boldsymbol{\mathfrak{m}}, \boldsymbol{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\mathfrak{p}}, \boldsymbol{\mathfrak{q}}$, étant arbitraires, et les autres entiers devant vérifier la condition

$$\boldsymbol{\mathfrak{p}}_1\boldsymbol{\mathfrak{n}}_2 + \boldsymbol{\mathfrak{p}}_2\boldsymbol{\mathfrak{n}}_1 + \boldsymbol{\mathfrak{q}}_1\boldsymbol{\mathfrak{m}}_2 + \boldsymbol{\mathfrak{q}}_2\boldsymbol{\mathfrak{m}}_1 \equiv 0.$$

2° Des quatre fonctions $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$, deux peuvent être arbitrairement choisies parmi les seize fonctions θ. Ce choix fait, il existe trois systèmes distincts de deux autres fonctions qu'on peut leur associer, de manière à satisfaire aux équations (20).

3° Les fonctions $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ peuvent être paires, ou bien deux

seront paires, et les deux autres impaires : aucune relation algébrique du quatrième degré n'aura lieu entre quatre fonctions impaires.

XII.

Je considère maintenant une fonction homogène de $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$, dont le degré soit le nombre impair k. Une telle fonction s'exprimera linéairement par des quantités de la forme $\theta_0^{\mathfrak{a}}\theta_1^{\mathfrak{b}}\theta_2^{\mathfrak{c}}\theta_3^{\mathfrak{d}}$, où $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ sont des entiers positifs dont la somme est k. Cela posé, en assujettissant ces nombres aux conditions particulières

$$\mathfrak{b} + \mathfrak{d} \equiv \varepsilon, \qquad \mathfrak{c} + \mathfrak{d} \equiv \eta \qquad (\text{mod. } 2),$$

ε et η étant 0 ou 1, on formera quatre espèces bien distinctes de fonctions homogènes, que je désignerai ainsi :

$$\begin{array}{llll} \Pi_0(x, y) & \text{lorsqu'on fera} & \varepsilon = 0, & \eta = 0; \\ \Pi_1(x, y) & \quad\text{»} & \varepsilon = 1, & \eta = 0; \\ \Pi_2(x, y) & \quad\text{»} & \varepsilon = 0, & \eta = 1; \\ \Pi_3(x, y) & \quad\text{»} & \varepsilon = 1, & \eta = 1; \end{array}$$

et l'on aura ce théorème :

Les fonctions $\Pi_0(x, y), \Pi_1(x, y), \Pi_2(x, y), \Pi_3(x, y)$ *correspondent respectivement à* $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$; *de telle sorte qu'en représentant par* $\Pi_i(x, y)$ *l'une quelconque d'entre elles, l'indice pouvant recevoir les valeurs* 0, 1, 2, 3, *on aura les relations suivantes :*

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{c} \Pi_i(x+1, y) = (-1)^{\mathfrak{m}_i}\Pi_i(x, y), \;\; \Pi_i(x, y+1) = (-1)^{\mathfrak{n}_i}\Pi_i(x, y), \\ \Pi_i(x+h, y+g') = (-1)^{\mathfrak{p}_i}\Pi_i(x, y)\, e^{-i\pi k(2y+g')}, \\ \Pi_i(x+g, y+h) = (-1)^{\mathfrak{q}_i}\Pi_i(x, y)\, e^{-i\pi k(2x+g)}, \\ \Pi_i(-x-y) = (-1)^{\mathfrak{s}_i}\Pi_i(x, y), \end{array}\right.$$

qui sont analogues aux équations de définition de la fonction θ_i, *savoir :*

$$\begin{array}{c} \theta_i(x+1, y) = (-1)^{\mathfrak{m}_i}\theta_i(x, y), \qquad \theta_i(x, y+1) = (-1)^{\mathfrak{n}_i}\theta_i(x, y), \\ \theta_i(x+h, y+g') = (-1)^{\mathfrak{p}_i}\theta_i(x, y)\, e^{-i\pi(2y+g')}, \\ \theta_i(x+g, y+h) = (-1)^{\mathfrak{q}_i}\theta_i(x, y)\, e^{-i\pi(2x+g)}, \\ \theta_i(-x, -y) = (-1)^{\mathfrak{s}_i}\theta_i(x, y). \end{array}$$

Je vais maintenant établir que les quatre fonctions $\Pi_i(x, y)$ contiennent, sous forme linéaire, un nombre égal à $\frac{k^2+1}{2}$ de coefficients indépendants. Concevons, pour cela, qu'en employant l'équation homogène et du quatrième degré, dont nous avons établi l'existence entre θ_0, θ_1, θ_2, θ_3, on élimine, dans ces fonctions, toutes les puissances de l'une des quantités θ, de θ_3 par exemple, qui surpasse la troisième. Cette réduction faite, toutes les expressions $\theta_0^{\mathfrak{a}}\theta_1^{\mathfrak{b}}\theta_2^{\mathfrak{c}}\theta_3^{\mathfrak{d}}$, où l'exposant $\mathfrak{d}$ ne surpasse pas 3, seront linéairement indépendantes. Car, s'il en était autrement, on aurait une seconde relation algébrique, homogène entre θ_0, θ_1, θ_2, θ_3, d'où résulterait que les seize fonctions θ s'exprimeraient algébriquement par deux seulement d'entre elles; et, par suite, que deux quelconques des quotients quadruplement périodiques seraient fonctions algébriques l'un de l'autre. Nous conclurons de là, qu'il existe précisément autant de coefficients arbitraires dans $\Pi_i(x, y)$ que de solutions distinctes, en nombres entiers et positifs, des équations

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=k, \qquad \mathfrak{b}+\mathfrak{d}\equiv\varepsilon, \qquad \mathfrak{c}+\mathfrak{d}\equiv\eta \qquad (\text{mod } 2),$$

lorsqu'on suppose successivement

$$\mathfrak{d}=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Or, on trouve sans peine que le nombre de ces solutions est $\frac{k^2+1}{2}$, c'est-à-dire précisément égal au nombre des coefficients indépendants qui entrent linéairement dans la fonction définie par les équations (13) et (16 *bis*) (¹). Cela posé, il a été établi, § XI, que sur les quatre systèmes de quantités $\mathfrak{m}_i$, $\mathfrak{n}_i$, $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$, deux sont arbitraires. On pourra donc, en disposant seulement de l'un d'eux, prendre

---

(¹) La coïncidence de ces deux nombres est si importante, au point de vue où je me suis placé dans la théorie de la transformation, que je crois devoir donner le calcul qui sert à l'établir. Soient ε_1 et η_1 les valeurs 0 ou 1, déterminées par les conditions

$$\varepsilon_1\equiv\varepsilon+1, \qquad \eta_1\equiv\eta+1 \qquad (\text{mod } 2),$$

on trouvera immédiatement que, pour

$$\mathfrak{d}=0, \qquad \mathfrak{d}=2,$$

les nombres de solutions sont respectivement les coefficients des puissances x^k et

par exemple

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{m}_0=\mathfrak{m}&\equiv\mu a_0+\nu a_1+pa_2+qa_3+a_0a_3+a_1a_2\\
\mathfrak{n}_0=\mathfrak{n}&\equiv\mu b_0+\nu b_1+pb_2+qb_3+b_0b_3+b_1b_2\\
\mathfrak{p}_0=\mathfrak{p}&\equiv\mu c_0+\nu c_1+pc_2+qc_3+c_0c_3+c_1c_2\\
\mathfrak{q}_0=\mathfrak{q}&\equiv\mu d_0+\nu d_1+pd_2+qd_3+d_0d_3+d_1d_2
\end{aligned}\right\} \quad (\text{mod } 2),$$

et pour $i=0$ faire ainsi coïncider les équations (21) avec les rela-

---

x^{k-2} dans le produit

$$(1+x+x^2+\ldots)(x^{\varepsilon}+x^{\varepsilon+2}+x^{\varepsilon+4}+\ldots)(x^{\eta}+x^{\eta+2}+x^{\eta+4}+\ldots)=\frac{x^{\varepsilon+\eta}}{(1-x)(1-x^2)^2},$$

tandis que, pour

$$\mathfrak{d}=1, \qquad \mathfrak{d}=3,$$

ces mêmes nombres sont les coefficients de x^{k-1} et x^{k-3} dans le produit

$$(1+x+x^2+\ldots)(x^{\varepsilon_1}+x^{\varepsilon_1+2}+x^{\varepsilon_1+4}+\ldots)(x^{\eta_1}+x^{\eta_1+2}+x^{\eta_1+4}+\ldots)=\frac{x^{\varepsilon_1+\eta_1}}{(1-x)(1-x^2)^2}.$$

De là on conclut que, pour

$$\mathfrak{d}=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

le nombre total des relations est donné par le coefficient de x^k dans le développement de la fonction

$$\frac{x^{\varepsilon+\eta}(1+x^2)+x^{\varepsilon_1+\eta_1}(x+x^3)}{(1-x)(1-x^2)^2}.$$

Passons maintenant aux valeurs particulières de ε et η. Lorsque ces quantités sont nulles toutes deux, cette fonction devient

$$\frac{(1+x^2)(1+x^3)}{(1-x)(1-x^2)^2},$$

et, dans les trois autres cas, elle se présente toujours comme égale à

$$\frac{(1+x^2)(x+x^2)}{(1-x)(1-x^2)^2}.$$

Mais les développements de ces fractions ont même partie impaire, car leur différence est la fonction paire $\frac{x^2+1}{x^2-1}$; donc, pour des valeurs impaires de k, le nombre des solutions des équations proposées ne dépend pas des valeurs de ε et η. Ce nombre sera ainsi le quart de celui qui se rapporte à l'équation unique

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=k,$$

en supposant $\mathfrak{d}=0, 1, 2, 3$. Or, suivant ces cas, on trouve successivement les nombres

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}, \quad \frac{k(k+1)}{2}, \quad \frac{k(k-1)}{2}, \quad \frac{(k-1)(k-2)}{2},$$

et leur somme, divisée par 4, est bien égale à $\frac{k^2+1}{2}$.

tions (13) et (16 *bis*). Nous sommes amené par là à cette proposition fondamentale de la théorie de la transformation des transcendantes abéliennes du premier ordre :

La fonction

$$\Pi(x, y) = \Theta(z_0 + \mathrm{G}\, z_3 + \mathrm{H}\, z_2,\ z_1 + \mathrm{H}\, z_3 + \mathrm{G}'\, z_2)\, e^{i\pi[z_0 z_3 + z_1 z_2 + \Phi(z_3, z_2)]}$$

aux modules G, H, G′ *peut être exprimée par une fonction entière et homogène, du degré k, des quatre fonctions* $\theta_0(x, y)$, $\theta_1(x, y)$, $\theta_2(x, y)$, $\theta_3(x, y)$ *aux modules g, h, g', qui dépendent des premiers par les équations* (14).

XIII.

Mais ce n'est pas une seulement des seize fonctions Θ qui s'exprime ainsi par θ_0, θ_1, θ_2, θ_3. En prenant en effet pour $\Pi(x, y)$ successivement les quatre fonctions homogènes de ces quantités que nous avons précédemment nommées $\Pi_0(x, y)$, $\Pi_1(x, y)$, $\Pi_2(x, y)$, $\Pi_3(x, y)$, et qui toutes renferment linéairement $\frac{k^2+1}{2}$ constantes arbitraires, on satisfera de la manière la plus générale aux équations (13) et (16 *bis*) pour quatre systèmes différents de valeurs des nombres μ, ν, p, q. Et les valeurs de ces nombres s'obtiendront en posant

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}_i &\equiv \mu a_0 + \nu a_1 + p a_2 + q a_3 + a_0 a_3 + a_1 a_2,\\
\mathfrak{n}_i &\equiv \mu b_0 + \nu b_1 + p b_2 + q b_3 + b_0 b_3 + b_1 b_2,\\
\mathfrak{p}_i &\equiv \mu c_0 + \nu c_1 + p c_2 + q c_3 + c_0 c_3 + c_1 c_2,\\
\mathfrak{q}_i &\equiv \mu d_0 + \nu d_1 + p d_2 + q d_3 + d_0 d_3 + d_1 d_2,
\end{aligned}$$

suivant le module 2. Pour plus de clarté, je désigne par μ_i, ν_i, p_i, q_i, celles qui correspondent à $\mathfrak{m}_i$, $\mathfrak{n}_i$, $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$, et je fais $s_i = \nu_i p_i + \mu_i q_i$; on trouvera alors très facilement

$$\left.\begin{aligned}
\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \equiv 0, &\qquad \nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \equiv 0\\
p_0 + p_1 + p_2 + p_3 \equiv 0, &\qquad q_0 + q_1 + q_2 + q_3 \equiv 0
\end{aligned}\right\} \pmod 2.$$

$$s_0 + s_1 + s_2 + s_3 \equiv 0.$$

Or ces relations sont de même forme que les équations (20), § XI, et l'on en conclut cette proposition :

Les quatre fonctions Θ *que nous exprimons par des fonctions*

homogènes et du degré k, de θ_0, θ_1, θ_2, θ_3, sont liées, comme celles-ci, par une équation homogène du quatrième degré.

XIV.

Les résultats précédents conduisent immédiatement aux relations entre les quotients quadruplement périodiques qui proviennent de la division de deux fonctions Θ, et ceux qui proviennent de la division de deux fonctions θ. Ces derniers, en regardant g, h, g' comme arbitraires, représenteront les fonctions périodiques les plus générales, auxquelles donnent naissance les intégrales ultra-elliptiques de première classe, lorsqu'on aura remplacé les arguments x et y par d'autres qui en dépendent linéairement d'une manière quelconque. On obtient ainsi la solution du problème de la transformation, tel que nous l'avons posé en commençant. Mais nous allons présenter la relation obtenue entre les fonctions Θ et θ de différents modules, sous une forme analytique mieux appropriée aux considérations qui nous restent à développer.

Nous ferons, dans ce but, la substitution suivante :

$$x = \mathfrak{x} + h\mathfrak{z} + g\mathfrak{u}, \qquad y = \mathfrak{y} + g'\mathfrak{z} + h\mathfrak{u},$$

et nous poserons

$$\zeta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{u}, g, h, g') = \theta(\mathfrak{x} + h\mathfrak{z} + g\mathfrak{u},\ \mathfrak{y} + g'\mathfrak{z} + h\mathfrak{u});$$

remplaçant ainsi la fonction θ aux deux arguments x et y, par la fonction ζ, qui dépendra de $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{u}$. Cela posé, soient

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= a_0\mathfrak{x} + b_0\mathfrak{y} + c_0\mathfrak{z} + d_0\mathfrak{u}, &\qquad \mathfrak{Y} &= a_1\mathfrak{x} + b_1\mathfrak{y} + c_1\mathfrak{z} + d_1\mathfrak{u},\\
\mathfrak{Z} &= a_2\mathfrak{x} + b_2\mathfrak{y} + c_2\mathfrak{z} + d_2\mathfrak{u}, &\qquad \mathfrak{V} &= a_3\mathfrak{x} + b_3\mathfrak{y} + c_3\mathfrak{z} + d_3\mathfrak{u},
\end{aligned}$$

on trouvera aisément ces relations importantes (¹) :

$$\begin{aligned}
z_0 + \mathrm{G} z_3 + \mathrm{H} z_2 &= \mathfrak{X} + \mathrm{G}\mathfrak{V} + \mathrm{H}\mathfrak{Z},\\
z_1 + \mathrm{H} z_3 + \mathrm{G}' z_2 &= \mathfrak{Y} + \mathrm{H}\mathfrak{V} + \mathrm{G}'\mathfrak{Z},\\
z_0 z_3 + z_1 z_2 + \Phi(z_3, z_2) &= a_3(\mathfrak{X} + \mathrm{H}\mathfrak{Z} + \mathrm{G}\mathfrak{V})(\mathfrak{x} + h\mathfrak{z} + g\mathfrak{u})\\
&\quad + b_3(\mathfrak{X} + \mathrm{H}\mathfrak{Z} + \mathrm{G}\mathfrak{V})(\mathfrak{y} + g'\mathfrak{z} + h\mathfrak{u})\\
&\quad + a_2(\mathfrak{Y} + \mathrm{G}'\mathfrak{Z} + \mathrm{H}\mathfrak{V})(\mathfrak{x} + h\mathfrak{z} + g\mathfrak{u})\\
&\quad + b_2(\mathfrak{Y} + \mathrm{G}'\mathfrak{Z} + \mathrm{H}\mathfrak{V})(\mathfrak{x} + g'\mathfrak{z} + h\mathfrak{u}).
\end{aligned}$$

(¹) On se souvient qu'au § VII, la quantité $a_i x + b_i y$ a été désignée, pour abréger, par z_i.

Pour abréger l'écriture, représentons par χ cette expression de la forme quadratique $z_0 z_3 + z_1 z_2 + \Phi(z_3, z_2)$, et convenons de mettre en indice à la fonction ζ les valeurs des nombres $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, qui figurent dans la fonction θ dont elle dérive, nous aurons alors ce nouvel énoncé des théorèmes de transformation :

Les quatre fonctions représentées par

$$e^{i\pi\chi}\zeta_{\mu_i\nu_i p_i q_i}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{U}, \mathrm{G}, \mathrm{H}, \mathrm{G}'),$$

le nombre i pouvant recevoir les valeurs 0, 1, 2, 3, *s'expriment par des fonctions entières homogènes, et du degré k des quatre quantités analogues*

$$\zeta_{\mathfrak{m}_i\mathfrak{n}_i\mathfrak{p}_i\mathfrak{q}_i}(x, y, z, u, g, h, g').$$

Les modules g, h, g' dépendent de G, H, G′ *par les équations* (14), § VII, *et les quatre nombres μ_i, ν_i, p_i, q_i de $\mathfrak{m}_i$, $\mathfrak{n}_i$, $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$ par les relations*

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{m}_i &\equiv \mu_i a_0 + \nu_i a_1 + p_i a_2 + q_i a_3 + a_0 a_3 + a_1 a_2,\\
\mathfrak{n}_i &\equiv \mu_i b_0 + \nu_i b_1 + p_i b_2 + q_i b_3 + b_0 b_3 + b_1 b_2,\\
\mathfrak{p}_i &\equiv \mu_i c_0 + \nu_i c_1 + p_i c_2 + q_i c_3 + c_0 c_3 + c_1 c_2,\\
\mathfrak{q}_i &\equiv \mu_i d_0 + \nu_i d_1 + p_i d_2 + q_i d_3 + d_0 d_3 + d_1 d_2,
\end{aligned}\right\} \pmod 2,$$

auxquelles il faut joindre les suivantes :

$$\left.\begin{array}{cc}
\mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 \equiv 0, & \mathfrak{n}_0 + \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_3 \equiv 0,\\
\mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 \equiv 0, & \mathfrak{q}_0 + \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2 + \mathfrak{q}_3 \equiv 0,\\
\multicolumn{2}{c}{\mathfrak{s}_0 + \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2 + \mathfrak{s}_3 \equiv 0,}
\end{array}\right\} \pmod 2,$$

et celles-ci, qui en sont, comme nous l'avons dit, la conséquence :

$$\left.\begin{array}{cc}
\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \equiv 0, & \nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \equiv 0,\\
p_0 + p_1 + p_2 + p_3 \equiv 0, & q_0 + q_1 + q_2 + q_3 \equiv 0,\\
\multicolumn{2}{c}{s_0 + s_1 + s_2 + s_3 \equiv 0,}
\end{array}\right\} \pmod 2.$$

XV.

En partant de ces résultats, je vais déterminer combien s'obtiennent de transformations distinctes lorsque le nombre impair k est supposé premier. Je me fonderai à cet effet sur cette proposition :

Considérant la substitution

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= \alpha_0 \mathrm{X} + \alpha_1 \mathrm{Y} + \alpha_2 \mathrm{Z} + \alpha_3 \mathrm{U},\\
\mathfrak{Y} &= \beta_0 \mathrm{X} + \beta_1 \mathrm{Y} + \beta_2 \mathrm{Z} + \beta_3 \mathrm{U},\\
\mathfrak{Z} &= \gamma_0 \mathrm{X} + \gamma_1 \mathrm{Y} + \gamma_2 \mathrm{Z} + \gamma_3 \mathrm{U},\\
\mathfrak{U} &= \delta_0 \mathrm{X} + \delta_1 \mathrm{Y} + \delta_2 \mathrm{Z} + \delta_3 \mathrm{U},
\end{aligned}\right.$$

dont les coefficients sont des nombres entiers assujettis aux conditions

$$\begin{aligned}
\alpha_0\delta_1 + \beta_0\gamma_1 - \gamma_0\beta_1 - \delta_0\alpha_1 &= 0,\\
\alpha_0\delta_2 + \beta_0\gamma_2 - \gamma_0\beta_2 - \delta_0\alpha_2 &= 0,\\
\alpha_0\delta_3 + \beta_0\gamma_3 - \gamma_0\beta_3 - \delta_0\alpha_3 &= 1,\\
\alpha_1\delta_2 + \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2 - \delta_1\alpha_2 &= 1,\\
\alpha_1\delta_3 + \beta_1\gamma_3 - \gamma_1\beta_3 - \delta_1\alpha_3 &= 0,\\
\alpha_2\delta_3 + \beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3 - \delta_2\alpha_3 &= 0,
\end{aligned}$$

en la faisant suivre des quatre suivantes :

$$\text{I.}\ \left\{\begin{aligned}
\mathrm{X} &= x,\\
\mathrm{Y} &= y,\\
\mathrm{Z} &= kz,\\
\mathrm{U} &= ku,
\end{aligned}\right.
\qquad
\text{II.}\ \left\{\begin{aligned}
\mathrm{X} &= x,\\
\mathrm{Y} &= ky,\\
\mathrm{Z} &= iy + z,\\
\mathrm{U} &= ku,
\end{aligned}\right.$$

$$\text{III.}\ \left\{\begin{aligned}
\mathrm{X} &= kx,\\
\mathrm{Y} &= ix + y,\\
\mathrm{Z} &= kz,\\
\mathrm{U} &= i'x - iz + u,
\end{aligned}\right.
\qquad
\text{IV.}\ \left\{\begin{aligned}
\mathrm{X} &= kx,\\
\mathrm{Y} &= ky,\\
\mathrm{Z} &= ix + i'y + z,\\
\mathrm{U} &= i''x + iy + u,
\end{aligned}\right.$$

où i, i', i'' désignent des entiers positifs inférieurs à k, on pourra obtenir dans toute sa généralité la substitution

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= a_0 x + b_0 y + c_0 z + d_0 u,\\
\mathfrak{Y} &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 u,\\
\mathfrak{Z} &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 u,\\
\mathfrak{U} &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 u,
\end{aligned}$$

dont les coefficients sont assujettis aux relations fondamentales

$$\begin{aligned}
a_0 d_1 + b_0 c_1 - c_0 b_1 - d_0 a_1 &= 0,\\
a_0 d_2 + b_0 c_2 - c_0 b_2 - d_0 a_2 &= 0,\\
a_0 d_3 + b_0 c_3 - c_0 b_3 - d_0 a_3 &= k,\\
a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 - d_1 a_2 &= k,\\
a_1 d_3 + b_1 c_3 - c_1 b_3 - d_1 a_3 &= 0,\\
a_2 d_3 + b_2 c_3 - c_2 b_3 - d_2 a_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Cette proposition renferme, comme on voit, la théorie arithmétique de la réduction des systèmes linéaires

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix},$$

en se fondant sur la notion d'équivalence qui a été nommée, par Eisenstein, l'*équivalence à gauche des systèmes*. En prenant, au contraire, l'équivalence à droite des substitutions pour point de départ, on obtiendra les substitutions ou systèmes réduits que j'ai donnés § II. On en conclut que toutes les transformations des fonctions abéliennes qui répondent à un nombre premier k, résultent des transformations particulières où l'on emploie les substitutions réduites I, II, III, IV, combinées avec les transformations où figurent les substitutions au déterminant un. Or le nombre des substitutions réduites étant $1 + k + k^2 + k^3$, on obtient précisément autant de transformations distinctes, dans lesquelles les fonctions $\zeta(X, Y, Z, U)$ sont exprimées par des polynomes homogènes et de degré k, contenant quatre des fonctions $\zeta(x, y, z, u)$. Nous n'avons plus ainsi qu'à passer des fonctions $\zeta(X, Y, Z, U)$ aux fonctions $\zeta(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{U})$, les arguments $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{U}$ étant liés aux arguments X, Y, Z, U par les équations (22). Or, en omettant les modules, pour abréger l'écriture, la dépendance de ces fonctions est exprimée par la relation

$$e^{i\pi\chi}\zeta_{\mu,\nu,p,q}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{U}) = \text{const.}\,\zeta_{\mathfrak{m},\mathfrak{n},\mathfrak{p},\mathfrak{q}}(X, Y, Z, U),$$

dans laquelle

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{m} &\equiv \mu\alpha_0 + \nu\alpha_1 + p\alpha_2 + q\alpha_3 + \alpha_0\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 \\ \mathfrak{n} &\equiv \mu\beta_0 + \nu\beta_1 + p\beta_2 + q\beta_3 + \beta_0\beta_3 + \beta_1\beta_2 \\ \mathfrak{p} &\equiv \mu\gamma_0 + \nu\gamma_1 + p\gamma_2 + q\gamma_3 + \gamma_0\gamma_3 + \gamma_1\gamma_2 \\ \mathfrak{q} &\equiv \mu\delta_0 + \nu\delta_1 + p\delta_2 + q\delta_3 + \delta_0\delta_3 + \delta_1\delta_2 \end{aligned}\right\} \pmod 2.$$

Cela posé, si l'on a

$$\mathfrak{m} \equiv \mu, \qquad \mathfrak{n} \equiv \nu, \qquad \mathfrak{p} \equiv p, \qquad \mathfrak{q} \equiv q \pmod 2,$$

la fonction ζ se trouvant changée en elle-même, la combinaison de cette transformation avec celles qui correspondent aux substi-

tutions réduites ne donnera point de formules nouvelles. Mais si les nombres $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ ne coïncident pas tous avec μ, ν, p, q, la combinaison de cette transformation aura évidemment pour effet de permuter les expressions des diverses fonctions ζ, dans les formules de transformation relatives aux substitutions réduites.

On est amené par là à une considération entièrement semblable à celle qui a été présentée par Abel dans la théorie des fonctions elliptiques, et qui a pour conséquence de multiplier par six le nombre total des transformations données pour la première fois par Jacobi. Seulement, il faut bien remarquer que les expressions rationnelles de la forme

$$y' = \frac{\alpha + \beta y}{\alpha' + \beta' y},$$

considérées par Abel ([1]), conduisent à des relations irrationnelles, si l'on compare deux intégrales elliptiques prises l'une et l'autre à partir de la limite zéro.

Dans la théorie de la transformation de fonctions abéliennes, le nombre de ces transformations distinctes dans lesquelles $k = 1$ est égal au nombre des substitutions différentes, représentées par les équations (22), lorsqu'on prend les coefficients suivant le module 2. Or, en ayant égard aux relations qui existent entre les coefficients, on trouve ce nombre égal à 720, c'est-à-dire au produit : 2.3.4.5.6; nous avons ainsi ce théorème :

Le nombre des transformations distinctes des fonctions abéliennes qui correspondent à un nombre premier k est

$$720(1 + k + k^2 + k^3).$$

XVI.

Parmi ces diverses transformations, celles qui correspondent aux quatre types de substitutions réduites, lorsqu'on y suppose égaux à zéro les nombres entiers i, i', i'', méritent une attention particu-

([1]) Voyez les *Œuvres d'Abel*, tome I, page 379. Ce point de la théorie de la transformation sur lequel insiste l'illustre géomètre, est effectivement de la plus grande importance, par exemple dans la recherche des modules qui donnent lieu à une multiplication complexe.

lière. On voit alors, en effet, se présenter immédiatement la notion importante des *transformations supplémentaires*, qui, sous le point de vue le plus général, résulte de la cinquième des propositions arithmétiques données § III. Les substitutions que nous allons ainsi considérer, dans les théorèmes de transformation, seront les suivantes :

$$\text{I.}\ \begin{cases} X = x, \\ Y = y, \\ Z = kz, \\ U = ku, \end{cases} \quad \text{II.}\ \begin{cases} X = x, \\ Y = ky, \\ Z = z, \\ U = ku, \end{cases} \quad \text{III.}\ \begin{cases} X = kx, \\ Y = y, \\ Z = kz, \\ U = u, \end{cases} \quad \text{IV.}\ \begin{cases} X = kz, \\ Y = ky, \\ Z = z, \\ U = u. \end{cases}$$

Alors on trouve que la forme quadratique désignée par χ, § XIV, s'évanouit, et que les nombres caractéristiques $\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_i, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i$ sont respectivement égaux à μ_i, ν_i, p_i, q_i (1). Écrivant donc, pour abréger, ζ_i au lieu de $\zeta_{\mu_i, \nu_i, p_i, q_i}$, et introduisant les modules transformés dans la fonction où se fait la substitution relative aux arguments, on aura cette proposition :

Les quatre fonctions représentées par chacun de ces quatre types (2) :

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \zeta_i\left(x,\ y,\ kz,\ ku,\ \frac{1}{k}G,\ \frac{1}{k}H,\ \frac{1}{k}G'\right), \\ \text{II.} & \zeta_i\left(x,\ ky,\ z,\ ku,\ \frac{1}{k}G,\ H,\ kG'\right), \\ \text{III.} & \zeta_i\left(hx,\ y,\ kz,\ u,\ kG,\ H,\ \frac{1}{k}G'\right), \\ \text{IV.} & \zeta_i(kx,\ ky,\ z,\ u,\ kG,\ kH,\ kG'), \end{array}$$

s'expriment par des polynomes entiers homogènes et du degré k, composés des quatre fonctions

$$\zeta_i(x, y, z, u, G, H, G').$$

(1) Cette dernière circonstance peut toujours être réalisée à l'égard de toutes les substitutions réduites. Rien n'empêche, en effet, de prendre pour chacun des nombres désignés par *i, i', i''* un système quelconque de résidus suivant le module *k*, au lieu des résidus minima 0, 1, 2, ..., $k-1$. Or, en faisant choix des *k* nombres pairs 0, 2, 4, ..., $2(k-1)$, on voit immédiatement qu'on aura

$$\mathfrak{m}_i \equiv \mu_i, \quad \mathfrak{n}_i \equiv \nu_i, \quad \mathfrak{p}_i \equiv p_i, \quad \mathfrak{q}_i \equiv q_i \quad \text{mod } 2.$$

(2) On peut remarquer que les transformations relatives aux fonctions I et IV correspondent parfaitement à ce que Jacobi nomme, dans la théorie des fonctions elliptiques, *transformatio prima, moduli majoris in minorem* et *transformatio secunda minoris in majorem*. (Fundamenta, p. 56.)

Cela posé, il est clair qu'en appliquant l'une après l'autre les transformations relatives aux fonctions I et IV ou II et III, on parviendra de ces deux manières à l'expression de

$$\zeta_i(kx, ky, kz, ku, G, H, G'),$$

par des polynomes entiers homogènes et du degré k^2, contenant les quatre fonctions aux mêmes modules

$$\zeta_i(x, y, z, u, G, H, G').$$

Revenons maintenant des fonctions ζ aux fonctions de deux arguments dont elles tirent leur origine, nous obtiendrons le théorème fondamental de la multiplication des transcendantes abéliennes, à savoir que *les quatre fonctions* $\Theta_i(kx, ky)$ *sont des polynomes entiers, homogènes et du degré* k^2 *composés des quatre fonctions* $\Theta_i(x, y)$.

XVII.

Les formules de multiplication pour les quotients quadruplement périodiques, provenant de la division de deux fonctions Θ, découlent naturellement des théorèmes qui viennent d'être établis. Seulement, il importe de préciser les divers groupes de trois quotients, qui correspondront respectivement aux divers groupes de quatre fonctions Θ_i, dont les nombres caractéristiques μ_i, ν_i, p_i, q_i sont assujettis aux conditions

$$(20\ bis)\quad \left.\begin{cases} \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \equiv 0, & \nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \equiv 0, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 \equiv 0, & q_0 + q_1 + q_2 + q_3 \equiv 0, \\ \multicolumn{2}{c}{s_0 + s_1 + s_2 + s_3 \equiv 0,} \end{cases}\right\} \pmod 2.$$

Je me fonderai, pour cela, sur la distinction de ces quotients en deux genres bien différents, telle que l'a faite M. Veierstrass, non seulement pour les fonctions abéliennes du premier ordre que nous considérons en ce moment, mais pour celles d'un ordre quelconque (1). Les quotients du premier genre, en adoptant les

(1) Voyez *Journal de Crelle*, tome 47, ou dans le *Journal de Liouville* (traduction de M. Wœpcke), le Mémoire dans lequel ce savant géomètre a donné un aperçu de ses grandes et belles découvertes. Voyez aussi, dans le tome XI du *Recueil des Savants Étrangers*, le Mémoire de M. Rosenhain couronné par l'Académie,

notations de cet auteur, seront désignés par al $(x, y)_\alpha$, avec un seul indice qui recevra les valeurs 0, 1, 2, 3, 4. Ils s'expriment comme il suit, par les fonctions $\Theta_{\mu, \nu, p, q}$, savoir :

$$\mathrm{al}_0 = \frac{\Theta_{1000}}{\Theta_{0000}},$$

$$\mathrm{al}_1 = \frac{\Theta_{1001}}{\Theta_{0000}},$$

$$\mathrm{al}_2 = \frac{\Theta_{0101}}{\Theta_{0000}},$$

$$\mathrm{al}_3 = \frac{\Theta_{0111}}{\Theta_{0000}},$$

$$\mathrm{al}_4 = \frac{\Theta_{0011}}{\Theta_{0000}}.$$

Ceux du second genre seront représentés par $\mathrm{al}(x, y)_{\alpha,\beta}$, avec deux indices, devant chacun recevoir encore les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, et qu'on pourra permuter entre eux. Ils sont au nombre de dix, et s'expriment de cette manière :

$$\mathrm{al}_{0,1} = \mathrm{al}_{1,0} = \frac{\Theta_{0001}}{\Theta_{0000}},$$

$$\mathrm{al}_{0,2} = \mathrm{al}_{2,0} = \frac{\Theta_{1101}}{\Theta_{0000}}.$$

$$\mathrm{al}_{0,3} = \mathrm{al}_{3,0} = \frac{\Theta_{1111}}{\Theta_{0000}},$$

$$\mathrm{al}_{0,4} = \mathrm{al}_{4,0} = \frac{\Theta_{1011}}{\Theta_{0000}},$$

$$\mathrm{al}_{1,2} = \mathrm{al}_{2,1} = \frac{\Theta_{1100}}{\Theta_{0000}},$$

$$\mathrm{al}_{1,3} = \mathrm{al}_{3,1} = \frac{\Theta_{1110}}{\Theta_{0000}},$$

$$\mathrm{al}_{1,4} = \mathrm{al}_{4,1} = \frac{\Theta_{1010}}{\Theta_{0000}},$$

$$\mathrm{al}_{2,3} = \mathrm{al}_{3,2} = \frac{\Theta_{0010}}{\Theta_{0000}},$$

$$\mathrm{al}_{2,4} = \mathrm{al}_{4,2} = \frac{\Theta_{0110}}{\Theta_{0000}},$$

$$\mathrm{al}_{3,4} = \mathrm{al}_{4,3} = \frac{\Theta_{0100}}{\Theta_{0000}};$$

---

et qui, beaucoup plus complet sous ce point de vue que celui de Göpel, renferme les expressions du système des quinze quotients périodiques, telles (sauf une légère modification) que les donne M. Weierstrass.

les indices des fonctions Θ étant déterminés dans ces formules par la condition qu'en supposant

$$\mathrm{al}_\alpha = \frac{\Theta_{\mu\nu pq}}{\Theta_{0000}}, \qquad \mathrm{al}_\beta = \frac{\Theta_{\mu'\nu'p'q'}}{\Theta_{0000}}, \qquad \mathrm{al}_{\alpha,\beta} = \frac{\Theta_{\mu''\nu''p''q''}}{\Theta_{0000}},$$

μ'', ν'', p'', q'' soient les valeurs 0 ou 1, qui satisfont aux relations

$$\left.\begin{matrix} \mu'' \equiv \mu + \mu', & \nu'' \equiv \nu + \nu' \\ p'' \equiv p + p', & q'' \equiv q + q' \end{matrix}\right\} \text{mod. } 2.$$

Cela posé, on aura ce théorème :

Tous les groupes de trois quotients $\mathrm{al}(x, y)$ *formés avec quatre fonctions dont les nombres caractéristiques* μ_i, ν_i, p_i, q_i *vérifient les équations* (20 *bis*) *seront compris dans cette forme générale :*

$$\mathrm{al}(x, y)_\alpha, \qquad \mathrm{al}(x, y)_{\beta,\gamma}, \qquad \mathrm{al}(x. y)_{\delta,\varepsilon},$$

sous la condition que les indices α, β, γ, δ, ε seront tous différents les uns des autres.

Cette condition admise, le théorème fondamental pour la multiplication des arguments dans les fonctions abéliennes quadruplement périodiques s'énonce ainsi :

Les trois fonctions

$$\mathrm{al}(kx, ky)_\alpha, \qquad \mathrm{al}(kx, ky)_{\beta,\gamma}, \qquad \mathrm{al}(kx, ky)_{\delta,\varepsilon}$$

sont des fractions rationnelles, ayant pour numérateurs et dénominateur commun des polynomes entiers et du degré k^2, *par rapport à*

$$\mathrm{al}(x, y)_\alpha, \qquad \mathrm{al}(x, y)_{\beta,\gamma}, \qquad \mathrm{al}(x, y)_{\delta,\varepsilon}.$$

Ces trois fonctions sont d'ailleurs liées par une équation du quatrième degré, conséquence de l'équation homogène et du même degré qui existe entre les quatre fonctions $\Theta_i(x, y)$.

XVIII.

C'est aux résultats précédents que je me suis arrêté jusqu'ici dans l'étude de la transformation des fonctions abéliennes, et je vais terminer cet exposé succinct de mes recherches, en faisant voir comment cette théorie analytique de la transformation se trouve étroitement liée à la théorie analytique des formes quadratiques dont j'ai parlé § IV. Reprenons le théorème du § XIV, consistant en ce que :

Les quatre fonctions représentées par

$$e^{i\pi\chi}\zeta_{\mu_i\nu_i p_i q_i}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{U}, \mathrm{G}, \mathrm{H}, \mathrm{G}'),$$

si l'on attribue à l'indice i les valeurs 0, 1, 2, 3, *s'expriment au moyen de fonctions homogènes et du degré k, des quatre quantités*

$$\zeta_{\mathfrak{m}_i\mathfrak{n}_i\mathfrak{p}_i\mathfrak{q}_i}(x, y, z, u, g, h, g'),$$

les modules g, h, g' dépendant de G, H, G′, *par les équations* (14) *du* § VII, *et les arguments* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{U}$ de x, y, z, u, *par celles-ci :*

$$(22)\qquad \begin{cases} \mathfrak{X} = a_0x + b_0y + c_0z + d_0u, \\ \mathfrak{Y} = a_1x + b_1y + c_1z + d_1u, \\ \mathfrak{Z} = a_2x + b_2y + c_2z + d_2u, \\ \mathfrak{U} = a_3x + b_3y + c_3z + d_3u. \end{cases}$$

Or, à cette relation ainsi formulée entre les transcendantes ζ, de différents arguments et de différents modules, correspond la relation arithmétique que donne le théorème suivant :

Soit

$$\mathrm{G} = \mathfrak{G}_0 + i\mathfrak{G},\quad \mathrm{H} = \mathfrak{H}_0 + i\mathfrak{H},\quad \mathrm{G}' = \mathfrak{G}'_0 + i\mathfrak{G}',\quad \mathrm{H}^2 - \mathrm{GG}' = \mathfrak{D}_0 + i\mathfrak{D},$$
$$g = \mathfrak{g}_0 + i\mathfrak{g},\quad h = \mathfrak{h}_0 + i\mathfrak{h},\quad g' = \mathfrak{g}'_0 + i\mathfrak{g}',\quad h^2 - gg' = \mathfrak{d}_0 + i\mathfrak{d};$$

nommons $\mathfrak{F}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{U})$ *la forme quadratique qui s'est déjà présentée* § VIII, *savoir :*

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{U}) = \mathfrak{G}'x^2 + \mathfrak{G}\mathfrak{Y}^2 &+ (\mathfrak{G}'\mathfrak{D}_0 - \mathfrak{G}'_0\mathfrak{D})\mathfrak{Z}^2 \\ &+ (\mathfrak{G}\mathfrak{D}_0 - \mathfrak{G}_0\mathfrak{D})\mathfrak{U}^2 - 2\mathfrak{H}\mathfrak{X}\mathfrak{Y} - 2(\mathfrak{G}'_0\mathfrak{H} - \mathfrak{G}'\mathfrak{H}_0)\mathfrak{X}\mathfrak{Z} \\ &- 2(\mathfrak{G}_0\mathfrak{H} - \mathfrak{G}\mathfrak{H}_0)\mathfrak{Y}\mathfrak{U} - 2(\mathfrak{D}\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{D}_0\mathfrak{H})\mathfrak{Z}\mathfrak{U} \\ &- 2(\mathfrak{H}\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{G}\mathfrak{G}'_0)\mathfrak{Y}\mathfrak{Z} - 2(\mathfrak{H}\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{G}_0\mathfrak{G}')\mathfrak{X}\mathfrak{U}, \end{aligned}$$

et considérons de même l'expression semblable

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(x, y, z, u) = \mathfrak{g}'x^2 + \mathfrak{g}y^2 &+ (\mathfrak{g}'\mathfrak{d}_0 - \mathfrak{g}'_0\mathfrak{d})z^2 + (\mathfrak{g}\mathfrak{d}_0 - \mathfrak{g}_0\mathfrak{d})u^2 \\ &- 2\mathfrak{h}xy - 2(\mathfrak{g}'_0\mathfrak{h} - \mathfrak{g}'\mathfrak{h}_0)xz - 2(\mathfrak{g}_0\mathfrak{h} - \mathfrak{g}\mathfrak{h}_0)yu \\ &- 2(\mathfrak{d}\mathfrak{h}_0 - \mathfrak{d}_0\mathfrak{h})zu - 2(\mathfrak{h}\mathfrak{h}_0 - \mathfrak{g}\mathfrak{g}'_0)yz - 2(\mathfrak{h}\mathfrak{h}_0 - \mathfrak{g}_0\mathfrak{g}')xu. \end{aligned}$$

Les variables $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{U}$ *étant liées à* x, y, z, u *par les équations* (22), *dont les coefficients sont des nombres entiers assujettis aux conditions fondamentales*

$$(23)\qquad \begin{cases} a_0d_1 + b_0c_1 - c_0b_1 - d_0a_1 = 0, \\ a_0d_2 + b_0c_2 - c_0b_2 - d_0a_2 = 0, \\ a_0d_3 + b_0c_3 - c_0b_3 - d_0a_3 = k, \\ a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 - d_1a_2 = k, \\ a_1d_3 + b_1c_3 - c_1b_3 - d_1a_3 = 0, \\ a_2d_3 + b_2c_3 - c_2b_3 - d_2a_3 = 0, \end{cases}$$

on aura identiquement

$$\frac{\mathfrak{F}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{U})}{\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{G}\mathfrak{G}'} = k\,\frac{\mathfrak{f}(x, y, z, u)}{\mathfrak{h}^2 - \mathfrak{g}\mathfrak{g}'}.$$

Telle est donc la nature de la relation entre ces deux formes quadratiques, semblablement composées avec les modules G, H, G′ et g, h, g', que la première se change en la seconde multipliée par k, au moyen de la substitution qui transforme les transcendantes ζ aux modules G, H, G′, en des fonctions homogènes et du degré k, des transcendantes analogues aux modules g, h, g'. On voit ainsi comment vient se présenter cette étude arithmétique de formes particulières à quatre indéterminées, où l'on n'emploie pas comme instrument analytique les substitutions les plus générales entre deux groupes de quatre variables, mais les substitutions particulières (22) définies par les équations (23), et qui reproduisent des formes du même genre. C'est précisément à cette idée que je me suis déjà trouvé conduit dans un autre travail (*Journal de Crelle*, t. 47, p. 343), en ayant en vue l'étude purement arithmétique des nombres entiers complexes $a + b\sqrt{-1}$. J'ai pu alors traiter, par les méthodes propres aux formes binaires, les principales questions concernant les formes particulières à quatre indéterminées qui étaient l'objet de mes recherches, et ajouter par là de nouveaux caractères de similitude entre les nombres entiers réels et les nombres complexes [1].

---

[1] En poursuivant les recherches que je viens de rappeler, j'ai obtenu le théorème suivant, qui offre un nouvel exemple de cette analogie :

Les équations à coefficients entiers complexes et en nombre infini de la forme $az^n + bz^{n-1} + \ldots + gz + h = 0$, *pour lesquelles la norme du discriminant (c'est-*

Un pareil rapprochement entre les formes $\mathfrak{F}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{V})$ et les formes binaires semble également devoir se présenter; on peut du moins le présumer, d'après les propriétés relatives aux formes adjointes, énoncées au § VIII, et surtout par cette expression remarquable et facile à vérifier, savoir :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{V}) = {} & \mathfrak{G}'\mathfrak{X}_1^2 - 2\mathfrak{H}\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{G}\mathfrak{Y}_1^2 \\ & + (\mathfrak{G}\mathfrak{G}' - \mathfrak{H}^2)(\mathfrak{G}'\mathfrak{Z}^2 + 2\mathfrak{H}\mathfrak{Z}\mathfrak{V} + \mathfrak{G}\mathfrak{V}^2),\end{aligned}$$

où j'ai fait, pour abréger,

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X} + \mathfrak{H}_0\mathfrak{Z} + \mathfrak{G}_0\mathfrak{V}, \qquad \mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y} + \mathfrak{G}'_0\mathfrak{Z} + \mathfrak{H}_0\mathfrak{V}.$$

Cependant l'analogie de ces formes particulières, que j'ai nommées à indéterminées imaginaires conjuguées avec les formes binaires, ne persiste pas toujours; parfois, comme je l'ai fait voir, il arrive qu'on ait à la suivre dans plusieurs directions différentes, et bientôt on est amené à des questions où la nature des formes à quatre variables se manifeste sous un point de vue qui lui est propre, et qui exige de nouveaux principes. Les mêmes circonstances viendront-elles s'offrir dans les questions analogues dont le point de départ s'est trouvé dans la théorie des fonctions abéliennes? C'est là un ordre de considérations arithmétiques aussi intéressantes que difficiles, sur lesquelles je pourrai peut-être un jour offrir aux amis de la science le résultat de mes recherches.

à-dire du nombre entier complexe, égal à $a^{2(n-1)}$ multiplié par le produit symétrique des carrés des différences des racines), conserve la même valeur, ne contiennent qu'un nombre essentiellement limité d'irrationalités distinctes. (Voyez pour le théorème analogue, relatif aux nombres réels, le *Journal de Crelle*, t. 47, p. 335.)

REMARQUE SUR UN THÉORÈME DE CAUCHY.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XLI.

C'est à M. Cauchy qu'on doit la première démonstration générale de la réalité des racines de l'équation remarquable à l'aide de laquelle se déterminent les inégalités séculaires des éléments du mouvement elliptique des planètes. Cette équation s'obtient, comme on sait, en égalant à zéro le déterminant du système

$$\Theta = \left\{\begin{matrix} a_{1,1} - \theta & a_{2,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} - \theta & \dots & a_{n,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & \dots & a_{n,3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{n,n} - \theta \end{matrix}\right\},$$

dont les éléments $a_{\mu,\nu}$ sont des quantités réelles soumises à cette condition,

$$a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}.$$

J'ai fait, au sujet de cette équation, la remarque suivante que l'illustre géomètre a bien voulu m'engager à communiquer à l'Académie. Supposons que les éléments $a_{\mu,\nu}$ du déterminant cessent d'être réels et prennent des valeurs imaginaires quelconques, mais avec la condition que $a_{\mu,\nu}$ et $a_{\nu,\mu}$ soient des quantités conjuguées. Il est aisé de voir que le nouveau déterminant ainsi formé et que je nommerai Ω, sera essentiellement réel quoique composé d'éléments imaginaires. Il ne change pas de valeur en effet en y mettant $-\sqrt{-1}$ au lieu de $\sqrt{-1}$, car on ne fait ainsi que remplacer $a_{\mu,\nu}$ par $a_{\nu,\mu}$, c'est-à-dire substituer les colonnes horizontales aux colonnes verticales, et l'on sait bien que cette transposition n'altère pas la valeur d'un déterminant. Cela posé, l'équation $\Omega = 0$ conserve la propriété si remarquable de l'équation $\Theta = 0$, *elle a toutes ses racines essentiellement réelles*. On peut le démontrer de plusieurs manières, par exemple en transformant le déterminant Ω en un autre à éléments réels, d'un nombre double de colonnes et symétrique par rapport à la diagonale, de manière à retrouver précisément la forme analytique du déterminant Θ. On obtient aussi une démonstration directe en employant la belle et savante méthode qu'a donnée mon ami M. le Dr Borchardt, de Berlin, pour calculer les fonctions de M. Sturm dans le cas de l'équation $\Theta = 0$. Quoi qu'il en soit, la réalité des racines une fois établie, on détermine par la règle suivante combien il s'en trouve entre deux limites données θ_0 et θ_1. Nommons Ω_i le déterminant du système

$$\left\{\begin{matrix} a_{1,1}-\theta & a_{2,1} & \dots & a_{i,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2}-\theta & \dots & a_{i,2} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{1,i} & a_{2,i} & \dots & a_{i,i}-\theta \end{matrix}\right\}$$

calculé de manière que le terme principal ait le signe $+$, et désignons par (θ) le nombre des termes positifs de la suite

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \Omega_3, \quad \dots, \quad \Omega_n.$$

Si l'on suppose $\theta_1 > \theta_0$, la quantité (θ_0) sera plus grande que (θ_1), *et la différence* $(\theta_0)-(\theta_1)$ *sera précisément égale au nombre des racines de l'équation* $\Omega = 0$ *qui sont comprises entre* θ_0 et θ_1. On remarquera que la suite

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \Omega_3, \quad \dots, \quad \Omega_n$$

est plus simple que la suite des dérivées du premier membre de l'équation proposée qui serviraient d'ailleurs au même usage à cause de la réalité de toutes ses racines, et sans doute il serait possible de passer directement de la seconde suite à la première, comme l'a fait M. Cauchy dans une circonstance analytique très semblable (*Comptes rendus*, t. XL, p. 1329). Mais, au point de vue où je me suis placé, l'équivalence des deux suites, comme l'existence d'une infinité d'autres qui jouissent des mêmes propriétés, se déduisent immédiatement d'une proposition élémentaire et fondamentale de la théorie des formes quadratiques. Au reste, c'est dans l'étude algébrique des formes quadratiques, mais des formes quadratiques d'une nature toute particulière et dont je vais donner la définition, que vient s'offrir d'une manière directe l'équation $\Omega = 0$. Leur caractère principal consiste en ce que les

indéterminées y sont partagées en deux groupes de variables imaginaires, les variables de l'un des groupes étant les conjuguées des variables de l'autre groupe. Ainsi, en représentant $2n$ variables imaginaires par

$$\begin{matrix} X = x + x'\sqrt{-1}, & Y = y + y'\sqrt{-1}, & \dots, & U = u + u'\sqrt{-1}, \\ X_0 = x - x'\sqrt{-1}, & Y_0 = y - y'\sqrt{-1}, & \dots, & U_0 = u - u'\sqrt{-1}, \end{matrix}$$

on aura l'expression analytique suivante de ces formes, savoir

$$\begin{aligned} \varphi = \quad & X_0(a_{1,1}X + a_{1,2}Y + \dots + a_{1,n}U) \\ & + Y_0(a_{2,1}X + a_{2,2}Y + \dots + a_{2,n}U) \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + U_0(a_{n,1}X + a_{n,2}Y + \dots + a_{n,n}U), \end{aligned}$$

et cette expression sera évidemment réelle en mettant en évidence $x, y, \dots, u, x', y', \dots, u'$, si les constantes $a_{\mu,\nu}$ et $a_{\nu,\mu}$ sont comme précédemment des quantités imaginaires conjuguées. C'est principalement en vue de l'étude arithmétique des nombres entiers complexes de la forme $a + b\sqrt{-1}$ que j'ai introduit la notion de ces nouvelles formes, comme on pourra le voir dans un de mes Mémoires publiés dans le *Journal de Crelle*, t. 47. Mais, dans ce Mémoire, je me suis borné au cas le plus simple où l'on considère seulement deux paires d'indéterminées imaginaires conjuguées. Depuis, en essayant d'étendre ces premières recherches, j'ai reconnu qu'elles conduisaient à des principes nouveaux et féconds pour l'étude des équations algébriques à coefficients complexes. Ainsi, au seul point de vue algébrique, je me suis trouvé amené à la détermination du nombre de leurs racines qui sont comprises dans l'intérieur d'un rectangle, d'un cercle et d'une infinité d'autres courbes fermées ou à branches infinies comme l'hyperbole (1). Ce sont autant de cas du beau théorème de M. Cauchy sur le nombre des racines qui sont renfermées dans un contour quelconque, et dont la démonstration très facile et très simple présente ce caractère particulier d'être indépendante de toute considération de continuité.

(1) Voyez sur ces questions l'extrait d'une Lettre que j'ai adressée à M. Borchardt et qui a été publiée dans le *Journal de Crelle*, t. 52.