Si l'on donne une seconde substitution également réelle,

$$(2)\quad \begin{cases} x = a\mathrm{X}_0 + a'\mathrm{X}_1 + \ldots + a^{(n)}\mathrm{X}_n, \\ y = b\mathrm{X}_0 + b'\mathrm{X}_1 + \ldots + b^{(n)}\mathrm{X}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v = l\mathrm{X}_0 + l'\mathrm{X}_1 + \ldots + l^{(n)}\mathrm{X}_n, \end{cases}$$

de laquelle résulte la transformation analogue

$$f = \eta_0 \mathrm{X}_0^2 + \eta_1 \mathrm{X}_1^2 + \ldots + \eta_n \mathrm{X}_n^2,$$

il s'agit de prouver que le nombre des coefficients ε, qui auront un signe donné, sera égal au nombre des coefficients η, qui auront le même signe.

A cet effet, et pour fixer les idées, supposons négatifs $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i$ et positifs les coefficients suivants : $\varepsilon_{i+1}, \varepsilon_{i+2}, \ldots, \varepsilon_n$. Supposons aussi que $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_k$ soient négatifs, tandis que $\eta_{k+1}, \eta_{k+2}, \ldots, \eta_n$ seront positifs. On aura d'abord en égalant entre elles les deux expressions de la forme f,

$$\varepsilon_0 x_0^2 + \varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_n x_n^2 = \eta_0 \mathrm{X}_0^2 + \eta_1 \mathrm{X}_1^2 + \ldots + \eta_n \mathrm{X}_n^2$$

les variables étant liées par ces équations

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha x_0 + \alpha' x_1 + \ldots + \alpha^{(n)} x_n = a\mathrm{X}_0 + a'\mathrm{X}_1 + \ldots + a^{(n)}\mathrm{X}_n, \\ \beta x_0 + \beta' x_1 + \ldots + \beta^{(n)} x_n = b\mathrm{X}_0 + b'\mathrm{X}_1 + \ldots + b^{(n)}\mathrm{X}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda x_0 + \lambda' x_1 + \ldots + \lambda^{(n)} x_n = l\mathrm{X}_0 + l'\mathrm{X}_1 + \ldots + l^{(n)}\mathrm{X}_n. \end{cases}$$

Avant d'aller plus loin, j'observe qu'on pourra toujours les résoudre par rapport aux indéterminées x ou X, si l'invariant de f est différent de zéro, et si aucune des quantités ε et η n'est nulle. Soient, en effet, J l'invariant de f, δ et d les déterminants relatifs aux substitutions (1) et (2); on aura

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n = \mathrm{J}\,\delta^2,$$
$$\eta_0 \eta_1 \ldots \eta_n = \mathrm{J}\,d^2,$$

de sorte que d et δ ne pourront jamais être supposés nuls sous les conditions admises.

Cela remarqué, remplaçons $x_0, x_1, \ldots, x_i$ d'une part, x_{i+1},

$x_{i+2}, \ldots, x_n$ de l'autre, par

$$\frac{x_0}{\sqrt{-\varepsilon_0}}, \quad \frac{x_1}{\sqrt{-\varepsilon_1}}, \quad \ldots, \quad \frac{x_i}{\sqrt{-\varepsilon_i}} \quad \text{et} \quad \frac{x_{i+1}}{\sqrt{\varepsilon_{i+1}}}, \quad \frac{x_{i+2}}{\sqrt{\varepsilon_{i+2}}}, \quad \ldots, \quad \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon_n}}.$$

Remplaçons de même $\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_k$ par

$$\frac{\mathrm{X}_0}{\sqrt{-\eta_0}}, \quad \frac{\mathrm{X}_1}{\sqrt{-\eta_1}}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathrm{X}_k}{\sqrt{-\eta_k}}$$

et $\mathrm{X}_{k+1}, \mathrm{X}_{k+2}, \ldots, \mathrm{X}_n$ par

$$\frac{\mathrm{X}_{k+1}}{\sqrt{\eta_{k+1}}}, \quad \frac{\mathrm{X}_{k+2}}{\sqrt{\eta_{k+2}}}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathrm{X}_n}{\sqrt{\eta_n}};$$

puis effectuons, par rapport à ces nouvelles indéterminées, la résolution des équations (3). On sera par là amené à la relation suivante

$$\begin{aligned} &-x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + \ldots + x_n^2 \\ &= -\mathrm{X}_0^2 - \mathrm{X}_1^2 - \ldots - \mathrm{X}_k^2 + \mathrm{X}_{k+1}^2 + \mathrm{X}_{k+2}^2 + \ldots + \mathrm{X}_n^2, \end{aligned}$$

où l'on pourra supposer

$$(4)\quad \begin{cases} x_0 = p_0 \mathrm{X}_0 + q_0 \mathrm{X}_1 + \ldots + s_0 \mathrm{X}_n, \\ x_1 = p_1 \mathrm{X}_0 + q_1 \mathrm{X}_1 + \ldots + s_1 \mathrm{X}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = p_n \mathrm{X}_0 + q_n \mathrm{X}_1 + \ldots + s_n \mathrm{X}_n, \end{cases}$$

les coefficients étant essentiellement *réels*. Or, je vais établir l'impossibilité d'une telle relation dès que l'on suppose k différent de i. Pour fixer les idées j'admettrai que l'on ait $k > i$, et j'observerai que, parmi les diverses équations auxquelles les coefficients de la substitution (4) doivent satisfaire, on voit s'offrir en premier lieu celle-ci

$$-p_0^2 - p_1^2 - \ldots - p_i^2 + p_{i+1}^2 + p_{i+2}^2 + \ldots + p_n^2 = -1,$$

qui ne pourrait évidemment être vérifiée que pour des valeurs imaginaires des quantités p, si l'on avait

$$p_0 = 0, \qquad p_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad p_i = 0.$$

Or, on va voir comment de la substitution (4) il est possible d'en déduire une nouvelle, qui, transformant le polynome

$$-x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + \ldots + x_n^2 \tag{5}$$

en

$$-X_0^2 - X_1^2 - \ldots - X_k^2 + X_{k+1}^2 + X_{k+2}^2 + \ldots + X_n^2, \tag{6}$$

ait encore ses coefficients réels, et de plus présente ce caractère, que l'indéterminée X_0 ait disparu dans les expressions des indéterminées $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$. Comme on suppose $k > i$, $k-1$ sera au moins égal à i et, les conditions précédemment énoncées se trouvant réalisées, notre théorème se trouve par là même démontré.

A cet effet, nous remarquerons que l'on peut, sans changer le polynome (6), y remplacer X_0 et X_1 par

$$\cos\varphi X_0 + \sin\varphi X_1, \quad \sin\varphi X_0 - \cos\varphi X_1$$

et introduire par là un angle arbitraire dans les formules (4), qui deviendront

$$\begin{aligned}
x_0 &= (p_0 \cos\varphi + q_0 \sin\varphi) X_0 + (p_0 \sin\varphi - q_0 \cos\varphi) X_1 + \ldots,\\
x_1 &= (p_1 \cos\varphi + q_1 \sin\varphi) X_0 + (p_1 \sin\varphi - q_1 \cos\varphi) X_1 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_n &= (p_n \cos\varphi + q_n \sin\varphi) X_0 + (p_n \sin\varphi - q_n \cos\varphi) X_1 + \ldots.
\end{aligned}$$

Maintenant et quels que soient les coefficients p et q, etc. on pourra disposer de cet angle, de manière à avoir

$$p_0 \cos\varphi + q_0 \sin\varphi = 0,$$

et l'on sera amené à une nouvelle substitution également réelle, où l'indéterminée X_0 aura déjà disparu dans la valeur de x_0. Cela fait, partons de cette nouvelle substitution pour y introduire de nouveau un angle arbitraire, en remplaçant X_1 et X_2 par

$$\cos\varphi X_1 + \sin\varphi X_2, \quad \sin\varphi X_1 - \cos\varphi X_2,$$

ce qui se fera encore sans changer le polynome (6). On voit, en raisonnant comme tout à l'heure, que l'on pourra annuler le coefficient de X_1 dans l'expression de x_0. Or, des calculs analogues pourront être continués, jusqu'à ce que l'on soit amené à remplacer X_{k-1} et X_k par

$$\cos\varphi X_{k-1} + \sin\varphi X_k, \quad \sin\varphi X_{k-1} - \cos\varphi X_k,$$

et, en dernière analyse, on voit que de la substitution (4) on aura déduit, par des opérations toujours possibles, une substitution réelle dans laquelle $X_0, X_1, \ldots, X_{k-1}$ auront disparu de l'expression de l'indéterminée x_0. Ce premier point établi, nous concevons qu'on répète, en raisonnant sur l'indéterminée suivante x_1, des opérations toutes semblables, mais en se bornant à faire disparaître de proche en proche, dans l'expression de cette indéterminée, les coefficients de $X_0, X_1, \ldots, X_{k-2}$. On n'aura ainsi besoin d'introduire dans les substitutions successives que les indéterminées $X_0, X_1, \ldots, X_{k-1}$, de sorte que, ces calculs faits, on ne verra reparaître dans la valeur de x_0 aucune des indéterminées qui en ont déjà été éliminées. Cela posé, il est clair qu'en raisonnant d'une manière analogue successivement sur x_2, x_3, etc., on sera en dernier lieu conduit à faire disparaître la seule indéterminée X_0, de la valeur de x_{k-1}. Elle ne se trouvera point d'ailleurs dans les indéterminées précédentes $x_{k-2}, x_{k-3}, \ldots, x_0$, et de la sorte on sera parvenu à une dernière substitution, conséquence de la substitution (4), transformant encore le polynome (5) dans le polynome (6) et qui tombe dans le cas indiqué plus haut, où il est manifestement impossible que les coefficients soient des quantités réelles.

SUR

LES FORMES CUBIQUES A DEUX INDÉTERMINÉES.

Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, t. I, 1857.

Dans mon Mémoire *Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres* (*Journal de M. Crelle*, t. 41) [1], j'ai fondé la réduction arithmétique des formes cubiques sur la considération de certaines formes quadratiques, fonctions rationnelles des racines de ces formes, et qui jouissent de propriétés singulières, que je vais indiquer en peu de mots.

Soit la forme cubique proposée

$$f = (A, B, B', A')(x, y)^3 = A(x - \alpha y)(x - \beta y)(x - \gamma y).$$

Suivant que les racines seront toutes réelles, ou que l'une d'elles le sera seulement et, par exemple, β et γ étant imaginaires conjuguées, ces formes seront

$$\lambda(x - \alpha y)^2 + \mu(x - \beta y)^2 + \nu(x - \gamma y)^2, \tag{1}$$

et

$$\lambda(x - \alpha y)^2 + 2\mu(x - \beta y)(x - \gamma y), \tag{2}$$

λ, μ, ν étant des constantes arbitraires. Ce sont là du moins les expressions telles qu'elles sont envisagées dans le Mémoire cité précédemment. Mais pour ce que je vais avoir à dire, je modifierai ces expressions de la manière suivante, en considérant au lieu de la forme quadratique (1)

$$A^2[\lambda(\beta - \gamma)^2(x - \alpha y)^2 + \mu(\alpha - \gamma)^2(x - \beta y)^2 + \nu(\alpha - \beta)^2(x - \gamma y)^2] = g,$$

[1] *Voir* p. 164 de ce Volume. E. P.

et, au lieu de la forme (2),

$$A^2[-\lambda(\beta - \gamma)^2(x - \alpha y)^2 + 2\mu(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(x - \beta y)(x - \gamma y)] = h.$$

Il est aisé de voir que l'on arrive ainsi à obtenir deux covariants de la forme proposée, quels que soient λ, μ, ν. Cela posé, soit

$$F = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{C}')(x, y)^3 - \mathfrak{A}(x - ay)(x - by)(x - cy),$$

en prenant

$$\mathfrak{A} = -A^2A' - 2B^3 + 3ABB', \qquad \mathfrak{B} = -B^2B' - AA'B + 2AB'^2,$$
$$\mathfrak{A}' = A'^2A + 2B'^3 - 3A'BB', \qquad \mathfrak{B}' = B'^2B + AA'B' - 2A'B^2,$$

de sorte que F soit le covariant cubique de f. Or, pour concevoir deux formes quadratiques, G et H, composées avec F, comme g et h le sont respectivement avec f, ces formes seront

$$\mathfrak{A}^2[l(b - c)^2(x - ay)^2 + m(a - c)^2(x - by)^2 + n(a - b)^2(x - cy)^2] = G$$

et

$$\mathfrak{A}^2[-l(b - c)^2(x - ay)^2 + 2m(a - b)(a - c)(x - cy)] = H;$$

or, elles jouissent de cette propriété singulière que l'on aura

1° $$G = \Delta g,$$

où Δ est l'invariant de la forme proposée f, en prenant

$$l = -\lambda + \frac{2}{3}(\lambda + \mu + \nu),$$
$$m = -\mu + \frac{2}{3}(\lambda + \mu + \nu),$$
$$n = -\nu + \frac{2}{3}(\lambda + \mu + \nu);$$

2° $$H = \Delta h,$$

en faisant

$$l = \frac{-\lambda + 4\mu}{3},$$
$$m = \frac{+2\lambda - \mu}{3}.$$

Ces formules donnent d'ailleurs

$$lm + ln + mn = \lambda\mu + \lambda\nu + \mu\nu,$$
$$m^2 + 2lm = \mu^2 + 2\lambda\mu.$$

Parmi les nombreuses conséquences arithmétiques qui résultent de là, je me bornerai à indiquer les suivantes :

Supposons $\lambda = \mu = \nu = 1$, les équations donneront $l = m = n = 1$; or, dans ces hypothèses, les formes quadratiques g et h jouissent de cette propriété qu'en effectuant, dans la proposée f, la substitution propre à réduire g, ou la substitution propre à réduire h, suivant que les racines α, β, γ seront toutes réelles ou non, les transformées obtenues seront des formes réduites, dans le sens propre aux formes cubiques. Or, les formes G et H étant, dans le cas où nous nous plaçons, respectivement proportionnelles à g et h, on voit que l'on aura à employer précisément la même substitution pour réduire une forme cubique donnée f et son covariant F.

En d'autres termes, on peut également dire qu'une forme donnée cubique et son covariant cubique sont toujours simultanément de formes réduites ou non réduites, propriété remarquable et qui ne se retrouve pas dans la théorie des formes quadratiques ternaires, où les adjointes des formes réduites ne le sont pas ellesmêmes en général.

LETTRE A CAYLEY

SUR LES FORMES CUBIQUES.

Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, t. I, 1857.

Samedi, 3 mars.

Mon cher Monsieur,

Dans un Mémoire que j'ai adressé il y a bientôt un an à M. Crelle, j'ai annoncé des recherches sur la théorie dont vous vous êtes vousmême occupé et cette recherche doit faire suite à un Mémoire publié dans le Tome 41, dans lequel vous pouvez voir, sur la duplication de la forme

$$\left\{ b^2 - ac, \frac{1}{2}(bc - ad), c^2 - bd \right\}(x, y)^2,$$

des calculs qui ne sont pas sans analogie avec ceux que vous me communiquez (¹). Voici le principe de ces recherches :

Soient la forme proposée $f = (a, b, c, d)(x, y)^3$, φ le covariant ci-dessus $(p, q, r)(x, y)^2$, $p = b^2 - ac$, $2q = bc - ad$, $r = c^2 - bd$, et F le covariant cubique

$$\begin{aligned} F = (A, B, C, D)(x, y)^3 = \quad & (ax^2 + 2bxy + cy^2)(qx + ry) \\ & - (bx^2 + 2cxy + dy^2)(px + qy); \end{aligned}$$

on a ce théorème algébrique :

L'expression la plus générale des formes cubiques ayant le même covariant quadratique φ est

$$F = tf + uF,$$

(¹) Cette Lettre répond à une Lettre de Cayley insérée aussi dans le Tome I du *Quarterly Journal*. E. P.

t et u satisfaisant à l'équation

$$t^2 - \Delta u^2 = 1, \qquad \Delta = q^2 - pr.$$

Cela posé, et introduisant une division en ordres des formes cubiques, basée sur la division en ordres des formes quadratiques φ, j'établis ce lemme :

Si φ appartient à l'ordre P. P., *t et u devront être entiers pour que les coefficients de* F *soient entiers comme ceux de la proposée.*

Voici la démonstration :

Soit $F = (A, B, C, D)(x, y)^3$, on aura

$$\mathrm{a} = at + \mathrm{A}u, \qquad \mathrm{b} = bt + \mathrm{B}u, \qquad \mathrm{c} = ct + \mathrm{C}u, \qquad \mathrm{d} = dt + \mathrm{D}u,$$

$$a\mathrm{d} - b\mathrm{c} + c\mathrm{b} - d\mathrm{a} = 8\Delta u,$$

$$\mathrm{aD} - \mathrm{bC} + \mathrm{cD} - \mathrm{dA} = 4\Delta t,$$

donc $8\Delta u$, $4\Delta t$ sont entiers.

Je joins ensuite à l'équation

$$\mathrm{a} = at + \mathrm{A}u$$

celle-ci

$$q\mathrm{a} - p\mathrm{b} = \mathrm{A}t + \mathrm{a}\Delta u;$$

il en résulte, pour dénominateur commun de t et u,

$$\mathrm{A}^2 - a^2\Delta = p^3.$$

Or, on peut supposer que l'on raisonne sur f, ou une transformée de f, telle que le coefficient p du covariant φ soit premier à Δ et impair, comme le fait souvent Dirichlet. Trouvant donc $4\Delta t =$ entier, $p^3 t =$ entier, je multiplie par λ et μ pris tels que $4\Delta\lambda + p^3\mu = 1$ et j'ajoute, etc.; de même pour u.

Voici donc, si Δ est positif, une infinité de formes à coefficients entiers, qui ont un même covariant φ, à savoir les formes

$$\mathrm{F} = tf + u\mathrm{F},$$

t et u satisfaisant à l'équation $t^2 - \Delta u^2 = 1$.

Or, je fais dans F cette substitution

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= (\mathrm{T} + q\mathrm{U})\chi + \tau\mathrm{UY} \\ y &= -p\mathrm{U}\chi + (\mathrm{T} - q\mathrm{U})y \end{aligned} \right\} \quad \mathrm{T}^2 - \Delta\mathrm{U}^2 = 1,$$

et en écrivant pour abréger

$$(t + u\sqrt{\Delta})(\mathrm{T} + \mathrm{U}\sqrt{\Delta})^3 = \mathrm{t} + \mathrm{u}\sqrt{\Delta},$$

je trouve pour résultant

$$\mathrm{t}f + \mathrm{u}\mathrm{F};$$

d'où je conclus aisément que toutes les formes $tf + u\mathrm{F}$, qui correspondent aux solutions en nombre infini de l'équation $t^2 - \Delta u^2 = 1$, se ramènent, par la substitution dont il s'agit, à celles où $(t + u\sqrt{\Delta})$ est une puissance moindre que 3, de la solution fondamentale $\tau + \upsilon\Delta$. Voici donc seulement les formes non équivalentes qui donnent le même covariant φ :

I.	f,
II.	$\tau f + \upsilon\mathrm{F}$,
III.	$(\tau^2 + \Delta\upsilon^2)f + 2\tau\upsilon\mathrm{F}$.

Je les dis non équivalentes, car, s'il y a un moyen de les transformer l'une dans l'autre, comme elles ont toutes même covariant quadratique φ, ce ne pourra être qu'en employant les substitutions qui changent φ en lui-même, c'est-à-dire les substitutions déjà considérées (1) et dont on a vu l'effet.

Le cas où le coefficient q est impair me semble pouvoir se traiter de même; mais, occupé en ce moment d'une autre recherche, je ne me sens pas le courage nécessaire pour l'entreprendre.

Recevez, Monsieur, l'assurance des sentiments de votre très dévoué

C. H.

P.-S. N'y a-t-il pas quelque chose à compléter dans cette partie de votre méthode où vous dites : « ... ayant trouvé

$$(\mathrm{A}, -\mathrm{B}, \mathrm{C})(\xi, \eta)^2 = (\mathrm{A}, -\mathrm{B}, \mathrm{C})(\xi_1, \eta_1)^2,$$

ce qui implique que ξ_1 et η_1 soient des fonctions linéaires de ξ, η » (¹). Pourquoi?

(¹) *Quarterly Journal*, t. I, 1857, p. 86.

EXTRAIT D'UNE LETTRE A SYLVESTER

SUR LES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION $ax + by = n$.

Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, t. I, 1857.

Je vous renouvelle, et avec plus d'instance, la demande que je vous faisais dans ma dernière lettre, de me parler en détail de votre découverte du nombre des solutions entières et positives de l'équation

$$ax + by + cz + \ldots = n.$$

L'intérêt que vous me marquez avoir pris à cette question m'a engagé à m'en occuper, et sans être sorti jusqu'à présent du cas si simple de l'équation $ax + by = n$, j'en ai vu assez pour être convaincu qu'elle est effectivement très digne d'attention. En attendant que vous me communiquiez vos formules générales, voici de mon côté ce que j'ai rencontré. Me proposant d'abord de déterminer par une méthode directe le système complet des solutions entières et positives de l'équation $ax + by = n$ (où a et b sont positifs et sans diviseurs communs) j'opère comme il suit. Je remarque, en premier lieu, qu'on a

$$ax < n, \qquad by < n,$$

ce qui conduit à faire

$$x = \mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right) - x', \qquad y = \mathrm{E}\left(\frac{n}{b}\right) - y'.$$

$\mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right)$, $\mathrm{E}\left(\frac{n}{b}\right)$ étant les plus grands nombres entiers contenus dans $\frac{n}{a}$, $\frac{n}{b}$, et les nouvelles indéterminées x' et y' devant être nécessairement positives, comme les premières x et y.

Substituant et faisant, pour abréger,

$$n - a\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right) = \alpha, \qquad n - b\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{b}\right) = \beta,$$

α et β étant positifs et respectivement moindres que a et b, il

vient la transformée

$$ax' + by' = n - \alpha - \beta = n',$$

où n est remplacé par n', quantité plus petite, mais certainement positive, car autrement la proposée ne serait pas résoluble dans le sens que nous entendons. Continuons en faisant

$$x' = \mathrm{E}\left(\frac{n'}{a}\right) - x'', \qquad y' = \mathrm{E}\left(\frac{n'}{b}\right) - y'';$$

$$n' - a\,\mathrm{E}\left(\frac{n'}{a}\right) = \alpha', \qquad n' - b\,\mathrm{E}\left(\frac{n'}{b}\right) = \beta';$$

on aura cette nouvelle transformée

$$ax'' + by'' = n' - \alpha' - \beta' = n''.$$

Répétant les mêmes opérations, et posant d'une manière générale

$$x^i = \mathrm{E}\left(\frac{n^i}{a}\right) - x^{i+1}, \qquad y^i = \mathrm{E}\left(\frac{n^i}{b}\right) - y^{i+1},$$

$$n^i - a\,\mathrm{E}\left(\frac{n^i}{a}\right) = \alpha^i, \qquad n^i - b\,\mathrm{E}\left(\frac{n^i}{b}\right) = \beta^i,$$

$$n^i - \alpha^i - \beta^i = n^{i+1},$$

on aura la transformée du rang $i + 1$

$$ax^{i+1} + by^{i+1} = n^{i+1},$$

dont les indéterminées sont liées aux indéterminées primitives par les relations

$$x = \mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{n'}{a}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n''}{a}\right) - \ldots + (-1)^i\,\mathrm{E}\left(\frac{n^i}{a}\right) - (-1)^i x^{i+1},$$

$$y = \mathrm{E}\left(\frac{n}{b}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{n'}{b}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n''}{b}\right) - \ldots + (-1)^i\,\mathrm{E}\left(\frac{n^i}{b}\right) - (-1)^i y^{i+1},$$

sorte de développement en suite convergente, puisque les nombres $n, n', n'', \ldots$ vont toujours en décroissant. Mais ces nombres, si la proposée est effectivement soluble, sont positifs et ne peuvent diminuer indéfiniment; ainsi, après un nombre fini d'opérations, on en trouvera nécessairement deux consécutifs, n^i et n^{i+1} par exemple, égaux entre eux. Or cela entraîne $\alpha^i + \beta^i = 0$ et, par suite, $\alpha^i = 0$, $\beta^i = 0$, puisque toutes les quantités α et β sont positives; il s'ensuit que

$$n^i = a\,\mathrm{E}\left(\frac{n^i}{a}\right) = b\,\mathrm{E}\left(\frac{n^i}{b}\right),$$

c'est-à-dire que n^i est un multiple de ab, a et b étant premiers entre eux par hypothèse. Soit $n^i = \omega ab$; la transformée de rang i (qui se reproduirait identiquement dans les opérations, si on les continuait) aura cette forme

$$ax^i + by^i = \omega ab,$$

qui montre que l'on doit faire

$$x^i = b\xi, \qquad y^i = a\eta,$$

où ξ et η sont des entiers et satisfont à la relation

$$\xi + \eta = \omega.$$

Voici donc les expressions analytiques de toutes les solutions entières et positives de l'équation proposée,

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} x = \mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{n'}{a}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n''}{a}\right) - \ldots + (-)^{i-1}\,\mathrm{E}\left(\frac{n^{i-1}}{a}\right) + (-)^i b\xi, \\ y = \mathrm{E}\left(\frac{n}{b}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{n'}{b}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n''}{b}\right) - \ldots + (-)^{i-1}\,\mathrm{E}\left(\frac{n^{i-1}}{b}\right) + (-)^i a\eta, \end{cases}$$

en attribuant à ξ et η les $\omega + 1$ systèmes de valeurs qui satisfont à la condition $\xi + \eta = \omega$. C'est bien évident, car la totalité des solutions (entières et positives) d'une transformée du rang quelconque i s'obtient par les formules ci-dessus

$$x^i = \mathrm{E}\left(\frac{n^i}{a}\right) - x^{i+1}, \qquad y^i = \mathrm{E}\left(\frac{n^i}{b}\right) - y^{i+1},$$

où x^{i+1} et y^{i+1} doivent être des solutions positives de la transformée suivante, et toutes celles-ci doivent être employées sans exception, aucune d'elles ne pouvant conduire à des valeurs négatives pour x^i et y^i, car elles ont respectivement pour limites supérieures

$$\mathrm{E}\left(\frac{n^{i+1}}{a}\right), \quad \mathrm{E}\left(\frac{n^{i+1}}{b}\right),$$

et l'on a

$$n^{(i+1)} < n^i.$$

Les expressions (A) me semblent d'un calcul arithmétique plus

facile que celles que l'on tirerait de la méthode si connue d'Euler ou de Lagrange. Au fond, cette méthode revient à joindre à l'équation proposée $ax + by = n$, une autre $a'x + b'y = t$; t étant une nouvelle indéterminée, a' et b' étant déduits par les fractions continues de a et b, de manière que $ab' - ba' = 1$. De ces deux équations on tire

$$x = nb' - bt, \qquad y = at - na',$$

et il faudrait en dernier lieu déterminer les valeurs de t qui rendent x et y positifs. Mais j'en viens à la détermination de ω; je me fonde à cet effet sur cette remarque très simple, qu'en appliquant ma méthode à l'équation $ax + by = \mathrm{N}$, où $\mathrm{N} = n + kab$, k étant un nombre entier, on trouve la série N', N'', ..., correspondant parfaitement à la série des nombres n', n'', ..., de sorte que l'on a toujours

$$\mathrm{N}' = n' + kab, \qquad \mathrm{N}'' = n'' + kab, \qquad \text{etc.}\ldots$$

Ainsi, lorsque l'on sera parvenu à la limite des opérations, c'est-à-dire lorsque $n^i = \omega ab$, N^i sera $(\omega + k)ab$; le nombre des solutions entières et positives de la nouvelle équation est donc égal au nombre des solutions de la première, augmenté de k. Cela posé, désignons par ϖ le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{ab}$, et faisons $n = \varpi ab + \nu$, ω sera évidemment égal à ϖ plus le nombre des solutions de l'équation $ax + by = \nu$. Mais si cette équation est possible, comme ν est inférieur à ab, l'application de ma méthode conduira pour dernière transformée à $\xi + \eta = 0$, qui n'admet qu'une seule solution, $\xi = 0$, $\eta = 0$; ainsi $\omega = \varpi$ ou $\varpi + 1$, suivant que l'équation $ax + by = \nu$ est impossible, ou possible, en nombres entiers et positifs.

Bain-de-Bretagne, 12 juin.

SUR LA THÉORIE

DE LA

TRANSFORMATION DES FONCTIONS ABÉLIENNES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XL, 1855.

I.

En représentant par φx un polynome du cinquième ou du sixième degré en x, et posant

$$(1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\varphi x}} + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{\varphi y}} = u, \\ \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{x\,dx}{\sqrt{\varphi x}} + \int_{y_0}^{y} \frac{y\,dy}{\sqrt{\varphi y}} = v, \end{cases}$$

on sait, par les travaux de Göpel et de M. Rosenhain, que $x+y$ et xy s'expriment par des fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions des arguments u et v, qui ont une valeur unique et finie pour toutes les valeurs finies réelles ou imaginaires de ces arguments. Ces illustres géomètres ont en même temps donné, sous une forme analogue, l'expression analytique de treize autres fonctions de u et de v qui dépendent algébriquement, mais d'une manière irrationnelle, des deux premières. Comme elles sont aussi à sens unique pour toutes les valeurs finies des arguments, il est impossible de ne pas les conserver dans le calcul, et le système complet des quinze fonctions se présente dans l'étude des transcendantes abéliennes du premier ordre, comme $\sin am\,u$, $\cos am\,u$ et $\Delta am\,u$ dans la théorie des transcendantes elliptiques. Je désignerai ces quinze fonctions par $f_1(u,v), f_2(u,v), \ldots, f_{15}(u,v)$,

et par $f(u,v)$ l'une quelconque d'entre elles. Semblablement, je nommerai $F_1(u,v)$, $F_2(u,v), \ldots, F_{15}(u,v)$ les fonctions de même nature auxquelles on parviendrait en prenant pour point de départ les équations

$$(2)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{\psi x}}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\alpha+\beta y}{\sqrt{\psi y}}\,dy = u, \\ \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\gamma+\delta x}{\sqrt{\psi x}}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\gamma+\delta y}{\sqrt{\psi y}}\,dx = v. \end{cases}$$

où α, β, γ, δ sont des constantes et ψx un polynome du cinquième ou du sixième degré en x. Maintenant je poserai, comme il suit, le problème de la transformation des fonctions abéliennes du premier ordre :

Le polynome φx étant donné, déterminer les coefficients de ψx et les constantes α, β, γ, δ, de telle sorte que les quinze fonctions $F(u,v)$ puissent s'exprimer rationnellement par les quinze fonctions $f(u,v)$.

II.

On sait que les fonctions symétriques rationnelles de x et y, définies comme fonctions de u et v par les équations (1), possèdent quatre paires de périodes simultanées, et que ces périodes, ou au moins leurs doubles, appartiennent aux quinze fonctions $f(u,v)$. Ainsi, en désignant par les lettres ω et υ les indices simultanés de périodicité, on aura quatre relations de cette forme

$$\begin{aligned} f(u+\omega_0,\ v+\upsilon_0) &= f(u,\ v), \\ f(u+\omega_1,\ v+\upsilon_1) &= f(u,\ v), \\ f(u+\omega_2,\ v+\upsilon_2) &= f(u,\ v), \\ f(u+\omega_3,\ v+\upsilon_3) &= f(u,\ v). \end{aligned}$$

Mais il existe entre ces périodes, telles qu'on les tire du calcul intégral, une liaison exprimée par l'équation suivante :

$$(3)\qquad \omega_0\upsilon_3 - \omega_3\upsilon_0 + \omega_1\upsilon_2 - \omega_2\upsilon_1 = 0.$$

Et si l'on nomme Ω_i et Υ_i les quantités analogues à ω_i et υ_i, dans les fonctions $F(u,v)$, on aura de même

$$(4)\qquad \Omega_0\Upsilon_3 - \Omega_3\Upsilon_0 + \Omega_1\Upsilon_2 - \Omega_2\Upsilon_1 = 0.$$

Cela posé, si l'on demande que les fonctions $F(u, v)$ s'expriment rationnellement par les fonctions $f(u, v)$, il faudra évidemment que les périodes simultanées ω_i et υ_i appartiennent à F, et soient, par suite, des sommes de multiples entiers des périodes Ω_i et Υ_i. On devra donc avoir ces relations linéaires à coefficients entiers, savoir :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{ll} \omega_0 = a_0\Omega_0 + a_1\Omega_1 + a_2\Omega_2 + a_3\Omega_3, & \upsilon_0 = a_0\Upsilon_0 + a_1\Upsilon_1 + a_2\Upsilon_2 + a_3\Upsilon_3, \\ \omega_1 = b_0\Omega_0 + b_1\Omega_1 + b_2\Omega_2 + b_3\Omega_3, & \upsilon_1 = b_0\Upsilon_0 + b_1\Upsilon_1 + b_2\Upsilon_2 + b_3\Upsilon_3, \\ \omega_2 = c_0\Omega_0 + c_1\Omega_1 + c_2\Omega_2 + c_3\Omega_3, & \upsilon_2 = c_0\Upsilon_0 + c_1\Upsilon_1 + c_2\Upsilon_2 + c_3\Upsilon_3, \\ \omega_3 = d_0\Omega_0 + d_1\Omega_1 + d_2\Omega_2 + d_3\Omega_3, & \upsilon_3 = d_0\Upsilon_0 + d_1\Upsilon_1 + d_2\Upsilon_2 + d_3\Upsilon_3. \end{array}\right.$$

Mais, à cause des relations (3) et (4), on voit que les nombres entiers qui composent le système linéaire

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{array}\right\}$$

ne sont pas entièrement arbitraires. L'étude arithmétique des propriétés de ces systèmes particuliers de seize lettres, qui vient ainsi s'offrir, a été le point de départ de mes recherches et m'a donné les résultats suivants.

III.

En premier lieu, et pour satisfaire à la relation

$$\omega_0\upsilon_3 - \omega_3\upsilon_0 + \omega_1\upsilon_2 - \omega_2\upsilon_1 = 0,$$

sous la condition

$$\Omega_0\Upsilon_3 - \Omega_3\Upsilon_0 + \Omega_1\Upsilon_2 - \Omega_2\Upsilon_1 = 0,$$

il faut poser les équations [1]

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} a_0d_1 + b_0c_1 - c_0b_1 - d_0a_1 = 0, \\ a_0d_2 + b_0c_2 - c_0b_2 - d_0a_2 = 0, \\ a_0d_3 + b_0c_3 - c_0b_3 - d_0a_3 = a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 - d_1a_2, \\ a_1d_3 + b_1c_3 - c_1b_3 - d_1a_3 = 0, \\ a_2d_3 + b_2c_3 - c_2b_3 - d_2a_3 = 0. \end{array}\right.$$

[1] M. Hermite suppose ici implicitement que les fonctions abéliennes sont *générales*. Il le dit d'ailleurs explicitement au § XIV. E. P.

Faisons

$$a_0d_3 + b_0c_3 - c_0b_3 - d_0a_3 = a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 - d_1a_2 = k;$$

on aura les propositions suivantes :

1° Le déterminant de système linéaire (6) est un carré parfait, à savoir k^2.

2° Si deux systèmes linéaires sont soumis aux conditions (7), on obtiendra, en les composant, un nouveau système linéaire, pour lequel elles auront également lieu. Et en exprimant la relation de composition par l'équation

$$\left\{\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{array}\right\} \times \left\{\begin{array}{cccc} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{cccc} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ D_0 & D_1 & D_2 & D_3 \end{array}\right\},$$

on trouvera, si l'on pose comme précédemment,

$$\begin{array}{l} a_0d_3 + b_0c_3 - c_0b_3 - d_0a_3 = a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 - d_1a_2 = k, \\ \alpha_0\delta_3 + \beta_0\gamma_3 - \gamma_0\beta_3 - \delta_0\alpha_3 = \alpha_1\delta_2 + \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2 - \delta_1\alpha_2 = \varkappa, \\ A_0D_3 + B_0C_3 - C_0B_3 - D_0A_3 = A_1D_2 + B_1C_2 - C_1B_2 - D_1A_2 = K, \end{array}$$

l'équation

$$K = k\varkappa.$$

3° Si $\varkappa = 1$, on aura donc $K = k$; alors je définirai comme équivalents les systèmes

$$\left\{\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{cccc} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ D_0 & D_1 & D_2 & D_3 \end{array}\right\}.$$

Cela posé, lorsque k est premier, le nombre total des systèmes non équivalents est

$$1 + k + k^2 + k^3.$$

4° Ces systèmes non équivalents sont représentés par ces quatre types, où les lettres i désignent des nombres entiers arbitrairement pris dans la série 0, 1, 2, ..., $k-1$:

$$\mathrm{I}\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{Bmatrix},\quad \mathrm{II}\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{Bmatrix},\quad \mathrm{III}\begin{Bmatrix} k & i & 0 & i' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},\quad \mathrm{IV}\begin{Bmatrix} k & 0 & i & i' \\ 0 & k & i'' & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

5° A l'un quelconque d'entre eux correspond toujours un autre, et un seul, tel qu'en les composant, on obtienne le système

$$\begin{Bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{Bmatrix},$$

ou un système équivalent à celui-là.

6° Soit

$$\begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{Bmatrix}$$

un nouveau système linéaire, pour lequel on ait

$$a_0 d_3 + b_0 c_3 - c_0 b_3 - d_0 a_3 = a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 - d_1 a_2 = 1.$$

On pourra représenter dans toute leur généralité les systèmes correspondant à un nombre premier k, en faisant, et dans l'ordre qui est indiqué, la composition suivante :

$$\begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{Bmatrix}.$$

IV.

Les propositions que je viens d'énoncer montrent avec évidence que les systèmes linéaires composés de seize éléments assujettis à vérifier les équations (7), sont entièrement analogues aux systèmes

linéaires à quatre lettres $\begin{Bmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{Bmatrix}$ (1). Les considérations suivantes rendront cette analogie encore plus manifeste. Je rappellerai d'abord ce que M. Gauss nomme *substitution adjointe* à une substitution donnée. Soit, par exemple, la substitution S, entre quatre indéterminées

$$\begin{aligned} x &= a_0 X + a_1 Y + a_2 Z + a_3 U, \\ y &= b_0 X + b_1 Y + b_2 Z + b_3 U, \\ z &= c_0 X + c_1 Y + c_2 Z + c_3 U, \\ u &= d_0 X + d_1 Y + d_2 Z + d_3 U. \end{aligned}$$

et Δ le déterminant du système

$$\begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{Bmatrix},$$

la substitution Σ adjointe à S sera

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \frac{d\Delta}{da_0}\mathfrak{X} + \frac{d\Delta}{da_1}\mathfrak{Y} + \frac{d\Delta}{da_2}\mathfrak{Z} + \frac{d\Delta}{da_3}\mathfrak{U}, \\ \mathfrak{y} &= \frac{d\Delta}{db_0}\mathfrak{X} + \frac{d\Delta}{db_1}\mathfrak{Y} + \frac{d\Delta}{db_2}\mathfrak{Z} + \frac{d\Delta}{db_3}\mathfrak{U}, \\ \mathfrak{z} &= \frac{d\Delta}{dc_0}\mathfrak{X} + \frac{d\Delta}{dc_1}\mathfrak{Y} + \frac{d\Delta}{dc_2}\mathfrak{Z} + \frac{d\Delta}{dc_3}\mathfrak{U}, \\ \mathfrak{u} &= \frac{d\Delta}{dd_0}\mathfrak{X} + \frac{d\Delta}{dd_1}\mathfrak{Y} + \frac{d\Delta}{dd_2}\mathfrak{Z} + \frac{d\Delta}{dd_3}\mathfrak{U}. \end{aligned}$$

Mais c'est seulement en vue de la théorie des formes quadratiques à plus de deux indéterminées que M. Gauss introduit cette notion, car une substitution entre deux indéterminées étant

$$\begin{aligned} x &= a_0 X + a_1 Y, \\ y &= b_0 X + b_1 Y, \end{aligned}$$

(1) *Voyez* sur les systèmes linéaires une Lettre que m'a adressée M. Eisenstein (*Journal de M. Liouville*, t. XVII), et dans les *Comptes rendus de l'Académie de Berlin* (juin 1852), un article du même géomètre, intitulé : *Uber die verglei-chung von solchen ternären quadratischen Formen, welche verschiedene de terminanten haben*.

on obtient, pour la substitution adjointe,

$$\mathfrak{x} = b_1 \mathfrak{X} - b_0 \mathfrak{Y},$$
$$\mathfrak{y} = - a_1 \mathfrak{X} + a_0 \mathfrak{Y},$$

et il est visible qu'on passe de la première à la seconde en faisant

$$x = \mathfrak{y}, \qquad X = \mathfrak{Y},$$
$$y = - \mathfrak{x}, \qquad Y = - \mathfrak{X}.$$

Or une propriété toute semblable appartient aux substitutions à quatre indéterminées, dont les coefficients vérifient les équations (7). Alors, en effet, la substitution adjointe Σ se déduit de S en faisant

$$x = \mathfrak{u}, \qquad y = \mathfrak{z}, \qquad z = - \mathfrak{y}, \qquad u = - \mathfrak{x},$$
$$X = k\mathfrak{U}, \qquad Y = k\mathfrak{Z}, \qquad X = - k\mathfrak{Y}, \qquad U = - k\mathfrak{X}.$$

Ce résultat découle de ce qu'on peut remplacer le système des équations (7) par le suivant :

$$a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3 b_0 = 0,$$
$$a_0 c_3 + a_1 c_2 - a_2 c_1 - a_3 c_0 = 0,$$
$$a_0 d_3 + a_1 d_2 - a_2 d_1 - a_3 d_0 = k,$$
$$b_0 c_3 + b_1 c_2 - b_2 c_1 - b_3 c_0 = k,$$
$$b_0 d_3 + b_1 d_2 - b_2 d_1 - b_3 d_0 = 0,$$
$$c_0 d_3 + c_1 d_2 - c_2 d_1 - c_3 d_0 = 0,$$

qui lui est entièrement équivalent.

V.

Un dernier lemme nous reste encore à établir avant d'aborder la théorie de la transformation des fonctions abéliennes. Soit

$$f = \sum a_{i,j} x_i x_j$$

l'expression générale d'une forme à quatre indéterminées, les coefficients vérifiant la relation $a_{i,j} = a_{j,i}$ et le signe $\sum$ s'étendant aux valeurs 0, 1, 2, 3 des deux indices. En établissant entre les

coefficients de cette forme les équations suivantes :

$$a_{00} a_{23} - a_{03}^2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2,$$
$$a_{00} a_{23} + a_{22} a_{01} - a_{02}(a_{03} + a_{12}) = 0,$$
$$a_{11} a_{23} + a_{33} a_{01} - a_{13}(a_{12} + a_{03}) = 0,$$
$$a_{00} a_{13} - a_{11} a_{02} + a_{01}(a_{12} - a_{03}) = 0,$$
$$a_{22} a_{13} - a_{33} a_{02} - a_{23}(a_{12} - a_{03}) = 0;$$

elle jouira de cette propriété que, la forme adjointe étant désignée par

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3),$$

on aura

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{f}(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3),$$

en faisant

$$x_0 = \sqrt{\delta}\, \mathfrak{X}_3, \qquad x_1 = \sqrt{\delta}\, \mathfrak{X}_2, \qquad x_2 = -\sqrt{\delta}\, \mathfrak{X}_1, \qquad x_3 = -\sqrt{\delta}\, \mathfrak{X}_0.$$

La quantité δ est donnée par la relation

$$a_{00} a_{33} + a_{01} a_{23} - a_{02} a_{13} - a_{03}^2 = a_{11} a_{22} + a_{01} a_{23} - a_{02} a_{13} - a_{12}^2 = \delta,$$

et son carré est précisément l'invariant de f.

De là résulte facilement la proposition suivante : Soit

$$F = \sum A_{i,j} X_i X_j$$

une transformée de f, obtenue par la substitution linéaire

$$x_0 = a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3,$$
$$x_1 = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3,$$
$$x_2 = c_0 X_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3,$$
$$x_3 = d_0 X_0 + d_1 X_1 + d_2 X_2 + d_3 X_3,$$

dont les éléments vérifient les équations (7), les coefficients $A_{i,j}$ seront soumis aux mêmes conditions que ceux de la proposée.

Ainsi, on aura

$$A_{00} A_{33} - A_{03}^2 = A_{11} A_{22} - A_{12}^2,$$
$$A_{00} A_{23} + A_{22} A_{01} - A_{02}(A_{03} + A_{12}) = 0,$$
$$A_{11} A_{23} + A_{33} A_{01} - A_{13}(A_{12} + A_{03}) = 0,$$
$$A_{00} A_{13} - A_{11} A_{02} + A_{01}(A_{12} - A_{03}) = 0,$$
$$A_{22} A_{13} - A_{33} A_{02} - A_{23}(A_{12} - A_{03}) = 0,$$

et enfin, si l'on pose

$$A_{00}A_{33}+A_{01}A_{23}-A_{02}A_{13}-A_{03}^2=A_{11}A_{22}+A_{01}A_{23}-A_{02}A_{13}-A_{12}^2=\Delta,$$

on obtiendra

$$\Delta = k^2\delta.$$

Ce résultat montre qu'on peut isoler en quelque sorte les formes f des formes générales à quatre indéterminées, pour les comparer entre elles par les substitutions spéciales que nous avons définies. On pourra ainsi se poser sous ce point de vue le problème de l'équivalence arithmétique de ces formes, établir la notion de classe, rechercher les rapports entre les classes distinctes qui correspondent à une même valeur de δ. Dans un Mémoire publié dans le *Journal de Crelle*, tome 47, page 343, j'ai déjà donné un exemple d'une théorie arithmétique conçue de cette manière, et qui se rapporte à des formes à quatre indéterminées d'une nature analogue à celle des formes binaires. Mais il me suffit ici d'avoir donné la notion des formes f, dont on va voir le rôle important dans la théorie des fonctions abéliennes.

VI.

Les propriétés des fonctions de deux arguments analogues à la transcendante Θ, que Jacobi a introduite dans la théorie des fonctions elliptiques, étant la base de nos recherches, il est nécessaire que nous les rappelions en peu de mots.

Soit d'abord

$$F(\Omega_0 x+\Omega_1 y,\ \Upsilon_0 x+\Upsilon_1 y)=\mathfrak{f}(x,y),$$

en ayant égard à la relation

$$\Omega_0\Upsilon_3-\Omega_3\Upsilon_0+\Omega_1\Upsilon_2-\Omega_2\Upsilon_1=0,$$

on trouvera qu'aux périodes simultanées de F, représentées par

$$\begin{array}{ll} \Omega_0, & \Upsilon_0,\\ \Omega_1, & \Upsilon_1,\\ \Omega_2, & \Upsilon_2,\\ \Omega_3, & \Upsilon_3, \end{array}$$

correspondent respectivement dans la fonction transformée $\mathfrak{f}$, les

périodes

$$\begin{array}{ll} 1, & 0,\\ 0, & 1,\\ H, & G',\\ G, & H, \end{array}$$

où l'on fait, pour abréger,

$$G=\frac{\Omega_3\Upsilon_1-\Omega_1\Upsilon_3}{\Omega_0\Upsilon_1-\Omega_1\Upsilon_0},\qquad H=\frac{\Omega_2\Upsilon_1-\Omega_1\Upsilon_2}{\Omega_1\Upsilon_0-\Omega_0\Upsilon_1},\qquad G'=\frac{\Omega_0\Upsilon_2-\Omega_2\Upsilon_0}{\Omega_0\Upsilon_1-\Omega_1\Upsilon_0}.$$

Cela posé, désignons par $\Phi(x,y)$ la forme quadratique

$$Gx^2+2Hxy+G'y^2,$$

et soit

$$(8)\qquad \Theta(x,y)=\sum(-1)^{mq+np}\,e^{i\pi[(2m+\mu)x+(2n+\nu)y]+\frac{1}{4}i\pi\Phi(2m+\mu,\,2n+\nu)};$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs entières de m et n, depuis $-\infty$ à $+\infty$. En attribuant aux quantités p, q, μ, ν toutes les combinaisons possibles des valeurs 0 et 1, on obtiendra les seize fonctions par lesquelles Göpel et M. Rosenhain ont exprimé les numérateurs et le dénominateur commun de $\mathfrak{f}_1(x,y)$, $\mathfrak{f}_2(x,y)$, ..., $\mathfrak{f}_{15}(x,y)$. Ces fonctions, que nous réunirons dans une même forme analytique, en gardant les quantités p, q, μ, ν, vérifient, comme on le reconnaît très facilement, les relations suivantes :

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Theta(x+1,y)=(-1)^{\mu}\Theta(x,y),\\ \Theta(x,y+1)=(-1)^{\nu}\Theta(x,y),\\ \Theta(x+H,y+G')=(-1)^{p}\Theta(x,y)\,e^{-i\pi(2y+G')},\\ \Theta(x+G,y+H)=(-1)^{q}\Theta(x,y)\,e^{-i\pi(2x+G)}. \end{array}\right.$$

Et, réciproquement, ces relations déterminent la série (8), sauf un facteur constant; qu'on suppose, en effet,

$$\Theta(x,y)=\sum A_{m,n}(-1)^{mq+np}\,e^{i\pi[(2m+\mu)x+(2n+\nu)y]+\frac{1}{4}i\pi\Phi(2m+\mu,\,2n+\nu)},$$

on trouvera, en substituant, que les deux premières sont satisfaites, quel que soit $A_{m,n}$, et les deux dernières donneront, en égalant dans les deux membres les coefficients des mêmes exponentielles,

$$A_{m,n+1}=A_{m,n},$$
$$A_{m+1,n}=A_{m,n};$$

d'où il suit bien que le coefficient $A_{m,n}$ est un facteur constant.

La forme que nous avons donnée à la série (8) met également en évidence la relation

$$(10)\quad \Theta(x, y) = e^{i\pi(\mu x+\nu y)+\frac{1}{4}i\pi\Phi(\mu,\nu)}\,\Theta_0\left(x + \frac{\mu G + \nu H + q}{2},\ y + \frac{\mu H + \nu G' + p}{2}\right),$$

en appelant pour un instant Θ_0 celle des seize fonctions dans laquelle p, q, μ, ν sont tous égaux à zéro. On voit par là qu'en augmentant les arguments de demi-périodes, on peut aussi exprimer les seize fonctions par l'une quelconque d'entre elles.

Enfin nous aurons cette propriété

$$(11)\qquad \Theta(-x, -y) = (-1)^{p\nu+q\mu}\,\Theta(x, y),$$

d'où résulte que les fonctions impaires correspondront aux valeurs de p, q, μ, ν, qui donneront

$$p\nu + q\mu \equiv 1 \pmod 2.$$

Ces fonctions, comme l'a déjà remarqué Göpel, sont au nombre de six.

VII.

Ces préliminaires établis, nous aborderons, comme il suit, le problème de la transformation.

Soit, en conservant les notations du § III,

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$$

un système linéaire, dont les éléments sont des nombres entiers qui vérifient les équations

$$\begin{aligned}
a_0 d_1 + b_0 c_1 - c_0 b_1 - d_0 a_1 &= 0, \\
a_0 d_2 + b_0 c_2 - c_0 b_2 - d_0 a_2 &= 0, \\
a_0 d_3 + b_0 c_3 - c_0 b_3 - d_0 a_3 &= k, \\
a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 - d_1 a_2 &= k, \\
a_1 d_3 + b_1 c_3 - c_1 b_3 - d_1 a_3 &= 0, \\
a_2 d_3 + b_1 c_3 - c_2 b_3 - d_2 a_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Pour abréger l'écriture, représentons un instant par z_i la fonction linéaire $a_i x + b_i y$, i désignant l'un des nombres 0, 1, 2, 3,

et posons

$$(12)\quad \Theta(z_0 + G z_3 + H z_2,\ z_1 + H z_3 + G' z_2)\, e^{i\pi[z_0 z_3 + z_1 z_2 + \Phi(z_3, z_2)]} = \Pi(x, y);$$

on aura ce théorème :

La fonction $\Pi(x, y)$ *satisfait à ces équations de même forme que les équations* (9), *savoir :*

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
\Pi(x+1, y) &= (-1)^{\mathfrak{m}}\,\Pi(x, y), \\
\Pi(x, y+1) &= (-1)^{\mathfrak{n}}\,\Pi(x, y), \\
\Pi(x+h, y+g') &= (-1)^{\mathfrak{p}}\,\Pi(x, y)\, e^{-i\pi k(2y+g')}, \\
\Pi(x+g, y+h) &= (-1)^{\mathfrak{q}}\,\Pi(x, y)\, e^{-i\pi k(2x+g)},
\end{aligned}\right.$$

et si l'on représente, pour simplifier, les quantités $a_i b_j - a_j b_i$, $a_i c_j - a_j c_i$, ..., *par* $(ab)_{ij}$, $(ac)_{ij}$, *etc., les valeurs de* g, h, g' *et de* $h^2 - gg'$ *seront*

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
g &= \frac{(db)_{01} + (db)_{31} G + 2(db)_{03} H + (db)_{02} G' + (db)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31} G + 2(ab)_{03} H + (ab)_{02} G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')}, \\
h &= \frac{(ad)_{01} + (ad)_{31} G + [2(ad)_{03} - k] H + (ad)_{02} G' + (ad)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31} G + 2(ab)_{03} H + (ab)_{02} G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')}, \\
g' &= \frac{(ac)_{01} + (ac)_{31} G + 2(ac)_{03} H + (ac)_{02} G' + (ac)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31} G + 2(ab)_{03} H + (ab)_{02} G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')}, \\
h^2 - gg' &= \frac{(cd)_{01} + (cd)_{31} G + 2(cd)_{03} H + (cd)_{02} G' + (cd)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31} G + 2(ab)_{03} H + (ab)_{02} G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')}.
\end{aligned}\right.$$

On aura enfin, pour les nombres entiers $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, *les expressions*

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{m} &= \mu a_0 + \nu a_1 + p a_2 + q a_3 + a_0 a_3 + a_1 a_2, \\
\mathfrak{n} &= \mu b_0 + \nu b_1 + p b_2 + q b_3 + b_0 b_3 + b_1 b_2, \\
\mathfrak{p} &= \mu c_0 + \nu c_1 + p c_2 + q c_3 + c_0 c_3 + c_1 c_2, \\
\mathfrak{q} &= \mu d_0 + \nu d_1 + p d_2 + q d_3 + d_0 d_3 + d_1 d_2.
\end{aligned}\right.$$

Nous ajouterons comme corollaire à ce théorème, qu'en résolvant les équations (14), par rapport à G, H, G', $H^2 - GG'$, on obtient

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
G &= \frac{(cd)_{02} + (ac)_{02} g + 2(bc)_{02} h + (db)_{02} g' + (ab)_{02}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23} g + 2(bc)_{23} h + (db)_{23} g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')}, \\
H &= \frac{(cd)_{12} + (ac)_{12} g + [2(bc)_{12} - k] h + (db)_{12} g' + (ab)_{12}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23} g + 2(bc)_{23} h + (db)_{23} g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')}, \\
G' &= \frac{(cd)_{31} + (ac)_{31} g + 2(bc)_{31} h + (db)_{31} g' + (ab)_{31}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23} g + 2(bc)_{23} h + (db)_{23} g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')}, \\
H^2 - GG' &= \frac{(cd)_{01} + (ac)_{01} g + 2(bc)_{01} h + (db)_{01} g' + (ab)_{01}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23} g + 2(bc)_{23} a + (db)_{23} g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')}.
\end{aligned}\right.$$

Les résultats que je viens d'énoncer mettent immédiatement en évidence la méthode que j'ai suivie dans la question de la transformation. Cette méthode, bien naturelle et bien simple, consiste à introduire le système de seize fonctions θ, analogues à Θ, mais dans lesquelles G, H, G′ auront été remplacés par g, h, g', puis à employer les relations (13), pour exprimer $\Pi(x, y)$ par des combinaisons entières et homogènes de ces seize fonctions. En effet, on voit de suite que le facteur exponentiel $e^{i\pi[z_0z_3+z_1z_2+\Phi(z_3,z_2)]}$ étant indépendant des quantités p, q, μ, ν, disparaîtra dans le quotient de deux fonctions différentes $\Pi(x, y)$, qui correspondent à deux systèmes distincts de valeurs de ces quantités. Or, ces quotients représenteront les quinze fonctions $\mathfrak{F}$ aux arguments $z_0 + \mathrm{G}z_3 + \mathrm{H}z_2$, $z_1 + \mathrm{H}z_3 + \mathrm{G}'z_2$, exprimées rationnellement par les quinze quotients provenant de la division de deux fonctions $\theta(x, y)$. Mais avant d'exposer cette méthode, nous avons à approfondir la question suivante, qui mérite un examen attentif.

VIII.

La fonction $\Theta(x, y)$, étant seulement définie par la série

$$\sum (-1)^{mq+np}\, e^{i\pi[(2m+\mu)x+(2n+\nu)y]+\frac{1}{4}i\pi\,\Phi(2m+\mu,\,2n+\nu)},$$

n'a d'existence qu'autant que cette série est convergente. Or, en posant

$$\mathrm{G} = \mathcal{G}_0 + i\mathcal{G}, \qquad \mathrm{H} = \mathcal{H}_0 + i\mathcal{H}, \qquad \mathrm{G}' = \mathcal{G}'_0 + i\mathcal{G}', \qquad \mathrm{H}^2 - \mathrm{GG}' = \mathcal{D}_0 + i\mathcal{D},$$

on trouve que la condition nécessaire et suffisante de convergence consiste en ce que la forme quadratique $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{G}')$ soit définie et positive. Il est donc indispensable, lorsqu'on introduit le système des fonctions $\theta(x, y)$, de s'assurer si la condition analogue, relative aux éléments g, h, g', se trouve remplie. Ainsi, en posant, pour mettre encore en évidence les parties réelles et les coefficients de i,

$$g = \mathfrak{g}_0 + i\mathfrak{g}, \qquad h = \mathfrak{h}_0 + i\mathfrak{h}, \qquad g' = \mathfrak{g}'_0 + i\mathfrak{g}', \qquad h^2 - gg' = \mathfrak{d}_0 + i\mathfrak{d},$$

nous avons à reconnaître si la forme $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}')$ est elle-même définie et positive.

A cet effet, j'introduis la forme suivante à quatre indéterminées

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2, x_3) = {} & \mathcal{G}'x_0^2 + + \mathcal{G}x_1^2 + (\mathcal{G}'\mathcal{D}_0 - \mathcal{G}'_0\mathcal{D})x_2^2 + (\mathcal{G}\mathcal{D}_0 - \mathcal{G}_0\mathcal{D})x_3^2 \\ & - 2\mathcal{H}x_0x_1 - 2(\mathcal{G}'_0\mathcal{H} - \mathcal{G}'\mathcal{H}_0)x_0x_2 - 2(\mathcal{G}_0\mathcal{H} - \mathcal{G}\mathcal{H}_0)x_1x_3 \\ & - 2(\mathcal{D}\mathcal{H}_0 - \mathcal{D}_0\mathcal{H})x_2x_3 - 2(\mathcal{H}\mathcal{H}_0 - \mathcal{G}\mathcal{G}'_0)x_1x_2 - 2(\mathcal{H}\mathcal{H}_0 - \mathcal{G}_0\mathcal{G}')x_0x_3, \end{aligned}$$

et je représente par $\mathcal{M}$ le module du dénominateur commun des valeurs de g, h, g', dans les équations (14) du § VII, de sorte que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2 = {} & [(ab)_{01} + (ab)_{31}\mathcal{G}_0 + 2(ab)_{03}\mathcal{H}_0 + (ab)_{02}\mathcal{G}'_0 + (ab)_{23}\mathcal{D}_0]^2, \\ & + [(ab)_{31}\,\mathcal{G} + 2(ab)_{03}\,\mathcal{H} + (ab)_{02}\,\mathcal{G}' + (ab)_{23}\mathcal{D}]^2. \end{aligned}$$

Cela fait, on aura les théorèmes exprimés par les relations suivantes :

$$\mathfrak{g}x^2 + 2\mathfrak{h}xy + \mathfrak{g}'y^2 = \frac{k}{\mathcal{M}^2} f(b_0x - a_0y,\, b_1x - a_1y,\, b_2x - a_2y,\, b_3x - a_3y),$$

$$\mathfrak{h}^2 - \mathfrak{g}\mathfrak{g}' = \frac{k^2}{\mathcal{M}^2}(\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}\mathcal{G}').$$

Comme la seconde montre que les déterminants $\mathfrak{h}^2 - \mathfrak{g}\mathfrak{g}'$, $\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}\mathcal{G}'$ sont de même signe, il suffira de prouver que l'un des coefficients $\mathfrak{g}$ ou $\mathfrak{g}'$ est positif, pour être assuré que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}')$ est une forme définie et positive comme $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{G}')$. Par là on se trouve amené à la considération de cette expression remarquable

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

qui présente le type général des formes à quatre indéterminées dont j'ai donné précédemment la notion (§ V). Ainsi, en désignant la forme adjointe par $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3)$, on a cette propriété caractéristique que f se change en $\mathfrak{f}$ par la substitution

$$\begin{aligned} x_0 &= (\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}\mathcal{G}')\mathfrak{x}_3, & x_1 &= (\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}\mathcal{G}')\mathfrak{x}_2, \\ x_2 &= -(\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}\mathcal{G}')\mathfrak{x}_1, & x_3 &= -(\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}\mathcal{G}')\mathfrak{x}_0. \end{aligned}$$

De là résulte une analogie très grande avec les formes binaires ; au point de vue algébrique, par exemple, on reconnaît qu'elles sont réductibles par des substitutions réelles à l'une de ces trois espèces :

(I) $\quad \mathrm{X}_0^2 + \mathrm{X}_1^2 + \mathrm{X}_2^2 + \mathrm{X}_3^2,$

(II) $\quad -\mathrm{X}_0^2 - \mathrm{X}_1^2 - \mathrm{X}_2^2 - \mathrm{X}_3^2,$

(III) $\quad \mathrm{X}_0^2 + \mathrm{X}_1^2 - \mathrm{X}_2^2 - \mathrm{X}_3^2,$

mais seulement à l'une d'elles, de sorte qu'on doit exclure celles-ci :

$$\pm (X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 - X_3^2).$$

Mais je n'insiste pas davantage, en ce moment, sur cette analogie, et je vais, en appliquant les formules connues, montrer que f appartient à l'espèce (I). Il faut pour cela calculer les invariants des formes $f(x_0, x_1, 0, 0)$, $f(x_0, x_1, x_2, 0)$, et enfin l'invariant de f elle-même. Ces invariants sont respectivement

$$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2, \quad \mathcal{G}'(\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2)^2 \quad \text{et} \quad (\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2)^4.$$

En y joignant l'unité et le coefficient de x_0^2, on forme ainsi la suite caractéristique

$$1, \quad \mathcal{G}', \quad \mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2, \quad \mathcal{G}'(\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2)^2 \quad (\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2)^4.$$

Or cette suite ne présente que des *permanences,* puisqu'on admet par hypothèse que $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ sont des quantités positives. De là résulte que la forme f est réductible par une substitution réelle à une somme de quatre carrés ; ainsi les quantités

$$\mathfrak{g} = \frac{k}{\mathfrak{M}^2} f(b_0, b_1, b_2, b_3), \qquad \mathfrak{g}' = \frac{k}{\mathfrak{M}^2} f(a_0, a_1, a_2, a_3),$$

sont bien essentiellement positives.

IX.

En posant

$$gx^2 + 2hxy + g'y^2 = \varphi(x, y),$$

les seize fonctions dont l'existence se trouve démontrée par ce qui précède, seront représentées ainsi :

$$\theta(x, y) = \sum (-1)^{\mathfrak{m}\mathfrak{q} + \mathfrak{n}\mathfrak{p}} e^{i\pi[(2m+\mathfrak{m})x + (2n+\mathfrak{n})y] + \frac{1}{4} i\pi\varphi(2m+\mathfrak{m},\, 2n+\mathfrak{n})},$$

les nombres $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ étant, comme μ, ν, p, q, égaux à zéro ou à l'unité. Elles satisfont aux équations suivantes, entièrement semblables aux équations (9), et qui les définissent à un facteur constant près, savoir :

$$\theta(x+1, y) = (-1)^{\mathfrak{m}} \theta(x, y), \qquad \theta(x, y+1) = (-1)^{\mathfrak{n}} \theta(x, y),$$
$$\theta(x+h, y+g') = (-1)^{\mathfrak{p}} \theta(x, y)\, e^{-i\pi(2y+g')},$$
$$\theta(x+g, y+h) = (-1)^{\mathfrak{q}} \theta(x, y)\, e^{-i\pi(2x+g)}.$$

Il s'agit maintenant de les employer pour exprimer la fonction $\Pi(x, y)$, que nous avons définie par les quatre relations (13), § VII. A cet effet, je remarquerai d'abord qu'ayant

$$\Pi(x, y) = \Theta(x, y)\, e^{i\pi[z_0 z_3 + z_1 z_2 + \Phi(z_3, z_2)]},$$

on peut joindre à ces relations fondamentales la suivante :

$$\Pi(-x, -y) = \Pi(x, y)(-1)^{p\nu + q\mu}.$$

Or, il est très facile d'établir qu'en supposant k impair, on a

$$p\nu + q\mu \equiv \mathfrak{p}\mathfrak{n} + \mathfrak{q}\mathfrak{m} \pmod 2,$$

de sorte que nous pouvons écrire

(16 *bis*) $$\Pi(-x, -y) = \Pi(x, y)(-1)^{\mathfrak{p}\mathfrak{n} + \mathfrak{q}\mathfrak{m}}.$$

Cela posé, je fais abstraction de toute autre propriété de la fonction $\Pi(x, y)$ et, ne gardant absolument que les relations (13) et (16 *bis*), je cherche en premier lieu combien elles impliquent de constantes arbitraires dans la fonction qu'elles servent à définir.

Pour cela, soit

$$\Pi(x, y) = \sum (-1)^{\mathfrak{p}\mathfrak{n} + \mathfrak{q}\mathfrak{m}} A_{m,n}\, e^{i\pi[(2m+\mathfrak{m})x + (2n+\mathfrak{n})y] + \frac{i\pi}{4k}\varphi(2m+\mathfrak{m},\, 2n+\mathfrak{n})}.$$

On satisfera ainsi, quel que soit $A_{m,n}$, aux deux premières,

$$\Pi(x+1, y) = (-1)^{\mathfrak{m}} \Pi(x, y), \qquad \Pi(x, y+1) = (-1)^{\mathfrak{n}} \Pi(x, y);$$

quant aux deux suivantes, elles donneront, en comparant dans les deux membres les coefficients des mêmes exponentielles,

(17) $$A_{m+k,n} = A_{m,n}, \qquad A_{m,n+k} = A_{m,n};$$

enfin on tirera de l'équation (16 *bis*), cette dernière condition

(18). $$A_{-m-\mu,-n-\nu} = A_{m,n}.$$

Or les équations (17) font voir que tous les coefficients $A_{m,n}$ s'exprimeront par ceux où les indices sont moindres que k, et qui sont en nombre égal à k^2. Distinguons maintenant celui dont les indices vérifient les conditions

$$m \equiv -m - \mu, \qquad n \equiv -n - \nu \pmod k,$$

qui sont évidemment possibles, puisque le module est impair.

L'équation (18) sera alors une identité, et le coefficient dont nous parlons restera arbitraire; mais, en vertu de cette même relation, tous les autres, qui sont au nombre de $k^2 - 1$, seront égaux deux à deux. De là nous tirons cette proposition :

L'expression la plus générale de la fonction $\Pi(x,y)$ *qui est définie par les relations* (13) *et* (16 *bis*), *renferme* $\frac{k^2+1}{2}$ *coefficients entièrement indépendants.*

X.

Les considérations précédentes sont également applicables à des valeurs paires du nombre k. Soient par exemple, pour $k=2$, les relations

$$(19)\qquad \begin{aligned} &\Pi(x+1, y) = \Pi(x, y), \qquad \Pi(x, y+1) = \Pi(x, y),\\ &\Pi(x+h, y+g') = \Pi(x, y)\, e^{-2i\pi(2y+g')},\\ &\Pi(x+g, y+h) = \Pi(x, y)\, e^{-2i\pi(2x+g)}; \end{aligned}$$

on trouvera, en posant

$$\Pi(x, y) = \sum \mathrm{A}_{m,n}\, e^{i\pi(2mx+2ny)+\frac{i\pi}{2}\varphi(m,n)},$$

les conditions

$$\mathrm{A}_{m+2,n} = \mathrm{A}_{m,n}, \qquad \mathrm{A}_{m,n+2} = \mathrm{A}_{m,n}.$$

Donc $\Pi(x, y)$ est la somme de quatre séries déterminées, à savoir celles qui se trouvent multipliées respectivement par les coefficients $\mathrm{A}_{0,0}$, $\mathrm{A}_{0,1}$, $\mathrm{A}_{1,0}$, $\mathrm{A}_{1,1}$, qui restent seuls arbitraires. Or on satisfait également aux équations (19), en prenant pour $\Pi(x, y)$ le carré d'une quelconque des fonctions $\theta(x, y)$. Donc ces carrés s'expriment linéairement par quatre nouvelles fonctions, et de là se tire immédiatement la réduction algébrique des seize fonctions θ, à quatre d'entre elles, prises arbitrairement.

XI.

En général, toutes les relations algébriques et différentielles des fonctions θ peuvent être obtenues d'une manière analogue. Ici ce sont les relations algébriques qu'il nous importe de considérer, et

particulièrement celles où entrent d'une manière homogène le plus petit nombre de fonctions, et qui sont en même temps du degré le moins élevé. Telle est par exemple, après les relations quadratiques, l'équation mémorable du quatrième degré obtenue par Göpel [1] entre P′, S′, P″, S″, qui se déduisent de l'expression générale de θ, en faisant :

Pour

$$\begin{array}{lllll} \mathrm{P}', & \mathfrak{m}=0, & \mathfrak{n}=0, & \mathfrak{p}=0, & \mathfrak{q}=1,\\ \mathrm{P}'', & \mathfrak{m}=0, & \mathfrak{n}=0, & \mathfrak{p}=0, & \mathfrak{q}=0,\\ \mathrm{S}', & \mathfrak{m}=1, & \mathfrak{n}=1, & \mathfrak{p}=1, & \mathfrak{q}=0,\\ \mathrm{S}'', & \mathfrak{m}=1, & \mathfrak{n}=1, & \mathfrak{p}=0, & \mathfrak{q}=1. \end{array}$$

Je vais encore établir l'existence de cette équation, et des autres du même genre, qui ont aussi lieu entre quatre fonctions, car elles sont fondamentales pour ce qui va suivre.

Soit, à cet effet, $\Pi(x, y)$ une fonction ainsi définie

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \Pi(x+1, g) &= \Pi(x, y),\\ \Pi(x, y+1) &= \Pi(x, y),\\ \Pi(x+h, y+g') &= \Pi(x, y)\, e^{-4i\pi(2y+g')},\\ \Pi(x+g, y+h) &= \Pi(x, y)\, e^{-4i\pi(2x+g)}. \end{aligned}\right.$$

En la supposant représentée par la série

$$\sum \mathrm{A}_{m,n}\, e^{i\pi(2mx+2ny)+\frac{i\pi}{4}\varphi(m,n)},$$

on trouvera, pour déterminer les coefficients, les relations

$$\mathrm{A}_{m+4,n} = \mathrm{A}_{m,n}, \qquad \mathrm{A}_{m,n+4} = \mathrm{A}_{m,n},$$

et si l'on veut exprimer que le développement représente une fonction paire, on y joindra la suivante :

$$\mathrm{A}_{-m,-n} = \mathrm{A}_{m,n}.$$

Alors les coefficients se réduisent à ceux-ci :

$$\mathrm{A}_{0,0}, \quad \mathrm{A}_{0,2}, \quad \mathrm{A}_{2,0}, \quad \mathrm{A}_{2,2}, \quad \mathrm{A}_{0,1}, \quad \mathrm{A}_{1,0}, \quad \mathrm{A}_{0,3}, \quad \mathrm{A}_{1,1}, \quad \mathrm{A}_{1,2}, \quad \mathrm{A}_{1,3}$$

[1] Voyez Tome 25 du *Journal de Crelle*, le Mémoire de l'illustre géomètre : *Theoriæ transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis.*