et en posant, pour abréger,

$$\Theta(a) = X + aY + \ldots + a^{n-1}U, \qquad \Theta_0(a) = X_0 + aY_0 + \ldots + a^{n-1}U_0,$$

je considérerai la nouvelle forme

$$\begin{aligned}\Phi = \frac{i}{F_0(a)F'(a)}\,\Theta(a)\Theta_0(a) + \frac{i}{F_0(b)F'(b)}\,\Theta(b)\Theta_0(b) + \ldots \\ + \frac{i}{F_0(k)F'(k)}\,\Theta(k)\Theta_0(k) = \sum \frac{i}{F_0(a)F'(a)}\,\Theta(a)\Theta_0(a).\end{aligned}$$

En désignant par φ' ce que devient φ, lorsqu'on met $x', y', \ldots, u'$ au lieu de $x, y, \ldots, u$, on aura évidemment

$$\Phi = \varphi + \varphi';$$

mais il sera beaucoup plus facile de raisonner sur cette forme Φ que sur φ, qui contient un nombre d'indéterminées deux fois moindre. Pour démontrer en premier lieu la réalité des coefficients, je remarquerai que les racines de l'équation

$$F_0(z) = 0$$

seront les conjuguées $a_0, b_0, \ldots, k_0$ des racines de la proposée; de sorte qu'on aura, par la décomposition en fractions simples,

$$\frac{\Theta(a)}{F_0(a)} = \frac{\Theta(a_0)}{(a-a_0)F'_0(a_0)} + \frac{\Theta(b_0)}{(a-b_0)F'_0(b_0)} + \ldots + \frac{\Theta(k_0)}{(a-k_0)F'_0(k_0)};$$

d'où cette expression de Φ, savoir :

$$\begin{aligned}\Phi = {} & \frac{i\Theta_0(a)}{F'(a)}\left[\frac{\Theta(a_0)}{(a-a_0)F'_0(a_0)} + \frac{\Theta(b_0)}{(a-b_0)F_0(b_0)} + \ldots + \frac{\Theta(k_0)}{(a-k_0)F'_0(k_0)}\right] \\ & + \frac{i\Theta_0(b)}{F'(b)}\left[\frac{\Theta(a_0)}{(b-a_0)F'_0(a_0)} + \frac{\Theta(b_0)}{(b-b_0)F'_0(b_0)} + \ldots + \frac{\Theta(k_0)}{(b-k_0)F'_0(k_0)}\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{i\Theta_0(k)}{F'(k)}\left[\frac{\Theta(a_0)}{(k-a_0)F'_0(a_0)} + \frac{\Theta(b_0)}{(k-b_0)F'_0(b_0)} + \ldots + \frac{\Theta(k_0)}{(k-k_0)F'_0(k_0)}\right].\end{aligned}$$

Or, en réunissant les termes contenus dans une même colonne verticale, on trouvera de suite

$$\Phi = \sum \frac{-i\Theta_0(a_0)\Theta(a_0)}{F(a_0)F'_0(a_0)},$$

ce qui est bien l'expression primitive, dans laquelle on a changé $+i$ en $-i$.

Ce premier point établi, je fais la substitution suivante :

$$\begin{aligned}&\frac{\Theta(a_0)}{F'_0(a_0)} = \xi, && \frac{\Theta(b_0)}{F'_0(b_0)} = \eta, && \ldots, && \frac{\Theta(k_0)}{F'_0(k_0)} = \upsilon, \\ &\frac{\Theta_0(a)}{F'(a)} = \xi_0, && \frac{\Theta_0(b)}{F'(b)} = \eta_0, && \ldots, && \frac{\Theta_0(k)}{F'(k)} = \upsilon_0,\end{aligned}$$

ξ et ξ_0, η et η_0, $\ldots$, υ et υ_0 étant des variables imaginaires conjuguées. De là résultera évidemment une substitution toute réelle, entre les éléments réels des indéterminées $X, Y, \ldots, U$ et $\xi, \eta, \ldots, \upsilon$, puisque le système des équations posées ne change pas en mettant $-i$ au lieu de $+i$. Ainsi, lorsqu'on fait évanouir les rectangles, le nombre des coefficients des carrés qui ont un signe donné sera le même pour la forme Φ et la transformée en $\xi, \eta, \ldots, \upsilon$, savoir :

$$\begin{aligned}\psi = {} & i\xi_0\left(\frac{\xi}{a-a_0} + \frac{\eta}{a-b_0} + \ldots + \frac{\upsilon}{a-k_0}\right) \\ & + i\eta_0\left(\frac{\xi}{b-a_0} + \frac{\eta}{b-b_0} + \ldots + \frac{\upsilon}{b-k_0}\right) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + i\upsilon_0\left(\frac{\xi}{k-a_0} + \frac{\eta}{k-b_0} + \ldots + \frac{\upsilon}{k-k_0}\right).\end{aligned}$$

Or il est facile d'appliquer à cette transformée le théorème I, et d'obtenir le terme général de la suite

$$\Delta_1, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

Je considère pour cela le déterminant Δ_m relatif aux m premières variables et aux racines $a, b, \ldots, f, g$; le rapport de déterminants $\frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}}$ sera la valeur de $\frac{\mu'}{\mu}$ qu'on tirera des équations linéaires

$$\begin{aligned}&\frac{i\xi}{a-a_0} + \frac{i\eta}{a-b_0} + \ldots + \frac{i\lambda}{a-f_0} + \frac{i\mu}{a-g_0} = \xi', \\ &\frac{i\xi}{b-a_0} + \frac{i\eta}{b-b_0} + \ldots + \frac{i\lambda}{b-f_0} + \frac{i\mu}{b-g_0} = \eta', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{i\xi}{g-a_0} + \frac{i\eta}{g-b_0} + \ldots + \frac{i\lambda}{g-f_0} + \frac{i\mu}{g-g_0} = \mu',\end{aligned}$$

dans l'hypothèse particulière que les seconds membres, à l'exception de μ', soient nuls.

Or, on satisfait à ces équations de la manière suivante :

Soit

$$\Pi(z) = (z-a)(z-b)\ldots(z-g), \quad \Pi_0(z) = (z-a_0)(z-b_0)\ldots(z-g_0),$$

on fera

$$i\xi = \frac{\Pi(a_0)}{\Pi_0'(a_0)}\left[\frac{\xi'\Pi_0(a)}{(a_0-a)\Pi'(a)} + \frac{\eta'\Pi_0(b)}{(a_0-b)\Pi'(b)} + \ldots + \frac{\mu'\Pi_0(g)}{(a_0-g)\Pi'(g)}\right],$$

$$i\eta = \frac{\Pi(b_0)}{\Pi_0'(b_0)}\left[\frac{\xi'\Pi_0(a)}{(b_0-a)\Pi'(a)} + \frac{\eta'\Pi_0(b)}{(b_0-b)\Pi'(b)} + \ldots + \frac{\mu'\Pi_0(g)}{(b_0-g)\Pi'(g)}\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$i\mu = \frac{\Pi(g_0)}{\Pi_0'(g_0)}\left[\frac{\xi'\Pi_0(a)}{(g_0-a)\Pi'(a)} + \frac{\eta'\Pi_0(b)}{(g_0-b)\Pi'(b)} + \ldots + \frac{\mu'\Pi_0(g)}{(g_0-g)\Pi'(g)}\right],$$

ce qui donnera de suite, pour le cas particulier qu'on a en vue,

$$\frac{\mu'\Pi(g_0)\Pi_0(g)}{(g_0-g)\Pi_0'(g_0)\Pi'(g)},$$

donc

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}} = i(g_0-g) : \text{Norme } \frac{\Pi_0(g)}{\Pi'(g)},$$

quantité qui a précisément le signe du coefficient de i dans la racine g. Ainsi, les coefficients des carrés dans la forme Ψ, ou dans la forme Φ, lorsqu'on aura fait évanouir les rectangles, offriront un nombre de termes positifs et de termes négatifs double du nombre des termes positifs et négatifs de la suite

$$i(a_0-a), \quad i(b_0-b), \quad \ldots, \quad i(k_0-k);$$

donc, à cause de la relation $\Phi = \varphi + \varphi'$, *le nombre des coefficients des carrés qui offriront un signe donné, lorsqu'on fera évanouir les rectangles dans la forme* φ, *sera égal au nombre des termes, ayant ce même signe, dans la série des coefficients de* i *des racines* $a, b, \ldots, k$.

III.

Les résultats précédents sembleront sans doute inapplicables dans la pratique, à cause de la difficulté d'évaluer les fonctions symétriques des racines qui se présentent pour les coefficients de

la forme quadratique φ. Mais ce n'est là qu'une difficulté apparente, comme vous allez voir. Reprenons l'expression

$$\varphi = \sum \frac{i}{F_0(a)F'(a)}(x + ay + \ldots + a^{n-1}u)^2,$$

et faisons la substitution suivante, que m'a suggérée la notion des formes adjointes, telle que je l'ai indiquée dans une de mes Lettres à M. Jacobi (¹) (*Journal de Crelle*, t. 40, p. 263 et suiv.) sur la théorie des nombres.

Posons

$$\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx} = z_0, \qquad \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dy} = z_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{du} = z_{n-1}.$$

Un calcul extrêmement simple montre que, si l'on désigne par

$$\mathfrak{f}(a), \quad \mathfrak{f}(b), \quad \ldots, \quad \mathfrak{f}(k)$$

ce que deviennent les quotients

$$\frac{F(z)}{z-a}, \quad \frac{F(z)}{z-b}, \quad \ldots, \quad \frac{F(z)}{z-k},$$

quand on y remplace z^μ par z_μ, on obtiendra la transformée

$$\mathfrak{f} = \sum \frac{-iF_0(a)}{F'(a)}[\mathfrak{f}(a)]^2.$$

Or cette transformée, qu'on peut substituer pour notre objet à la forme φ, s'évalue immédiatement et sous forme explicitement réelle, au moyen des coefficients de l'équation proposée

$$F(z) = 0.$$

Considérez pour cela l'expression

$$\sum \frac{F_0(a)}{F'(a)} \frac{F(z)}{z-a} \frac{F(z')}{z'-a},$$

où z et z' sont deux variables distinctes ; elle se transforme succes-

(¹) *Voir* p. 137 de ce Volume. E. P.

sivement de la manière qu'expriment ces relations, savoir :

$$\sum \frac{F_0(a)}{F'(a)} \frac{F(z)}{z-a} \frac{F(z')}{z'-a} = F(z)F(z') \sum \frac{F_0(a)}{F'(a)} \frac{1}{(z-a)(z'-a)}$$

$$= \frac{F(z)F(z')}{z'-z} \sum \frac{F_0(a)}{F'(a)} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z'-a} \right)$$

$$= \frac{F(z)F(z')}{z'-z} \left[\frac{F_0(z)}{F(z)} - \frac{F_0(z')}{F(z')} \right]$$

$$= \frac{F(z')F_0(z) - F(z)F_0(z')}{z'-z}.$$

Ainsi la transformée $\mathfrak{f}$ sera ce que deviendra l'expression évidemment réelle

$$-i \frac{F(z')F_0(z) - F(z)F_0(z')}{z'-z},$$

quand, après avoir effectué la division, on remplace successivement

$$z^0, \quad z^1, \quad z^2, \quad \ldots, \quad z^{n-1},$$

puis

$$z'^0, \quad z'^1, \quad z'^2, \quad \ldots, \quad z'^{n-1},$$

par

$$z_0, \quad z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_{n-1}.$$

Soit, par exemple,

$$F(z) = az^2 + bz + c + i(a'z^2 + b'z + c');$$

on trouvera

$$\frac{1}{2} \frac{F(z')F_0(z) - F(z)F_0(z')}{z'-z} = (ab' - ba')zz' + (ac' - ca')(z+z') + bc' - cb'$$

et, par suite, cette expression de $\mathfrak{f}$:

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{f} = (ab' - ba')z_1^2 + 2(ac' - ca')z_0 z_1 + (bc' - cb')z_0^2.$$

Cette méthode pour obtenir la forme $\mathfrak{f}$ et les rapports de cette forme avec les racines de l'équation $F(z) = 0$ étant bien établis, voici les premières conséquences à en tirer.

IV.

Soit Φ le coefficient de i dans l'expression $\varphi(x + iy)$, où φ est une fonction rationnelle à coefficients réels ou imaginaires. Si l'on considère x et y comme deux coordonnées rectangulaires dans un

plan, l'équation $\Phi = 0$ représentera une courbe, relativement à laquelle nous distinguerons dans ce plan deux régions différentes. Je dirai que les points dont ces coordonnées substituées dans la fonction Φ la rendent positive occupent la région positive, et que ceux qui la rendent négative occupent la région négative. Cela posé, représentons géométriquement chacune des racines imaginaires $a, b, \ldots, k$ par un point dont l'abscisse et l'ordonnée seraient la partie réelle et le coefficient de i de cette racine, on pourra déterminer combien de points ainsi obtenus se trouvent dans l'une ou l'autre des régions que nous avons définies. En effet, si l'on élimine z entre les équations

$$F(z) = 0, \qquad u = \varphi(z),$$

l'équation en u aura pour racines

$$\varphi(a), \quad \varphi(b), \quad \ldots, \quad \varphi(k);$$

ainsi la forme quadratique, déduite de cette équation, conduira à déterminer le nombre de ces racines, dans lesquelles le coefficient de i a un signe donné, et par conséquent le nombre des racines $a, b, \ldots, k$, de l'équation proposée qui occupent la région positive ou négative, relativement à la courbe $\Phi = 0$.

Soit, pour premier exemple,

$$\varphi(z) = (z - \xi - i\eta)^2;$$

les coefficients de i, dans les racines de l'équation en u, nous conduisent alors au nombre des racines de l'équation proposée

$$F(z) = 0,$$

qui sont renfermées dans l'intérieur d'un rectangle, ayant ses côtés parallèles aux axes coordonnés. Désignons par $\pi(\xi, \eta)$ le nombre des termes positifs contenus dans les coefficients des carrés après l'évanouissement des rectangles, lorsqu'on opère sur la forme quadratique relative à l'équation en u; l'expression

$$\tfrac{1}{2}[\pi(\xi, \eta) - \pi(\xi_0, \eta) - \pi(\xi, \eta_0) + \pi(\xi_0, \eta_0)]$$

représentera précisément le nombre de ces racines qui sont contenues dans le rectangle, ayant pour coordonnées de ses sommets les points

$$= \xi, \quad y = \eta, \quad x = \xi_0, \quad y = \eta, \quad x = \xi, \quad y = \eta_0, \quad x = \xi_0, \quad y = \eta_0.$$

En effet, si l'on représente l'une quelconque des quantités a, b, ..., k par $x+iy$, le coefficient de i dans les racines de u sera $(x-\xi)(y-\eta)$, donc $\pi(\xi,\eta)$ sera le nombre des quantités x, y, contenues dans les deux angles opposés par le sommet, ayant les côtés parallèles aux axes coordonnés, et pour l'origine le point $x=\xi$, $y=\eta$, l'un de ces angles ayant ses côtés parallèles aux directions positives des axes. La différence

$$\pi(\xi,\eta)-\pi(\xi_0,\eta)$$

représentera, dans l'intérieur des deux parallèles,

$$x=\xi, \qquad x=\xi_0,$$

l'excès du nombre des racines, dans lesquelles y est $>\eta$, sur le nombre des racines dans lesquelles y est $<\eta$, si l'on a toutefois $\xi_0<\xi$, et l'on en conclut de suite la formule ci-dessus, en considérant une nouvelle ordonnée $\eta_0<\eta$, et retranchant les deux différences

$$\pi(\xi,\eta)-\pi(\xi_0,\eta), \qquad \pi(\xi,\eta_0)-\pi(\xi_0,\eta_0).$$

Si nous prenons, en second lieu,

$$\varphi(z)=\mathrm{P}z^2+\mathrm{Q}z+\mathrm{R},$$

la forme quadratique relative à l'équation en u donnera le nombre des racines qui sont dans l'intérieur, et le nombre des racines qui sont à l'extérieur d'une hyperbole équilatère, placée dans le plan d'une manière quelconque. Enfin, nous remarquerons les propositions suivantes :

1° *Soit* $\pi(\zeta)$ *le nombre des termes positifs contenus dans les coefficients des carrés, pour la forme quadratique relative à l'équation*

$$\mathrm{F}(z+i\zeta)=0,$$

la différence $\pi(\zeta)-\pi(\zeta_0)$ *sera le nombre des racines* $a, b, \ldots, k$, *dans lesquelles le coefficient de* i *est entre les limites* ζ, ζ_0.

2° *L'expression semblable* $\pi(\zeta)-\pi(\zeta_0)$, *relativement à l'équation*

$$\mathrm{F}(\zeta-iz)=0,$$

donnera le nombre des racines dont les parties réelles sont entre les limites ζ, ζ_0.

3° *Relativement à l'équation*

$$\mathrm{F}\left(\zeta\frac{z+i}{z-i}\right)=0,$$

$\pi(\zeta)$ *sera le nombre des racines dont le module est moindre que* ζ.

En général, on trouvera le nombre des racines contenues dans l'intérieur de courbes fermées, si la fonction φ est le quotient de deux polynomes du même degré.

V.

La forme quadratique

$$\sum\frac{i\theta^2(a)}{\mathrm{F}_0(a)\,\mathrm{F}'(a)},$$

composée avec les racines a, b, ..., k de l'équation

$$\mathrm{F}(z)=0,$$

où

$$\theta(a)=x+ay+\ldots+a^{n-1}u,$$

et qui m'a conduit sans aucune considération de continuité aux cas précédents du théorème de M. Cauchy, est susceptible d'une transformation remarquable, par laquelle nous allons retrouver les énoncés mêmes de l'illustre géomètre. Soit

$$\mathrm{F}(z)=pf(z)+p_1f_1(z), \qquad \mathrm{F}_0(z)=qf(z)+q_1f_1(z),$$

p, p_1, q, q_1 étant des constantes quelconques, telles cependant que les degrés de F et f soient égaux.

Nommons $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ les racines de l'équation $f(z)=0$, et représentons par ω le déterminant $\begin{vmatrix} p_1 & p \\ q_1 & q \end{vmatrix}$: je dis qu'on aura cette équation

$$\frac{\theta^2(a)}{\mathrm{F}_0(a)\,\mathrm{F}'(a)}+\frac{\theta^2(b)}{\mathrm{F}_0(b)\,\mathrm{F}'(b)}+\ldots+\frac{\theta^2(k)}{\mathrm{F}_0(k)\,\mathrm{F}'(k)}$$
$$=\frac{1}{\omega}\left[\frac{\theta^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f'(\alpha)}+\frac{\theta^2(\beta)}{f_1(\beta)f'(\beta)}+\ldots+\frac{\theta^2(\varkappa)}{f_1(\varkappa)f'(\varkappa)}\right].$$

Désignons respectivement par φ et φ' les deux formes

$$\sum \frac{\theta^2(a)}{F_0(a)\,F'(a)}, \qquad \sum \frac{\theta^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f'(\alpha)},$$

par Δ et Δ' leurs invariants, par χ et χ' leurs formes adjointes.

Comme je l'ai remarqué daus une de mes Lettres à M. Jacobi, sur la théorie des nombres, les invariants de χ et χ' seront Δ^{n-1}, Δ'^{n-1}, et leurs formes adjointes : $\Delta^{n-2}\varphi$ et $\Delta'^{n-2}\varphi'$. Cela posé, et d'après la définition même que j'ai donnée des formes adjointes, les formes $\frac{\chi}{\Delta}$, $\frac{\chi'}{\Delta'}$ sont représentées, en vertu du théorème IV, par les expressions symboliques

$$\frac{F(z')\,F_0(z) - F(z)\,F_0(z')}{z'-z} \quad \text{et} \quad \frac{f(z')f_1(z) - f(z)f_1(z')}{z'-z}.$$

Or les relations

$$F(z) = pf(z) + p_1 f_1(z), \qquad F_0(z) = qf(z) + q_1 f_1(z)$$

font voir que la première est le produit de la seconde multipliée par le déterminant ω. Ainsi, nous avons déjà

$$\frac{\chi}{\Delta} = \omega\,\frac{\chi}{\Delta'}.$$

De cette équation identique on conclut d'abord, en égalant les invariants des deux formes $\frac{\chi}{\Delta}$ et $\omega\frac{\chi'}{\Delta'}$,

$$\frac{\Delta^{n-1}}{\Delta^n} = \omega^n\,\frac{\Delta'^{n-1}}{\Delta'^n} \qquad \text{ou} \qquad \Delta' = \omega^n\Delta.$$

En égalant ensuite les formes adjointes, il vient

$$\frac{\Delta^{n-2}\varphi}{\Delta^{n-1}} = \omega^{n-1}\,\frac{\Delta'^{n-2}\varphi'}{\Delta'^{n-1}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\varphi}{\Delta} = \omega^{n-1}\,\frac{\varphi'}{\Delta'}$$

et, par suite,

$$\varphi = \frac{1}{\omega}\,\varphi' \;(^1).$$

---

(1) Remarquez que $\frac{1}{\Delta} = A_0^n F_0(a)\,F_0(b)\dots F_0(k)$; c'est donc la fonction qui provient de l'élimination de z entre $F(z) = 0$, $F_0(z) = 0$. On peut l'obtenir sous

Je vais faire usage de ce résultat, en supposant

$$F(z) = f(z) + if_1(z), \qquad F_0(z) = f(z) - if_1(z),$$

f et f_1 étant des fonctions réelles dont la première soit de degré n, condition qu'on peut toujours remplir en multipliant, si cela est nécessaire, F par une constante imaginaire. Dans ce cas, l'identité

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{i\theta^2(a)}{F_0(a)\,F'(a)} + \frac{i\theta^2(b)}{F_0(b)\,F'(b)} + \dots + \frac{i\theta^2(k)}{F_0(k)\,F'(k)} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\theta^2(a)}{f_1(\alpha)f'(\alpha)} + \frac{\theta^2(\beta)}{f_1(\beta)f'(\beta)} + \dots + \frac{\theta^2(\varkappa)}{f_1(\varkappa)f'(\varkappa)}\right],\end{aligned}$$

où α, β, ..., $\varkappa$ sont les racines de l'équation réelle $f(z) = 0$, conduit à ces théorèmes (1) :

Nommons, pour abréger, π et ν les nombres de termes positifs et négatifs que présentent les coefficients des carrés de la forme φ, après l'évanouissement des rectangles. D'après mon théorème fondamental, π *sera le nombre des racines de l'équation* $F(z) = 0$, *dont le coefficient de* i *est positif, et* ν *le nombre de ces racines dans lesquelles le coefficient de* i *est négatif.*

Or ces deux nombres vont recevoir une acception nouvelle.

La variable z *croissant de* $-\infty$ *à* $+\infty$, π *sera le nombre de fois où le rapport* $\frac{f(z)}{f_1(z)}$ *passe en s'évanouissant du positif au négatif, plus le nombre des couples de racines imaginaires de l'équation* $f(z) = 0$, *et* ν *le nombre de fois où le même rapport passe en s'évanouissant du négatif au positif, augmenté encore du nombre des couples de racines imaginaires de la même équation.*

Supposons en premier lieu les racines α, β, ..., $\varkappa$, toutes réelles;

---

forme de déterminant, puisque $\frac{1}{\Delta}$ est l'invariant de la forme représentée symboliquement par $\frac{F(z')\,F_0(z) - F(z)\,F_0(z')}{z'-z}$.

(1) La fonction désignée ici par φ diffère par le facteur i de la fonction désignée plus haut par la même lettre. E. P.

on pourra faire évanouir les rectangles de φ par la substitution

$$\frac{\theta(\alpha)}{f'(\alpha)} = \mathrm{X}, \qquad \frac{\theta(\beta)}{f'(\beta)} = \mathrm{Y}, \qquad \frac{\theta(\varkappa)}{f'(\varkappa)} = \mathrm{U},$$

ce qui donnera la transformée

$$\frac{f'(\alpha)}{f_1(\alpha)}\mathrm{X}^2 + \frac{f'(\beta)}{f_1(\beta)}\mathrm{Y}^2 + \ldots + \frac{f'(\varkappa)}{f_1(\varkappa)}\mathrm{U}^2.$$

Or, en s'évanouissant par exemple pour $z = \alpha$, le rapport $\frac{f(z)}{f_1(z)}$ passera, pour des valeurs croissantes de la variable, du négatif au positif, ou du positif au négatif, suivant que la quantité $\frac{f'(\alpha)}{f_1(\alpha)}$ sera positive ou négative; ainsi, dans ce cas, les nombres π et ν ont bien la signification indiquée.

En second lieu, supposons la présence des racines imaginaires, et soient par exemple α et β deux racines conjuguées. Relativement à ces deux racines on fera

$$\frac{\theta(\alpha)}{[f_1(\alpha)f'(\alpha)]^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{X} + i\mathrm{Y}, \qquad \frac{\theta(\beta)}{[f_1(\beta)f'(\beta)]^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{X} - i\mathrm{Y},$$

ce qui donnera

$$\frac{\theta^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f'(\alpha)} + \frac{\theta^2(\beta)}{f_1(\beta)f'(\beta)} = 2\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{Y}^2.$$

Ainsi, en général (toutes choses égales d'ailleurs), *deux racines imaginaires conjuguées donnent lieu à la différence de deux carrés, lorsqu'on fait évanouir les rectangles par une substitution réelle, ce qui donne bien la signification attribuée aux nombres π et ν.*

On en conclut que *la différence $\pi - \nu$ sera l'excès du nombre de fois où le rapport $\frac{f(z)}{f_1(z)}$ passe en s'évanouissant du positif au négatif, sur le nombre de fois où ce rapport passe en s'évanouissant du négatif au positif.*

Ce sera donc l'indice intégral

$$\mathbf{J}_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(z)}{f_1(z)},$$

qui représente par suite la différence entre le nombre des racines de l'équation $\mathrm{F}(z) = 0$, dans lesquelles le coefficient de i est positif, et le nombre de ces racines, pour lesquelles ce coefficient est négatif. Cette remarque, faite déjà par M. Sturm dans son Mémoire sur le théorème de M. Cauchy, a les conséquences que nous allons indiquer.

VI.

Considérons une courbe fermée C, rapportée à des axes rectangulaires, et dont les coordonnées s'expriment par les formules

$$x = \frac{\varphi(t)}{\chi(t)}, \qquad y = \frac{\varphi_1(t)}{\chi(t)},$$

les fonctions χ, φ, φ_1 étant entières. Je supposerai qu'en faisant croître t depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on obtienne, en revenant au point de départ, tous les points de cette courbe. Cela étant, j'observe que le théorème de M. Cauchy, pour un contour quelconque, est évident lorsqu'on l'applique à l'équation $z = 0$.

Il suffit, en effet, d'un peu d'attention pour reconnaître qu'en suivant la courbe C, toujours dans le même sens, jusqu'à ce qu'on revienne au point de départ, le rapport $\frac{x}{y}$ passera, en s'évanouissant, autant de fois du positif au négatif que du négatif au positif, si l'origine des coordonnées est en dehors de la courbe. Au contraire, si l'origine se trouve dans son intérieur, ce rapport passera en s'évanouissant, deux fois de plus du positif au négatif que du négatif au positif.

Cela posé, un simple changement d'origine, en rapportant la courbe à de nouveaux axes, passant par le point

$$x = \alpha, \qquad y = \beta,$$

permettra d'étendre le théorème de M. Cauchy à l'équation

$$z - \alpha - i\beta = 0.$$

De là résulte que nous pouvons immédiatement déterminer l'indice intégral relatif à toutes les équations imaginaires de la forme

$$\varphi(t) + i\varphi_1(t) - (a + i\beta)\chi(t) = 0;$$

et, par suite, l'excès du nombre de leurs racines dans lesquelles le coefficient de i est positif, sur le nombre de leurs racines dans lesquelles ce coefficient est négatif, cet excès étant zéro ou deux, suivant que le point $x = \alpha$, $y = \beta$ est extérieur ou intérieur à la courbe C.

Cela posé, faisons dans l'équation proposée

$$\mathrm{F}(z) = 0, \qquad z = \frac{\varphi(t) + i\varphi_1(t)}{\chi(t)};$$

en appliquant ce qui précède au résultat de cette substitution dans chacun des facteurs simples $z - a$, $z - b$, ..., $z - k$, de $\mathrm{F}(z)$, on arrive à cette proposition :

L'excès du nombre des racines de l'équation

$$\mathrm{F}\left[\frac{\varphi(t) + i\varphi_1(t)}{\chi(t)}\right] = 0,$$

dans lesquelles le coefficient de i est positif, sur le nombre des racines dans lesquelles ce coefficient est négatif, est égal à deux fois le nombre des racines a, b, ..., k de l'équation $\mathrm{F}(z) = 0$, *qui sont renfermées dans l'intérieur de la courbe* C. *Ainsi, en désignant par* μ *ce nombre, et en nommant* P *et* N *le nombre des termes positifs et négatifs qui se présentent dans la forme quadratique relative à l'équation en t, lorsqu'on a fait évanouir les rectangles, on aura la relation*

$$\mu = \frac{1}{2}(\mathrm{P} - \mathrm{N}).$$

Voilà où je me suis arrêté dans l'étude de cette découverte si belle et si grande de M. Cauchy. J'ai été amené à cette étude en grande partie par des recherches sur des questions arithmétiques, qui, depuis l'année 1847, ont appelé mon attention sur les formes quadratiques composées d'une somme de carrés de fonctions semblables des racines d'une même équation. Aussi ai-je éprouvé une véritable satisfaction à rattacher à la considération de ces formes ces magnifiques théorèmes de M. Sturm et M. Cauchy, qui ouvrent l'ère nouvelle de l'Algèbre moderne. Sous ce nouveau point de vue, d'ailleurs, le fait de l'existence d'une infinité de systèmes de fonctions jouissant des mêmes propriétés pour la détermination des

nombres des racines réelles ou imaginaires, qui sont comprises entre des limites données, se présente dès les premiers pas et d'une manière qui en fait mieux saisir le caractère et l'importance.

Parmi les formes variées dont le théorème de M. Sturm est ainsi susceptible, la suivante me semble la plus simple :

Soit l'équation proposée

$$f(z) = 0.$$

Nommons f_1 *la dérivée de* f, *et désignons, comme précédemment, par* $\pi(\zeta)$ *le nombre des termes positifs de la forme quadratique qui a pour expression symbolique*

$$\frac{(z-\zeta)f(z')f_1(z) - (z'-\zeta)f(z)f_1(z')}{z'-z},$$

lorsqu'on a fait évanouir les rectangles; le nombre des racines réelles comprises entre deux limites ζ *et* ζ_0 *sera*

$$\pi(\zeta) - \pi(\zeta_0).$$

Une analyse particulière m'a donné, pour la détermination du nombre total des racines réelles et imaginaires, cet autre théorème :

Soit, sous forme homogène,

$$u = f(x, y)$$

le premier membre de l'équation proposée du degré n. Posons

$$u_0 = f(x_0, y_0)$$

et considérons l'expression

$$\frac{1}{xy_0 - x_0 y}\left(\frac{du}{dx}\frac{du_0}{dy_0} - \frac{du}{dy}\frac{du_0}{dx_0}\right).$$

En remplaçant, la division faite,

$$x_0^{n-2}, \quad x_0^{n-3}y_0, \quad \ldots, \quad x_0 y_0^{n-3}, \quad y_0^{n-2}$$

d'une part, et de l'autre

$$x^{n-2}, \quad x^{n-3}y, \quad \ldots, \quad xy^{n-3}, \quad y^{n-2},$$

respectivement par X, Y, ..., V, *on obtiendra une forme qua-*

dratique (u); *et, relativement à cette forme, la quantité désignée précédemment par* $\pi - \nu$ *sera le nombre total des racines réelles de l'équation* $u = 0$, *moins une unité.*

Soit u' ce que devient u par la substitution

$$x = \lambda x' + \mu y', \qquad y = \lambda_0 x' + \mu_0 y';$$

les deux formes quadratiques (u) et (u') seront équivalentes, et si l'on nomme X′, Y′, ..., V′ les indéterminées de (u'), la substitution pour passer de l'une à l'autre s'obtiendra par l'identité suivante :

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \ldots, \mathrm{V})(x, y)^{n-2} = (\mathrm{X}', \mathrm{Y}', \ldots, \mathrm{V}')(\lambda x + \lambda_0 y, \mu x + \mu_0 y)^{n-2},$$

où, d'après l'excellente notation de M. Cayley,

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \ldots, \mathrm{V})(x, y)^{n-2} = \mathrm{X} x^{n-2} + \frac{n-2}{1} \mathrm{Y} x^{n-3} y + \ldots + \mathrm{V} y^{n-2}.$$

Hyères, 28 janvier 1854.

SUR

LE NOMBRE LIMITÉ D'IRRATIONALITÉS

AUXQUELLES SE RÉDUISENT LES RACINES DES ÉQUATIONS A COEFFICIENTS ENTIERS COMPLEXES D'UN DEGRÉ ET D'UN DISCRIMINANT DONNÉS.

(Extrait d'une Lettre à M Borchardt, *Journal de Crelle*, t. 53.)

Permettez-moi, en continuant en quelque sorte ce que je vous ai écrit au sujet de la détermination des racines imaginaires des équations algébriques, de vous entretenir des questions arithmétiques auxquelles je songeais, lorsque chemin faisant j'ai été ainsi amené aux théorèmes de M. Cauchy et de M. Sturm. Ces questions arithmétiques avaient pour objet la théorie des nombres complexes, et en particulier l'étude des formes décomposables en facteurs linéaires, lorsque les coefficients sont des entiers de l'espèce $a + b\sqrt{-1}$. Pour le cas des entiers réels, la réduction des formes quadratiques définies avait été, comme vous savez, l'instrument analytique que j'avais surtout mis en œuvre; mais, pour passer de là aux nombres complexes, il fallait à ma méthode une modification que j'ai été bien longtemps à découvrir. C'est le hasard en effet qui me l'a donnée, en traitant de la décomposition des nombres en quatre carrés, sous le point de vue que j'ai indiqué dans le Tome 47 de ce *Journal*. Je vais essayer de vous en donner une idée précise en démontrant le théorème que j'ai eu déjà occasion d'énoncer dans une note de mon travail sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes :

Les racines de toutes les équations à coefficients entiers complexes, d'un degré donné, et pour lesquelles le discriminant (déterminant de Gauss) a la même valeur, ne représentent qu'un nombre essentiellement limité d'irrationalités distinctes (1).

(1) Comme le rappelle M. Hermite, ce théorème a été énoncé par lui pour la

J'aurai, pour cela, deux points principaux à établir. Le premier consiste dans la théorie arithmétique de la réduction de ces formes quadratiques à indéterminées imaginaires conjuguées que j'ai fait servir à la démonstration du théorème de M. Cauchy. En désignant par $x, y, z, \ldots, v$, $n+1$ indéterminées imaginaires, et par $x_0, y_0, z_0, \ldots, v_0$ leurs conjuguées respectives, elles sont, comme vous savez, définies de cette manière :

$$\begin{aligned} f = \quad & x_0(a_{0,0}x + a_{0,1}y + a_{0,2}z + \ldots + a_{0,n}v) \\ & + y_0(a_{1,0}x + a_{1,1}y + a_{1,2}z + \ldots + a_{1,n}v) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + v_0(a_{n,0}x + a_{n,1}y + a_{n,2}z + \ldots + a_{n,n}v) \end{aligned}$$

avec la condition que $a_{\mu,\nu}$ et $a_{\nu,\mu}$ seront des quantités imaginaires conjuguées. En mettant en évidence, tant dans les coefficients que dans les indéterminées, les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$, la forme f sera si l'on veut un cas particulier des formes réelles à $2n+2$ indéterminées, mais qu'on traite, grâce au jeu des quantités imaginaires, par les procédés essentiellement propres aux formes à $n+1$ indéterminées seulement. Sans insister davantage sur cette considération que j'ai développée ailleurs dans le cas de $n=1$, j'énoncerai les propositions algébriques suivantes qui, si simples qu'elles soient, doivent être au moins indiquées pour ne rien omettre dans l'enchaînement des idées.

1° En faisant, dans f, la substitution

$$\mathrm{S}\left\{\begin{aligned} x &= \alpha X + \alpha' Y + \ldots + \alpha^{(n)} V, \\ y &= \beta X + \beta' Y + \ldots + \beta^{(n)} V, \\ z &= \gamma X + \gamma' Y + \ldots + \gamma^{(n)} V, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v &= \lambda X + \lambda' Y + \ldots + \lambda^{(n)} V; \end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{S}_0\left\{\begin{aligned} x_0 &= \alpha_0 X_0 + \alpha'_0 Y_0 + \ldots + \alpha_0^{(n)} V_0, \\ y_0 &= \beta_0 X_0 + \beta'_0 Y_0 + \ldots + \beta_0^{(n)} V_0, \\ z_0 &= \gamma_0 X_0 + \gamma'_0 Y_0 + \ldots + \gamma_0^{(n)} V_0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v_0 &= \lambda_0 X_0 + \lambda'_0 Y_0 + \ldots + \lambda_0^{(n)} V_0, \end{aligned}\right.$$

première fois dans son Mémoire sur la transformation des fonctions abéliennes (*voir* plus loin p. 477). Quant au théorème analogue relatif aux nombres réels, M. Hermite l'avait démontré antérieurement (p. 225 de ce Volume). E. P.

où α et α_0, β et β_0, etc. sont des quantités imaginaires conjuguées, on aura une transformée *de même nature :*

$$\begin{aligned} F = \quad & X_0(A_{0,0}X + A_{0,1}Y + A_{0,2}Z + \ldots + A_{0,n}V) \\ & + Y_0(A_{1,0}X + A_{1,1}Y + A_{1,2}Z + \ldots + A_{1,n}V) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + V_0(A_{n,0}X + A_{n,1}Y + A_{n,2}Z + \ldots + A_{n,n}V), \end{aligned}$$

de sorte que $A_{\mu,\nu}$ et $A_{\nu,\mu}$ seront comme $a_{\mu,\nu}$ et $a_{\nu,\mu}$ des quantités conjuguées.

2° Soient D, d, ω, ω_0 les déterminants des systèmes suivants :

$$D = \begin{vmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & \ldots & A_{0,n} \\ A_{1,0} & A_{1,1} & \ldots & A_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n,0} & A_{n,1} & \ldots & A_{n,n} \end{vmatrix}, \qquad d = \begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \ldots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix};$$

$$\omega = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \ldots & \alpha^{(n)} \\ \beta & \beta' & \ldots & \beta^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda & \lambda' & \ldots & \lambda^{(n)} \end{vmatrix}, \qquad \omega_0 = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha'_0 & \ldots & \alpha_0^{(n)} \\ \beta_0 & \beta'_0 & \ldots & \beta_0^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_0 & \lambda'_0 & \ldots & \lambda_0^{(n)} \end{vmatrix};$$

on aura l'équation

$$D = d\omega\omega_0,$$

d'où résulte que d peut être regardé comme l'invariant de la forme f.

En vue de la théorie de la réduction, j'ajouterai cette remarque qu'en posant

$$\begin{aligned} g = a_{0,0}f - \frac{df}{dx}\frac{df}{dx_0} = \quad & y_0(b_{1,1}y + b_{1,2}z + \ldots + b_{1,n}v) \\ & + z_0(b_{2,1}y + b_{2,2}z + \ldots + b_{2,n}v) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + v_0(b_{n,1}y + b_{n,2}z + \ldots + b_{n,n}v) \end{aligned}$$

où

$$b_{\mu,\nu} = a_{0,0}a_{\mu,\nu} - a_{\mu,0}a_{0,\nu},$$

on obtient une forme aux indéterminées y et y_0, z et z_0, $\ldots$, v et v_0 qui est un *covariant* de f, relativement à la substitution $(\mathrm{S}, \mathrm{S}_0)$ quand on y suppose

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0, \qquad \ldots, \qquad \lambda = 0.$$

Et si l'on appelle D' l'invariant de g, on aura

$$D' = a_{0,0}^{n-1} D.$$

Cela posé, je vais établir qu'étant donnée une forme f *définie,* on peut trouver, pour les coefficients de la substitution S, des nombres entiers complexes, dont le déterminant ω soit *un*, et tels que dans la transformée F on ait

$$(a) \qquad A_{0,0}A_{1,1}\ldots A_{n,n} < 2^{\frac{n(n+1)}{2}}D.$$

Ce sera cette transformée que j'appellerai *réduite*. A cet effet, je considère l'ensemble des formes déduites de f, par toutes les substitutions (S, S_0) à coefficients entiers complexes et au déterminant 1. Je distingue ensuite, dans ces transformées, celles où le coefficient de XX_0 est le plus petit possible. Parmi ces dernières, je dis qu'il en existe une que je représenterai ainsi :

$$\begin{aligned}
F = \quad & X_0(A_{0,0}X + A_{0.1}Y + \ldots + A_{0,n}V) \\
& + Y_0(A_{1,0}X + A_{1,1}Y + \ldots + A_{1,n}V) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + V_0(A_{n,0}X + A_{n,1}Y + \ldots + A_{n,n}V)
\end{aligned}$$

et remplissant ces deux conditions : premièrement, que la forme

$$\begin{aligned}
G = A_{0,0}F - \frac{dF}{dX}\frac{dF}{dX_0} = \quad & Y_0(B_{1,1}Y + B_{1,2}Z + \ldots + B_{1,n}V) \\
& + Z_0(B_{2,1}Y + B_{2,2}Z + \ldots + B_{2,n}V) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + V_0(B_{n,1}Y + B_{n,2}Z + \ldots + B_{n,n}V)
\end{aligned}$$

soit réduite dans le sens propre aux formes à n paires d'indéterminées; secondement, que les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$ dans les diverses quantités $A_{0,\mu}$ soient moindres en valeur absolue que la moitié du coefficient minimum $A_{0,0}$. En effet, en faisant dans F la substitution

$$\begin{aligned}
X &= \mathfrak{x} + \mathfrak{m}\mathfrak{y} + \mathfrak{n}\mathfrak{z} + \ldots + \mathfrak{r}\mathfrak{v}, \\
Y &= \mathfrak{m}'\mathfrak{y} + \mathfrak{n}'\mathfrak{z} + \ldots + \mathfrak{r}'\mathfrak{v}, \\
Z &= \mathfrak{m}''\mathfrak{y} + \mathfrak{n}''\mathfrak{z} + \ldots + \mathfrak{r}''\mathfrak{v}, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
V &= \mathfrak{m}^{(n)}\mathfrak{y} + \mathfrak{n}^{(n)}\mathfrak{z} + \ldots + \mathfrak{r}^{(n)}\mathfrak{v}, \\
X_0 &= \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{m}_0\mathfrak{y}_0 + \mathfrak{n}_0\mathfrak{z}_0 + \ldots + \mathfrak{r}_0\mathfrak{v}_0, \\
Y_0 &= \mathfrak{m}'_0\mathfrak{y}_0 + \mathfrak{n}'_0\mathfrak{z}_0 + \ldots + \mathfrak{r}'_0\mathfrak{v}_0, \\
Z_0 &= \mathfrak{m}''_0\mathfrak{y}_0 + \mathfrak{n}''_0\mathfrak{z}_0 + \ldots + \mathfrak{r}''_0\mathfrak{v}_0, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
V_0 &= \mathfrak{m}_0^{(n)}\mathfrak{y}_0 + \mathfrak{n}_0^{(n)}\mathfrak{z}_0 + \ldots + \mathfrak{r}_0^{(n)}\mathfrak{v}_0,
\end{aligned}$$

on trouvera une transformée $\mathfrak{f}$, dans laquelle le coefficient de $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_0$ sera encore $A_{0,0}$ et où la forme $\mathfrak{G}$ analogue à G, savoir

$$\mathfrak{G} = A_{0,0}\mathfrak{f} - \frac{d\mathfrak{f}}{d\mathfrak{x}}\frac{d\mathfrak{f}}{d\mathfrak{x}_0},$$

sera (d'après ce qui a été dit tout à l'heure) la transformée de G par la substitution :

$$\begin{aligned}
Y &= \mathfrak{m}'\mathfrak{y} + \mathfrak{n}'\mathfrak{z} + \ldots + \mathfrak{r}'\mathfrak{v}, \\
Z &= \mathfrak{m}''\mathfrak{y} + \mathfrak{n}''\mathfrak{z} + \ldots + \mathfrak{r}''\mathfrak{v}, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
V &= \mathfrak{m}^{(n)}\mathfrak{y} + \mathfrak{n}^{(n)}\mathfrak{z} + \ldots + \mathfrak{r}^{(n)}\mathfrak{v}_0; \\
Y_0 &= \mathfrak{m}'_0\mathfrak{y}_0 + \mathfrak{n}'_0\mathfrak{z}_0 + \ldots + \mathfrak{r}'_0\mathfrak{v}_0, \\
Z_0 &= \mathfrak{m}''_0\mathfrak{y}_0 + \mathfrak{n}''_0\mathfrak{z}_0 + \ldots + \mathfrak{r}''_0\mathfrak{v}_0, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
V_0 &= \mathfrak{m}_0^{(n)}\mathfrak{y}_0 + \mathfrak{n}_0^{(n)}\mathfrak{z}_0 + \ldots + \mathfrak{r}_0^{(n)}\mathfrak{v}_0.
\end{aligned}$$

Mais cette substitution est la plus générale entre les n paires d'indéterminées conjuguées, et peut être employée à réduire la forme $\mathfrak{G}$; on voit donc bien qu'on peut admettre, dans l'ensemble des formes dont j'ai parlé, l'existence d'une transformée remplissant la première des conditions énoncées. Quant à la seconde, on y satisfait à l'aide des entiers complexes $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \ldots, \mathfrak{r}$, qui restent jusqu'ici arbitraires; en désignant, en effet, pour un instant, par $\mathfrak{a}_{0,\mu}$ les coefficients de $\mathfrak{f}$ qui correspondent à $A_{0,\mu}$, on a les relations

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_{0,1} &= \mathfrak{m}A_{0,0} + \mathfrak{m}'A_{0,1} + \mathfrak{m}''A_{0,2} + \ldots + \mathfrak{m}^{(n)}A_{0,n}, \\
\mathfrak{a}_{0,2} &= \mathfrak{n}A_{0,0} + \mathfrak{n}'A_{0,1} + \mathfrak{n}''A_{0,2} + \ldots + \mathfrak{n}^{(n)}A_{0,n}, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\mathfrak{a}_{0,n} &= \mathfrak{r}A_{0,0} + \mathfrak{r}'A_{0,1} + \mathfrak{r}''A_{0,2} + \ldots + \mathfrak{r}^{(n)}A_{0,n},
\end{aligned}$$

et l'on voit qu'on peut déterminer les entiers complexes $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}, \ldots, \mathfrak{r}$, de manière que la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans $\mathfrak{a}_{0,1}, \mathfrak{a}_{0,2}, \ldots, \mathfrak{a}_{0,n}$ soient au-dessous de $\frac{1}{2}A_{0,0}$. Admettant donc l'existence de la forme F, remplissant les deux conditions précédentes, nous allons supposer que la relation (a) soit vraie à l'égard des formes réduites contenant n paires d'indéterminées et nous en conclurons qu'elle a lieu nécessairement dans les formes qui en renferment $n+1$. Elle se trouvera ainsi établie dans toute sa généralité puisqu'elle a lieu comme je l'ai fait voir ailleurs (*Journal de Crelle*, t. 47) pour $n = 1$. A cet effet, j'observe que, les coefficients de la forme G ayant pour expression générale

$$B_{\mu,\nu} = A_{0,0}A_{\mu,\nu} - A_{\mu,0}A_{0,\nu},$$

on trouvera, lorsque les deux indices sont égaux,

$$B_{\mu,\mu} = A_{0,0}A_{\mu,\mu} - A_{\mu,0}A_{0,\mu};$$

de sorte que ces quantités peuvent alors être regardées comme les invariants de formes quadratiques à deux paires d'indéterminées

$$(A_{0,0},\ A_{\mu,0},\ A_{0,\mu},\ A_{\mu,\mu}),$$

formes qui seront définies et réduites : définies, car nous avons supposé f et, par suite, F elle-même définie, et réduites, parce que le coefficient minimum $A_{0,0}$ sera au plus égal à $A_{\mu,\mu}$, et que la partie réelle comme le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans $A_{\mu,0}$ sont, en valeur absolue, au-dessous de la limite $\frac{1}{2}A_{0,0}$. Donc, d'après ce que j'ai établi dans le Mémoire précité, on aura

$$A_{0,0}A_{\mu,\mu} < 2B_{\mu,\mu}$$

et, par suite,

$$A^n_{0,0}A_{1,1}A_{2,2}\ldots A_{n,n} < 2^n B_{1,1}B_{2,2}\ldots B_{n,n}.$$

Mais, en admettant la relation (a) pour les formes réduites G, qui contiennent n paires d'indéterminées et dont l'invariant est $A^{n-1}_{0,0}D$, on aura

$$B_{1,1}B_{2,2}\ldots B_{n,n} < 2^{\frac{n(n-1)}{2}} A^{n-1}_{0,0}D;$$

or on en conclut, après avoir multiplié membre à membre par l'inégalité précédente et supprimé le facteur $A^{n-1}_{0,0}$,

$$A_{0,0}A_{1,1}A_{2,2}\ldots A_{n,n} < 2^{\frac{n(n+1)}{2}} D.$$

C'est ce résultat qui tout à l'heure me servira de base pour la théorie de la réduction des formes décomposables en facteurs linéaires, et qui sont à coefficients et indéterminées complexes. Mais j'indiquerai d'abord la conséquence suivante qui s'en tire immédiatement.

Concevons qu'en vue de la théorie des formes f telle que je

l'envisage ici, on modifie l'idée arithmétique de *classe*, de manière à désigner ainsi l'ensemble des transformées déduites d'une forme donnée, par ces substitutions spéciales (S, S_0) lorsqu'on attribue aux coefficients tous les systèmes de valeurs entières complexes, pour lesquelles le déterminant $\omega = 1$, on aura ce théorème : *La totalité des formes de la même expression analytique f, lorsqu'on les suppose définies, et à coefficients entiers tant réels que complexes, ne représente pour un invariant donné qu'un nombre essentiellement limité de classes distinctes.* Effectivement, dans la réduite F, tous les coefficients réels $A_{\mu,\mu}$ sont limités en vertu de la relation (a) et les modules des coefficients imaginaires $A_{\mu,\nu}$ le sont par la condition

$$A_{\mu,\mu}A_{\nu,\nu} - A_{\mu,\nu}A_{\nu,\mu} > 0,$$

qui résulte, comme on le voit immédiatement, de ce qu'on suppose F une forme définie. On n'aura donc pour une valeur donnée de l'invariant qu'un nombre limité de réduites et, par conséquent, un nombre limité de classes.

Je passe maintenant au second point qui me reste à traiter pour arriver à mon théorème.

Soit φ une forme à n indéterminées imaginaires, $x, y, \ldots, u$, à coefficients complexes, et décomposable en n facteurs linéaires, savoir :

$$\begin{aligned}
A &= ax + a'y + \ldots + a^{(n-1)}u,\\
B &= bx + b'y + \ldots + b^{(n-1)}u,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
L &= lx + l'y + \ldots + l^{(n-1)}u,
\end{aligned}$$

de sorte qu'on ait

$$\varphi = AB\ldots L.$$

Ces quantités A, B, ..., L ne se trouveront point complètement déterminées par la forme donnée φ, car il est clair qu'on peut multiplier par un facteur constant chacune d'elles, pourvu que le produit de tous ces facteurs constants soit l'unité. J'observe cependant que le déterminant Δ, relatif au système de ces fonctions linéaires, ne subira aucun changement par l'introduction de ces multiplicateurs arbitraires, car en remplaçant A, B, ..., L, par $t_1 A$, $t_2 B$, ..., $t_n L$ le déterminant relatif aux nouvelles fonctions sera

$$t_1 t_2 \ldots t_n \Delta,$$

et l'on doit faire, comme nous l'avons dit,

$$t_1 t_2 \ldots t_n = 1.$$

Nous pouvons donc, désormais, regarder Δ comme absolument déterminé par la forme proposée φ. Cela posé, j'introduis encore les facteurs linéaires conjugués de A, B, ..., L, qui seront, en suivant la notation déjà employée,

$$\begin{aligned}
A_0 &= a_0 x_0 + a'_0 y_0 + \ldots + a_0^{(n-1)} u_0,\\
B_0 &= b_0 x_0 + b'_0 y_0 + \ldots + b_0^{(n-1)} u_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
L_0 &= l_0 x_0 + l'_0 y_0 + \ldots + l_0^{(n-1)} u_0,
\end{aligned}$$

et dont le déterminant sera désigné par Δ_0. Puis je compose, avec ces deux groupes de fonctions, la forme quadratique suivante, de la nature de celles qui nous ont occupé précédemment, savoir

$$f = AA_0 + BB_0 + \ldots + LL_0.$$

Cette forme dépendra essentiellement des multiplicateurs arbitraires que l'on peut introduire dans les fonctions linéaires A, B, ..., mais, quels que soient ces multiplicateurs, son invariant D sera la quantité entièrement connue

$$D = \Delta\Delta_0,$$

de plus elle sera toujours définie, et l'on pourra lui appliquer la méthode de réduction exposée plus haut. Concevons donc que pour un système déterminé des facteurs linéaires A, B, ..., L, on ait obtenu la substitution propre à effectuer cette réduction, et que je continuerai de représenter par la notation (S, S_0). En effectuant la partie de cette substitution désignée par S, dans A, B, ..., L, je supposerai qu'ils deviennent

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \mathfrak{a} X + \mathfrak{a}' Y + \ldots + \mathfrak{a}^{(n-1)} U,\\
\mathfrak{B} &= \mathfrak{b} X + \mathfrak{b}' Y + \ldots + \mathfrak{b}^{(n-1)} U,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathfrak{L} &= \mathfrak{l} X + \mathfrak{l}' Y + \ldots + \mathfrak{l}^{(n-1)} U,
\end{aligned}$$

tandis que, par la substitution S_0, les facteurs conjugués A_0, B_0, ..., L_0 se changent en

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_0 &= \mathfrak{a}_0 X_0 + \mathfrak{a}'_0 Y_0 + \ldots + \mathfrak{a}_0^{(n-1)} U_0,\\
\mathfrak{B}_0 &= \mathfrak{b}_0 X_0 + \mathfrak{b}'_0 Y_0 + \ldots + \mathfrak{b}_0^{(n-1)} U_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathfrak{L}_0 &= \mathfrak{l}_0 X_0 + \mathfrak{l}'_0 Y_0 + \ldots + \mathfrak{l}_0^{(n-1)} U_0.
\end{aligned}$$

De là résultera pour la transformée de φ, par la substitution S, l'expression

$$\Phi = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\ldots\mathfrak{L},$$

et pour la transformée réduite de f, par la substitution (S, S_0), la suivante

$$F = \mathfrak{A}\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{B}\mathfrak{B}_0 + \ldots + \mathfrak{L}\mathfrak{L}_0.$$

Cela étant, je vais démontrer qu'en supposant la forme donnée φ, à coefficients entiers complexes, et irréductible, dans ce sens que l'équation $\varphi = 0$ n'admette d'autres solutions entières que

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \ldots, \quad u = 0,$$

les coefficients de Φ, qui seront aussi des entiers complexes, auront tous des valeurs finies et limitées par l'invariant $D = \Delta\Delta_0$.

Soient, à cet effet, σ, σ_1, ..., σ_{n-1}, les coefficients de XX_0, YY_0, ..., UU_0, dans la forme réduite F, à savoir

$$\begin{aligned}
\sigma &= \mathfrak{a}\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}\mathfrak{b}_0 + \ldots + \mathfrak{l}\mathfrak{l}_0,\\
\sigma_1 &= \mathfrak{a}'\mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{b}'\mathfrak{b}'_0 + \ldots + \mathfrak{l}'\mathfrak{l}'_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\sigma_{n-1} &= \mathfrak{a}^{(n-1)}\mathfrak{a}_0^{(n-1)} + \mathfrak{b}^{(n-1)}\mathfrak{b}_0^{(n-1)} + \ldots + \mathfrak{l}^{(n-1)}\mathfrak{l}_0^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

Ces relations peuvent s'écrire de la manière suivante

$$\begin{aligned}
1 &= \operatorname{mod}^2 \frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{\sigma}} + \operatorname{mod}^2 \frac{\mathfrak{b}}{\sqrt{\sigma}} + \ldots + \operatorname{mod}^2 \frac{\mathfrak{l}}{\sqrt{\sigma}},\\
1 &= \operatorname{mod}^2 \frac{\mathfrak{a}'}{\sqrt{\sigma_1}} + \operatorname{mod}^2 \frac{\mathfrak{b}'}{\sqrt{\sigma_1}} + \ldots + \operatorname{mod}^2 \frac{\mathfrak{l}'}{\sqrt{\sigma_1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
1 &= \operatorname{mod}^2 \frac{\mathfrak{a}^{(n-1)}}{\sqrt{\sigma_{n-1}}} + \operatorname{mod}^2 \frac{\mathfrak{b}^{(n-1)}}{\sqrt{\sigma_{n-1}}} + \ldots + \operatorname{mod}^2 \frac{\mathfrak{l}^{(n-1)}}{\sqrt{\sigma_{n-1}}},
\end{aligned}$$

et montrent alors que les modules des quantités $\frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{\sigma}}$, $\frac{\mathfrak{b}}{\sqrt{\sigma}}$, ... sont tous inférieurs à l'unité. Il en résulte qu'en représentant par Ψ le produit des facteurs,

$$\begin{gathered}
\frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{\sigma}}\mathrm{X} + \frac{\mathfrak{a}'}{\sqrt{\sigma_1}}\mathrm{Y} + \ldots + \frac{\mathfrak{a}^{(n-1)}}{\sqrt{\sigma_{n-1}}}\mathrm{U},\\
\frac{\mathfrak{b}}{\sqrt{\sigma}}\mathrm{X} + \frac{\mathfrak{b}'}{\sqrt{\sigma_1}}\mathrm{Y} + \ldots + \frac{\mathfrak{b}^{(n-1)}}{\sqrt{\sigma_{n-1}}}\mathrm{U},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{\mathfrak{l}}{\sqrt{\sigma}}\mathrm{X} + \frac{\mathfrak{l}'}{\sqrt{\sigma_1}}\mathrm{Y} + \ldots + \frac{\mathfrak{l}^{(n-1)}}{\sqrt{\sigma_{n-1}}}\mathrm{U},
\end{gathered}$$

c'est-à-dire ce que devient Φ, lorsqu'on y remplace X, Y, ..., U par

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\mathrm{X},\quad \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}\mathrm{Y},\quad \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\sigma_{n-1}}}\mathrm{U},$$

les modules des coefficients de cette transformée sont eux-mêmes limités. En effet, si pour fixer les idées nous considérons le coefficient d'un quelconque des termes de Ψ, que nous représenterons par $\mathrm{X}^p\mathrm{Y}^q\ldots\mathrm{U}^s$, les exposants étant des entiers dont la somme est n, on trouve sans peine que la valeur *maximum* de son module est donnée par le facteur numérique qui multiplie le même terme $\mathrm{X}^p\mathrm{Y}^q\ldots\mathrm{U}^s$ dans la puissance polynomiale

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}n}}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}+\ldots+\mathrm{U})^n.$$

Cela posé, convenons de désigner, par les expressions symboliques suivantes

$$\}\mathrm{X}^p\mathrm{Y}^q\ldots\mathrm{U}^s\{ \quad \text{et} \quad [\mathrm{X}^p\mathrm{Y}^q\ldots\mathrm{U}^s],$$

les modules des coefficients de $\mathrm{X}^p\mathrm{Y}^q\ldots\mathrm{U}^s$ dans Φ et Ψ. Il est clair qu'on aura, d'après la relation qui lie les deux formes,

$$(1)\qquad \}\mathrm{X}^p\mathrm{Y}^q\ldots\mathrm{U}^s\{ = [\mathrm{X}^p\mathrm{Y}^q\ldots\mathrm{U}^s]\sqrt{\sigma^p\sigma_1^q\ldots\sigma_{n-1}^s}$$

et, en particulier, pour les coefficients des puissances les plus élevées des indéterminées,

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\}\mathrm{X}^n\{ = [\mathrm{X}^n]\sqrt{\sigma^n},\\
\}\mathrm{Y}^n\{ = [\mathrm{Y}^n]\sqrt{\sigma_1^n},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\}\mathrm{U}^n\{ = [\mathrm{U}^n]\sqrt{\sigma_{n-1}^n}.
\end{array}\right.$$

Or, en multipliant ces équations membre à membre, il vient

$$\}\mathrm{X}^n\{\,\}\mathrm{Y}^n\{\ldots\}\mathrm{U}^n\{ = [\mathrm{X}^n][\mathrm{Y}^n]\ldots[\mathrm{U}^n]\sqrt{(\sigma\sigma_1\ldots\sigma_{n-1})^n};$$

mais, d'après la relation caractéristique pour les formes quadratiques réduites, et la valeur de l'invariant de F, que nous avons trouvé précédemment égal à $\Delta\Delta_0$, on a

$$\sigma\sigma_1\ldots\sigma_{n-1} < 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\Delta\Delta_0;$$

il en résulte donc que

$$\}\mathrm{X}^n\{\,\}\mathrm{Y}^n\{\ldots\}\mathrm{U}^n\{ < [\mathrm{X}^n][\mathrm{Y}^n]\ldots[\mathrm{U}^n].2^{\frac{n^2(n-1)}{4}}\sqrt{\Delta\Delta_0}$$

et finalement, en ayant égard aux limites des quantités $[\mathrm{X}^n]$, $[\mathrm{Y}^n]$, ...,

$$\}\mathrm{X}^n\{\,\}\mathrm{Y}^n\{\ldots\}\mathrm{U}^n\{ < \frac{2^{\frac{1}{4}n^2(n-1)}}{n^{\frac{1}{2}n^2}}(\Delta\Delta_0)^{\frac{1}{2}n}.$$

Voici donc déjà les coefficients des puissances les plus élevées dans la forme Φ, limités au moyen de l'invariant $\Delta\Delta_0$. Et c'est en ce moment que nous employons la condition d'irréductibilité de cette forme telle qu'elle a été posée plus haut, de manière qu'aucun de ces coefficients ne puisse être supposé s'évanouir. N'ayant obtenu en effet qu'une limite de leur produit, dans le cas où l'un d'eux serait nul, on ne pourrait plus rien conclure sur les autres. Maintenant et à l'aide des valeurs de ces quantités : $\}\mathrm{X}^n\{$, $\}\mathrm{Y}^n\{$, ..., nous obtiendrons des limites pour les coefficients des autres termes, en déduisant des coefficients (1) et (2) la suivante

$$\begin{aligned}
&\}\mathrm{X}^p\mathrm{Y}^q\ldots\mathrm{U}^s\{\,\}\mathrm{X}^n\{^{1-\frac{p}{n}}\}\mathrm{Y}^n\{^{1-\frac{q}{n}}\ldots\}\mathrm{U}^n\{^{1-\frac{s}{n}}\\
&\quad = [\mathrm{X}^p\mathrm{Y}^q\ldots\mathrm{U}^s][\mathrm{X}^n]^{1-\frac{p}{n}}[\mathrm{Y}^n]^{1-\frac{q}{n}}\ldots[\mathrm{U}^n]^{1-\frac{s}{n}}\sqrt{(\sigma\sigma_1\ldots\sigma_{n-1})^n}
\end{aligned}$$

et remplaçant, dans le second membre, $[\mathrm{X}^p\mathrm{Y}^q\ldots\mathrm{U}^s]$, $[\mathrm{X}^n]$, $[\mathrm{Y}^n]$, ... et le produit $\sigma\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}$ par leurs limites supérieures. Il vient ainsi, en désignant $(p, q, \ldots, s)$ le coefficient de $\mathrm{X}^p\mathrm{Y}^q\ldots\mathrm{U}^s$ dans la puissance $(\mathrm{X}+\mathrm{Y}+\ldots+\mathrm{U})^n$:

$$\}\mathrm{X}^p\mathrm{Y}^q\ldots\mathrm{U}^s\{\,\}\mathrm{X}^n\{^{1-\frac{p}{n}}\}\mathrm{Y}^n\{^{1-\frac{q}{n}}\ldots\}\mathrm{U}^n\{^{1-\frac{s}{n}} < (p, q, \ldots, s)\frac{2^{\frac{1}{4}n^2(n-1)}}{n^{\frac{1}{2}n^2}}(\Delta\Delta_0)^{\frac{1}{2}n}.$$

Nous sommes ainsi parvenu à la proposition annoncée sur la réduction des formes décomposables en facteurs linéaires, et qui nous autorise à donner, aux transformées telles que Φ, le nom de *formes réduites*. Mon théorème sur les racines des équations algébriques à coefficients entiers complexes en est une conséquence immédiate, comme vous allez voir.

Soit

$$\mathrm{P}v^n + \mathrm{Q}v^{n-1} + \ldots + \mathrm{R}v + \mathrm{S} = 0$$

une équation de cette nature. En désignant ses racines par a, b, c, ..., k, l le discriminant, ou déterminant de Gauss, sera le nombre entier complexe

$$\mathfrak{D} = \mathrm{P}^{2(n-1)}(a-b)^2(a-c)^2\ldots(k-l)^2.$$

Cela posé, faisons dépendre de cette équation une forme φ à coefficients entiers complexes, que nous définirons de cette manière :

$$\begin{aligned}\varphi = \mathrm{P}^{n-1}&(x+ay+a^2z+\ldots+a^{n-1}u)(x+by+b^2z+\ldots+b^{n-1}u)\ldots\\ &\times(x+ly+l^2z+\ldots+l^{n-1}u).\end{aligned}$$

Nous remarquerons d'abord que, pour cette forme, la quantité Δ est précisément $\sqrt{\mathfrak{D}}$. Soient, en effet,

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= x+ay+\ldots+a^{n-1}u,\\ \mathrm{B} &= x+by+\ldots+b^{n-1}u,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \mathrm{L} &= x+ly+\ldots+l^{n-1}u;\end{aligned}$$

d'après sa définition même, Δ sera le produit de P^{n-1} multiplié par le déterminant relatif au système des facteurs linéaires A, B, ..., L. Or, on sait que ce déterminant est la fonction alternée égale au produit des différences des racines a, b, ..., l, de sorte qu'on a bien $\Delta = \sqrt{\mathfrak{D}}$. Je dis maintenant que les racines de deux équations différentes, auxquelles correspondent des formes φ, arithmétiquement équivalentes, doivent être regardées comme présentant les mêmes irrationalités. Soient, en effet,

$$\mathfrak{P}v^n + \mathfrak{Q}v^{n-1} + \ldots + \mathfrak{R} + \mathfrak{S} = 0$$

et

$$\begin{aligned}\Phi = \mathfrak{P}^{n-1}&(\mathrm{X}+\mathfrak{a}\mathrm{Y}+\ldots+\mathfrak{a}^{n-1}\mathrm{U})(\mathrm{X}+\mathfrak{b}\mathrm{Y}+\ldots+\mathfrak{b}^{n-1}\mathrm{U})\ldots\\ &\times(\mathrm{X}+\mathfrak{l}\mathrm{Y}+\ldots+\mathfrak{l}^{n-1}\mathrm{U})\end{aligned}$$

une seconde équation, ayant pour racines $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ..., $\mathfrak{l}$, avec la forme correspondante. S'il est possible de déduire Φ de φ, par une substitution à coefficients entiers complexes et au déterminant *un*, c'est-à-dire d'avoir identiquement $\varphi = \Phi$, en prenant

$$\begin{aligned}x &= \alpha\mathrm{X}+\alpha'\mathrm{Y}+\ldots+\alpha^{(n-1)}\mathrm{U},\\ y &= \beta\mathrm{X}+\beta'\mathrm{Y}+\ldots+\beta^{(n-1)}\mathrm{U},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ u &= \varkappa\mathrm{X}+\varkappa'\mathrm{Y}+\ldots+\varkappa^{(n-1)}\mathrm{U},\end{aligned}$$

on pourra, en désignant par t_1, t_2, ..., t_n des constantes, poser les relations

$$\begin{aligned}x+ay+\ldots+a^{n-1}u &= t_1(\mathrm{X}+\mathfrak{a}\mathrm{Y}+\ldots+\mathfrak{a}^{n-1}\mathrm{U}),\\ x+by+\ldots+b^{n-1}u &= t_2(\mathrm{X}+\mathfrak{b}\mathrm{Y}+\ldots+\mathfrak{b}^{n-1}\mathrm{U}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x+ly+\ldots+l^{n-1}u &= t_n(\mathrm{X}+\mathfrak{l}\mathrm{Y}+\ldots+\mathfrak{l}^{n-1}\mathrm{U}).\end{aligned}$$

Or, en effectuant la substitution et désignant pour abréger la fonction entière à coefficients entiers complexes $\alpha^{(i)}+\beta^{(i)}v+\ldots+\varkappa^{(i)}v^{n-1}$ par $\theta_i(v)$, ces relations donneront

$$\begin{aligned}\mathrm{X}\theta(a)+\mathrm{Y}\theta_1(a)+\ldots+\mathrm{U}\theta_{n-1}(a) &= t_1(\mathrm{X}+\mathfrak{a}\mathrm{Y}+\ldots+\mathfrak{a}^{n-1}\mathrm{U}),\\ \mathrm{X}\theta(b)+\mathrm{Y}\theta_1(b)+\ldots+\mathrm{U}\theta_{n-1}(b) &= t_2(\mathrm{X}+\mathfrak{b}\mathrm{Y}+\ldots+\mathfrak{b}^{n-1}\mathrm{U}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \mathrm{X}\theta(l)+\mathrm{Y}\theta_1(l)+\ldots+\mathrm{U}\theta_{n-1}(l) &= t_n(\mathrm{X}+\mathfrak{l}\mathrm{Y}+\ldots+\mathfrak{l}^{n-1}\mathrm{U}).\end{aligned}$$

On en conclura les expressions suivantes des racines $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ..., $\mathfrak{l}$ par a, b, ..., l,

$$\begin{array}{llll}\mathfrak{a} = \dfrac{\theta_1(a)}{\theta(a)}, & \mathfrak{a}^2 = \dfrac{\theta_2(a)}{\theta(a)}, & \ldots, & \mathfrak{a}^{n-1} = \dfrac{\theta_{n-1}(a)}{\theta(a)},\\ \mathfrak{b} = \dfrac{\theta_1(b)}{\theta(b)}, & \mathfrak{b}^2 = \dfrac{\theta_2(b)}{\theta(b)}, & \ldots, & \mathfrak{b}^{n-1} = \dfrac{\theta_{n-1}(b)}{\theta(b)},\\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots,\\ \mathfrak{l} = \dfrac{\theta_1(l)}{\theta(l)}, & \mathfrak{l}^2 = \dfrac{\theta_2(l)}{\theta(l)}, & \ldots, & \mathfrak{l}^{n-1} = \dfrac{\theta_{n-1}(l)}{\theta(l)},\end{array}$$

et il est visible qu'en partant de la substitution inverse, pour déduire φ de Φ, on arrivera à des expressions toutes semblables qui donneront les racines a, b, ..., l, au moyen de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ..., $\mathfrak{l}$. Nous sommes donc bien autorisé par là à regarder les racines des deux équations comme présentant les mêmes irrationalités.

Cela posé, considérons l'ensemble des équations de degré n, ayant même discriminant, avec la série des formes φ, qui correspondent à chacune d'elles. Ces formes, en nombre infini, ayant toutes le même invariant $\Delta\Delta_0$, à savoir le module du discriminant, seront réductibles à un nombre limité de réduites Φ. Or, les équations, dont les racines pourront présenter des irrationalités distinctes, seront celles-là seules auxquelles correspondent des formes ayant des transformées réduites différentes ([1]). Elles seront donc bien essentiellement, comme je l'ai annoncé, en nombre fini.

([1]) En effet, des formes ayant même réduite sont arithmétiquement équivalentes, et il a été expliqué plus haut comment les racines des équations dont elles dépendent offrent dès lors les mêmes irrationalités. Voyez au reste, sur cette question de l'équivalence des formes décomposables en facteurs linéaires, mon premier Mémoire sur la théorie des formes quadratiques (*Journal de Crelle*, t. 47).

SUR

L'INVARIABILITÉ DU NOMBRE DES CARRÉS POSITIFS ET DES CARRÉS NÉGATIFS DANS LA TRANSFORMATION DES POLYNOMES HOMOGÈNES DU SECOND DEGRÉ.

(Extrait d'une Lettre à M. Borchardt, *Journal de Crelle*, t. 53).

Paris, ce 24 avril 1856.

..... Dans le cas où vous le jugeriez convenable, vous pourriez publier la démonstration suivante, du principe découvert par Jacobi, et employé par lui à la démonstration des belles formules pour les conditions de réalité des racines des équations algébriques, que vous avez données dans votre Mémoire sur l'équation à l'aide de laquelle, etc. Rien d'ailleurs n'est plus simple que d'établir ce principe que j'énoncerai ainsi :

Quelque substitution réelle que l'on emploie pour réduire un polynome homogène du second degré à une somme de carrés, le nombre des coefficients de ces carrés qui auront un signe donné sera toujours le même.

Supposons, en effet, qu'un polynome homogène du second degré f, à $n+1$ indéterminées $x, y, \ldots, v$, se réduise à l'expression suivante

$$f = \varepsilon_0 x_0^2 + \varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_n x_n^2,$$

en faisant

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \alpha x_0 + \alpha' x_1 + \ldots + \alpha^{(n)} x_n, \\ y = \beta x_0 + \beta' x_1 + \ldots + \beta^{(n)} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v = \lambda x_0 + \lambda' x_1 + \ldots + \lambda^{(n)} x_n. \end{cases}$$