SUR LA THÉORIE

DES

FONCTIONS HOMOGÈNES

A DEUX INDÉTERMINÉES.

Journal de Crelle, Tome 52.

SECOND MÉMOIRE.

Dans mon premier Mémoire, qui a pour principal objet l'étude des formes biquadratiques, j'ai eu soin de considérer séparément la théorie *algébrique* et la théorie *arithmétique* de ces formes. Relativement aux formes *quadratiques,* une pareille distinction serait inutile, en raison du petit nombre de notions algébriques qu'il est nécessaire d'établir comme base des considérations arithmétiques. Mais, dès qu'on s'élève aux formes *binaires* de degré quelconque, on voit la théorie algébrique prendre un développement inattendu et digne du plus grand intérêt. En effet, en présence des éléments analytiques nouveaux dont elle manifeste l'existence, les notions les plus simples et les plus faciles qui nous sont requises par l'étude des formes quadratiques viennent alors s'offrir sous un tout autre aspect, et parfois, donnent naissance à des notions nouvelles. Je me propose d'en montrer ici un exemple, en traitant de la distribution en ordres des formes *cubiques* et *biquadratiques*.

M. Eisenstein, dans son beau Mémoire intitulé : *Nouveaux théorèmes d'Arithmétique transcendante,* publié dans le *Journal de Crelle,* t. 35, a déjà remarqué que la présence des formes adjointes, dans la théorie des formes quadratiques *ternaires,*

conduisait à faire reposer la distribution en ordres de ces formes sur un principe nouveau et différent de celui que M. Gauss a donné pour les formes *binaires*. Nous allons voir que, pour les formes *cubiques* et *biquadratiques,* le principe de M. Eisenstein va lui-même se présenter sous un jour plus étendu, et conduira à trois subdivisions différentes de la totalité des formes qui possèdent les mêmes *invariants fondamentaux*.

C'est là d'ailleurs un résultat qui appartient en propre aux formes dont nous parlons; de sorte que la forme du cinquième degré et celle de degrés plus élevés donnent lieu pour la distribution en ordres à des considérations toutes différentes. Plusieurs autres faits se présenteront, comme nous l'avons déjà annoncé dans la suite de ces recherches, pour manifester dans des circonstances variées cette différence de nature qu'on rapproche naturellement de cette différence analytique si profonde, entre les racines des équations des quatre premiers degrés, qui s'expriment par simples radicaux, et celles de degrés plus élevés qu'il est impossible d'obtenir de cette manière.

Dans l'espérance que de pareilles considérations intéresseraient peut-être, j'ai développé, avec détails, l'application aux formes du *cinquième* degré des propositions algébriques générales sur lesquelles reposent la distribution en ordre des formes binaires. Plusieurs des résultats qui se présenteront dans cette application se retrouveront d'ailleurs et joueront un rôle important dans l'étude spéciale des formes du cinquième degré, à laquelle je consacrerai prochainement un nouveau Mémoire.

I.

Principe de la distribution en ordres des formes binaires.

Il est un point de vue sous lequel la notion des ordres de classes quadratiques de même *déterminant* s'étend immédiatement à toutes les formes, quel que soit leur degré et le nombre de leurs indéterminées. Ainsi, en ne considérant que les formes *binaires* et leur appliquant la méthode suivie par M. Gauss dans le § 226 des *Disquisitiones Arithmeticæ,* on peut nommer *primitives* toutes les formes

$$f = (a, b, c, \ldots\widehat{)(}x, y)^m$$

de mêmes *invariants,* dans lesquelles le plus grand commun diviseur de a, b, c, ... est l'unité. Cela dit, l'ordre *proprement primitif* sera défini comme réunissant toutes les formes dans lesquelles le plus grand commun diviseur de

$$a, \quad mb, \quad \frac{m.m-1}{1.2}c, \quad \ldots$$

sera l'unité, et ensuite on obtiendra autant d'ordres *improprement primitifs* que le plus grand commun diviseur de ces mêmes nombres pourra recevoir de valeurs distinctes.

Maintenant, si l'on passe aux formes

$$F = (A, B, C, \ldots)(x, y)^m,$$

dont les coefficients A, B, C, ... ont un plus grand commun diviseur δ, on pourra les nommer *dérivées* des formes primitives

$$f = \frac{1}{\delta}F.$$

Cela posé, pour chaque valeur de δ, on aura un groupe de formes dérivées, dont la distribution en ordres suivra immédiatement celle des formes primitives qui leur correspondent. Rien de plus facile, on le voit, que cette première extension des principes de M. Gauss qu'il nous a suffi d'indiquer en peu de mots. Mais, dès qu'on considère d'autres formes que les formes *quadratiques* à deux indéterminées, on voit intervenir de nouveaux éléments analytiques qui jouent dans toute la théorie un rôle essentiel; ce sont les formes *adjointes* et les formes nommées *covariants* par M. Sylvester. Ces deux genres de formes ne sont pas essentiellement distincts, comme on le sait, dans la théorie des formes *binaires;* ils se ramènent aux seuls covariants, dont je crois devoir encore rappeler la propriété caractéristique.

Soit

$$f = (a, b, c, \ldots\widehat{)(}x, y)^m$$

une forme binaire, et supposons qu'on ait identiquement

$$(a, b, c, \ldots\widehat{)(}\xi x + \xi' y, \eta x + \eta' y)^m = (A, B, C, \ldots\widehat{)(}x, y)^m,$$

on donnera le nom de *covariant* de f à toute fonction

$$\varphi(a, b, c, \ldots; x, y)$$

rationnelle et entière en a, b, c, ...; x, y, qui satisfait à la condition

$$\text{(A)} \quad (\xi\eta' - \eta\xi')^s\,\varphi(a, b, c, \ldots; \xi x + \xi' y, \eta x + \eta' y) = \varphi(A, B, C, \ldots; x, y),$$

l'exposant de la puissance à laquelle est élevé le déterminant de la substitution $\xi\eta' - \eta\xi'$ étant *entier* et *positif.* Cela posé, il est bien facile de reconnaître que le plus grand commun diviseur des coefficients d'un *covariant* quelconque φ, de la forme f, sera un élément numérique, caractéristique de la classe entière à laquelle appartient cette forme. Nommant, pour un instant, φ' une expression *semblable* à φ, mais se rapportant à une forme f' arithmétiquement équivalente à f, il suit de l'équation (A) que φ et φ' seront elles-mêmes arithmétiquement *équivalentes* et auront nécessairement le même plus grand commun diviseur pour leurs coefficients. L'ensemble des classes $f, f_1, f_2, \ldots$, qui ont les mêmes *invariants,* peut être ainsi divisé en ordres en appliquant le principe même de M. Gauss, tel que nous l'avons présenté tout à l'heure, aux *covariants* φ, φ_1, φ_2, ... qui leur correspondent respectivement. Et, par là, on voit s'offrir autant de divisions en ordres que de covariants distincts, de sorte que l'idée arithmétique très simple, qui nous a été donnée par la théorie des formes quadratiques, reçoit, par le fait de l'existence des divers covariants, un développement aussi intéressant que difficile à suivre. On est conduit en effet à ces problèmes, sources de belles recherches analytiques :

1° *Trouver tous les covariants des formes d'un degré donné.*

2° *Trouver comment dépendent des* invariants *fondamentaux, les diviseurs d'un* covariant *quelconque, qui fournissent les caractères d'une division en ordres, relative à ce covariant.*

3° *Comparer entre elles toutes les divisions en ordres qui reposent sur la considération des divers covariants.*

C'est la solution de ces questions que nous nous proposons d'offrir pour les formes *cubiques* et *biquadratiques.* Elle se fonde principalement sur les propositions générales que nous allons établir.

II.

Propositions sur les covariants des formes binaires.

Première proposition. — *Soient g et h deux covariants quelconques de la forme*

$$f = (a, b, c, \ldots)\widehat{\ }(x, y)^m,$$

de sorte qu'en faisant

$$(a, b, c, \ldots)\widehat{\ }(kx + \varkappa y,\ lx + \lambda y)^m = (\mathrm{A, B, C}, \ldots)\widehat{\ }(x, y)^m$$

et, pour abréger,

$$\omega = k\lambda - \varkappa l,$$

on ait

$$(1)\qquad \omega^s g(a, b, c, \ldots;\ kx + \varkappa y,\ lx + \lambda y) = g(\mathrm{A, B, C}, \ldots;\ x, y),$$

$$(2)\qquad \omega^t h(a, b, c, \ldots;\ kx + \varkappa y,\ lx + \lambda y) = h(\mathrm{A, B, C}, \ldots;\ x, y).$$

Je dis qu'en posant

$$(3)\qquad g\left(a, b, c, \ldots;\ x\mathrm{X} - \frac{\partial h}{\partial y}\,\mathrm{Y},\ y\mathrm{X} + \frac{\partial h}{\partial x}\,\mathrm{Y}\right) = \theta(a, b, c, \ldots;\ x, y, \mathrm{X}, \mathrm{Y}),$$

on aura l'identité

$$(4)\qquad \omega^s\theta(a, b, c, \ldots;\ kx + \varkappa y,\ lx + \lambda y,\ \mathrm{X},\ \omega^{t+1}\mathrm{Y}) = \theta(\mathrm{A, B, C}, \ldots;\ x, y, \mathrm{X}, \mathrm{Y}).$$

Ainsi les coefficients des divers termes en X et Y dans cette fonction θ se vérifieront de même nature que (1) et (2), et seront dès lors des covariants de f.

Soit

$$\xi = kx + \varkappa y, \qquad \eta = lx + \lambda y,$$
$$u = x\mathrm{X} - \frac{\partial h}{\partial y}\,\mathrm{Y}, \qquad v = y\mathrm{X} + \frac{\partial h}{\partial x}\,\mathrm{Y};$$

nommons U et V ce que deviennent respectivement u et v quand on remplace les coefficients $a, b, c, \ldots$, qui entrent dans la forme h, par A, B, C, ..., de sorte que

$$(5)\qquad \mathrm{U} = x\mathrm{X} - \frac{\partial h(\mathrm{A, B, C}, \ldots;\ x, y)}{\partial y}\,\mathrm{Y}, \quad \mathrm{V} = y\mathrm{X} + \frac{\partial h(\mathrm{A, B, C}, \ldots;\ x, y)}{\partial x}\,\mathrm{Y},$$

je vais établir comme lemme qu'on aura

$$(6)\qquad \begin{cases} k\mathrm{U} + \varkappa\mathrm{V} = \xi\mathrm{X} - \omega^{t+1}\,\dfrac{\partial h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta)}{\partial \eta}\,\mathrm{Y}, \\[2ex] l\mathrm{U} + \lambda\mathrm{V} = \eta\mathrm{X} + \omega^{t+1}\,\dfrac{\partial h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta)}{\partial \xi}\,\mathrm{Y}. \end{cases}$$

J'observe pour cela que l'identité (2), ou, ce qui revient au même, celle-ci :

$$\omega^t h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta) = h(\mathrm{A, B, C}, \ldots;\ x, y),$$

donne, par la différentiation,

$$(7)\qquad \frac{\partial h(\mathrm{A, B, C}, \ldots;\ x, y)}{\partial x} = \omega^t\left[k\,\frac{\partial h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta)}{\partial \xi} + l\,\frac{\partial h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta)}{\partial \eta}\right],$$

$$(8)\qquad \frac{\partial h(\mathrm{A, B, C}, \ldots;\ x, y)}{\partial y} = \omega^t\left[\varkappa\,\frac{\partial h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta)}{\partial \xi} + \lambda\,\frac{\partial h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta)}{\partial \eta}\right].$$

Or les équations (5) donnent immédiatement

$$k\mathrm{U} + \varkappa\mathrm{V} = (kx + \varkappa y)\mathrm{X} + \left[\varkappa\,\frac{\partial h(\mathrm{A, B, C}, \ldots;\ x, y)}{\partial x} - k\,\frac{\partial h(\mathrm{A, B, C}, \ldots;\ x, y)}{\partial y}\right]\mathrm{Y},$$

$$l\mathrm{U} + \lambda\mathrm{V} = (lx + \lambda y)\mathrm{X} + \left[\lambda\,\frac{\partial h(\mathrm{A, B, C}, \ldots;\ x, y)}{\partial x} - l\,\frac{\partial h(\mathrm{A, B, C}, \ldots;\ x, y)}{\partial y}\right]\mathrm{Y},$$

et, en substituant les valeurs des deux dérivées partielles que fournissent les équations (7) et (8), il vient précisément les équations (6) que nous nous proposions d'établir.

Cela posé, revenons à la relation (1), que nous allons reproduire en écrivant U et V au lieu de x et y, savoir :

$$(9)\qquad \omega^s g(a, b, c, \ldots;\ k\mathrm{U} + \varkappa\mathrm{V},\ l\mathrm{U} + \lambda\mathrm{V}) = g(\mathrm{A, B, C}, \ldots;\ \mathrm{U}, \mathrm{V}),$$

et à la relation (3), par laquelle est définie la fonction θ,

$$(10)\qquad g(a, b, c, \ldots;\ u, v) = \theta(a, b, c, \ldots;\ x, y, \mathrm{X}, \mathrm{Y}).$$

Si, dans cette dernière identité, nous substituons A, B, C, ... à $a, b, c, \ldots$, il faudra aussi mettre U et V au lieu de u et v, et il viendra

$$g(\mathrm{A, B, C}, \ldots;\ \mathrm{U}, \mathrm{V}) = \theta(\mathrm{A, B, C}, \ldots;\ x, y, \mathrm{X}, \mathrm{Y}),$$

ou bien, à cause de l'équation (9),

$$\omega^s g(a, b, c, \ldots; k\mathrm{U} + \varkappa\mathrm{V}, l\mathrm{U} + \lambda\mathrm{V}) = \theta(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots; x, y, \mathrm{X}, \mathrm{Y}).$$

Maintenant, il résulte du lemme précédemment établi (équat. 6) que

$$k\mathrm{U} + \varkappa\mathrm{V}, \quad l\mathrm{U} + \lambda\mathrm{V},$$

qui entrent dans le premier membre, sont ce que deviennent respectivement u et v lorsqu'on y remplace x et y par ξ et η, et qu'on multiplie Y par ω^{t+1}. L'expression

$$g(a, b, c, \ldots; k\mathrm{U} + \varkappa\mathrm{V}, l\mathrm{U} + \lambda\mathrm{V})$$

n'est donc autre chose, en vertu de l'équation (10), que

$$\theta(a, b, c, \ldots; \xi, \eta, \mathrm{X}, \omega^{t+1}\mathrm{Y}),$$

et nous obtenons de la sorte la relation que nous voulions établir, savoir :

$$\omega^s\theta(a, b, c, \ldots; \xi, \eta, \mathrm{X}, \omega^{t+1}\mathrm{Y}) = \theta(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots; x, y, \mathrm{X}, \mathrm{Y}).$$

On peut aisément juger, par cette première proposition, de la multitude des *covariants* qui existent pour une forme donnée. Ainsi, en prenant g et h égaux à f, qui est évidemment un *covariant* par rapport à elle-même, on en obtiendra un certain nombre, avec lesquels on pourra encore employer le même théorème. Si donc on ne retrouve pas ainsi des formes obtenues précédemment, on verra de nouveaux covariants naître de tous ceux qui se sont déjà présentés, et il semble bien difficile de déduire de là une expression analytique générale pour tant de quantités qui peuvent, tout en restant dans le même principe, naître les unes des autres de tant de manières différentes. Voici ce qu'il m'a été donné de trouver après de longues méditations sur ce sujet :

Seconde proposition. — *Nommons* covariants associés *à h ceux qui résultent de la première proposition lorsqu'on suppose g égal à la forme f : je dis que tout covariant de f, quel qu'il soit, ou au moins son produit par une puissance entière de h, sera une fonction rationnelle et entière des* covariants associés.

Pour mieux préciser d'abord, cette notion des *covariants associés*, reprenons l'expression analytique qui leur donne naissance,

savoir :

$$\left(a, b, c, \ldots\right)\widehat{\;}\left(x\mathrm{X} - \frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{Y}, y\mathrm{X} + \frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{Y}\right)^m.$$

Il conviendra, en nommant n le degré de h en x et y, d'écrire $\frac{1}{n}\mathrm{Y}$ au lieu de Y. Cela étant, si l'on met en évidence les coefficients des divers termes en X et Y, il est clair que celui de X^m sera la forme proposée f, et, en faisant

$$\left(a, b, c, \ldots\right)\widehat{\;}\left(x\mathrm{X} - \frac{1}{n}\frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{Y}, y\mathrm{X} + \frac{1}{n}\frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{Y}\right)^m = \left(f, h_1, h_2, \ldots, h_m\right)\widehat{\;}\left(\mathrm{X}, \mathrm{Y}\right)^m,$$

ces quantités $h_1, h_2, \ldots, h_m$ seront ce que nous nommons dorénavant les *covariants associés* à h.

Cela posé, soit

$$\pi(a, b, c, \ldots; x, y)$$

un covariant quelconque de f; nous pourrons écrire les deux identités

$$(a, b, c, \ldots)\widehat{\;}(x\mathrm{X} + x'\mathrm{Y}, y\mathrm{X} + y'\mathrm{Y})^m = (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots)\widehat{\;}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})^m,$$

$$(xy' - yx')^\mu \pi(a, b, c, \ldots; x\mathrm{X} + x'\mathrm{Y}, y\mathrm{X} + y'\mathrm{Y}) = \pi(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots; \mathrm{X}, \mathrm{Y}),$$

μ étant un certain nombre entier. Maintenant faisons

$$x' = -\frac{1}{n}\frac{\partial h}{\partial y}, \qquad y' = \frac{1}{n}\frac{\partial h}{\partial x};$$

les coefficients A, B, C, … deviendront respectivement $f, h_1, h_2, \ldots$, et le déterminant $xy' - yx'$ la forme h elle-même. Supposons encore, dans la seconde équation,

$$\mathrm{X} = 1, \qquad \mathrm{Y} = 0;$$

son second membre se réduira évidemment au coefficient de la puissance la plus élevée de X, fonction rationnelle et entière de A, B, C, … que nous désignerons par (A, B, C, …). Il vient donc ainsi l'équation suivante :

$$(11) \qquad h^\mu \pi(a, b, c, \ldots; x, y) = (f, h_1, h_2, \ldots),$$

par laquelle notre proposition se trouve démontrée.

Pour en montrer immédiatement une application, nous allons faire voir que tous les covariants d'une forme quadratique

$$f = (a, b, c\widehat{)(}x, y)^2$$

s'obtiennent en multipliant une puissance de f par une puissance de l'invariant $b^2 - ac$.

Remarquons d'abord que le second membre de la relation (11) est homogène en $f, h_1, h_2, \ldots$, car il provient de l'expression $(A, B, C, \ldots)$, qui est nécessairement homogène en A, B, C, ... puisque, en général, tout covariant d'une forme est une fonction entière homogène des coefficients de cette forme. Cela étant, on trouve, en prenant $h = f$,

$$\left(a, b, c\widehat{\right)\left(}x\mathrm{X} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{Y},\ y\mathrm{X} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{Y}\right)^2 = [f, 0, (ac - b^2)f\widehat{](}\mathrm{X}, \mathrm{Y})^2$$

et

$$f^{\mu}\pi(a, b, c; x, y) = [f, 0, (ac - b^2)f].$$

Or, le second membre devant être homogène par rapport aux deux quantités f et $(ac - b^2)f$, ne peut être que le produit d'une puissance de f par une fonction de l'invariant, et, pour qu'un tel résultat soit aussi homogène en a, b, c, cette fonction de l'invariant doit être proportionnelle à une simple puissance. Donc, tout covariant de la forme quadratique proposée, fonction rationnelle et entière de x, y, et a, b, c par définition, est compris dans la formule

$$(b^2 - ac)^i f^k,$$

i et k étant entiers.

Si simple et si prévu que fût ce résultat, je n'ai pas cru inutile de l'établir rigoureusement à cause des conséquences qui s'en déduiront par l'application de la loi de réciprocité : conséquences que j'ai déjà indiquées dans le Journal de M. Thompson. D'ailleurs il montre, sous un certain point de vue, comment les formes *quadratiques* se distinguent des formes *cubiques* et *biquadratiques*, dont nous allons nous occuper, tout en partageant avec elles une propriété caractéristique que nous verrons tout à coup disparaître dans les formes du *cinquième* degré. Nous ferons précéder ces questions de quelques remarques sur le système particulier des covariants qui sont associés à la forme proposée.

III.

Sur le système des covariants associés à la forme proposée.

On l'obtient en mettant en évidence les divers termes en X et Y dans l'expression

$$\left(a, b, c, \ldots\widehat{\right)\left(}x\mathrm{X} - \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{Y},\ y\mathrm{X} + \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{Y}\right)^m,$$

de sorte que, si nous faisons

$$\left(a, b, c, \ldots\widehat{\right)\left(}x\mathrm{X} - \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{Y},\ y\mathrm{X} + \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{Y}\right)^m = (f, f_1, f_2, \ldots, f_m\widehat{)(}\mathrm{X}, \mathrm{Y})^m,$$

les covariants associés à f se trouveront désignés par $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Leurs premiers termes s'obtiennent facilement; car, en faisant $y = 0$ dans les expressions

$$x\mathrm{X} - \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{Y} \quad \text{et} \quad y\mathrm{X} + \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{Y},$$

elles deviennent simplement

$$x\mathrm{X} - bx^{m-1}\mathrm{Y} \quad \text{et} \quad ax^{m-1}\mathrm{Y}.$$

En faisant, pour abréger,

$$\frac{1}{m.m-1\ldots i+1}\,\frac{\partial^{m-i} f}{\partial x^{m-i}} = \varphi_i(x, y),$$

on trouvera ainsi

$$f_i = \varphi_i(-b, a)\,x^{(i+1)m-2i} + \ldots.$$

Ce coefficient $\varphi_i(-b, a)$ est divisible par a, comme on le voit aisément; il s'ensuit que, en employant la méthode donnée dans mon premier Mémoire, pour déduire un covariant de son premier terme on obtiendra la forme f en facteur commun dans la série entière des covariants associés. Cette remarque faite, je vais étudier de plus près les quotients $\frac{1}{a}\varphi_i(-b, a)$, en supposant à i les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, et en écrivant les coefficients de f suivant l'ordre alphabétique

$$\frac{1}{a}\varphi_1(-b,a)=0,$$
$$\frac{1}{a}\varphi_2(-b,a)=-b^2+ac,$$
$$\frac{1}{a}\varphi_3(-b,a)=2b^3-3abc+a^2d,$$
$$\frac{1}{a}\varphi_4(-b,a)=-3b^4+6acb^2-4bda^2+ea^3,$$
$$\frac{1}{a}\varphi_5(-b,a)=4b^5-10acb^3+10b^2da^2-5bea^3+fa^4.$$

Introduisons pour cela les expressions suivantes, savoir :

$$\begin{array}{lll}
\text{A, invariant de} & \varphi_2(x,y)=b^2-ac, & \\
\text{B,} \quad » & \varphi_3(x,y)=(bc-ad)^2-4(b^2-ac)(c^2-bd), & \\
\text{C,} \quad » & \varphi_4(x,y)=ae-4bd+3c^2, & \\
\text{D,} \quad » & \varphi_5(x,y)=(af-3be+2cd)^2 & \\
 & \qquad -4(ae-4bd+3c^2)(bf-4ce+3d^2), &
\end{array}$$

on vérifiera sans peine les relations

$$\frac{1}{a}\varphi_2(-b,a)=-\text{A},$$
$$\frac{1}{a}\varphi_3(-b,a)=\frac{1}{2}\frac{\partial\text{B}}{\partial d},$$
$$\frac{1}{a}\varphi_4(-b,a)=a^2\text{C}-3\text{A}^2,$$
$$\frac{1}{a}\varphi_5(-b,a)=\text{A}\frac{\partial\text{B}}{\partial d}+\frac{1}{2}a^2\frac{\partial\text{D}}{\partial f}.$$

Cela posé, soient g, g' les invariants analogues à A, C, mais relatifs aux formes

$$\frac{1}{m.m-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},\widehat{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Bigr)\Bigl(}\text{X},\text{Y}\right)^2,$$
$$\frac{1}{m.m-1.m-2.m-3}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4},\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\,\partial y},\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\,\partial y^2},\frac{\partial^4 f}{\partial x\,\partial y^3},\widehat{\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\Bigr)\Bigl(}\text{X},\text{Y}\right)^4,$$

et h et h' les quantités

$$h=\frac{1}{m(m-2)}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$
$$h'=\frac{1}{m(m-4)}\left(\frac{\partial g'}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g'}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

on aura ces expressions des premiers covariants associés de f, savoir :

$$f_2=-fg,$$
$$f_3=fh,$$
$$f_4=f(f^2g'-3g^2),$$
$$f_5=f(2gh-f^2h').$$

Cela résulte immédiatement de ce que leurs termes les plus élevés en x ont précisément pour coefficients les quantités

$$\varphi_2(-b,a),\quad \varphi_3(-b,a),\quad \ldots.$$

Mais je ne m'arrêterai pas à le vérifier, m'étant seulement proposé de faire voir comment viennent s'offrir, dans ma théorie, les covariants auxquels M. Sylvester a donné les désignations de *Hessiens* ou d'*Émanants,* et qui ont été nommés précédemment g, g'.

IV.

Division en ordres des formes cubiques.

D'après ce que nous avons dit en commençant, le point de départ de cette théorie de la division en ordres est la recherche complète de tous les covariants des formes *cubiques*. Nous allons nous en occuper en nous fondant sur les propositions générales précédemment établies.

Soit la forme proposée

$$f=(a,b,c,\widehat{d)(}x,y)^3;$$

on trouvera d'abord pour ses covariants associés, f_1 étant identiquement nul, les expressions

$$f_2=-fg,\qquad f_3=+fh.$$

Afin d'introduire par la suite $2g$ au lieu de g, nous écrivons

$$f_2=-\tfrac{1}{2}fg,$$

et nous aurons ces valeurs

$$g=[2(b^2-ac),\ bc-ad,\ 2(c^2-bd)\widehat{](}x,y)^2,$$
$$h=\left(\begin{matrix}2b^3-3abc+a^2d,\ b^2c+abd-2ac^2,\\ -c^2b+2b^2d-acd,\ -2c^3+3bcd-ad^2\end{matrix}\widehat{\right)\left(}x,y\right)^3.$$

Cela posé, recherchons si d'autres covariants ne naîtraient pas, par exemple, du développement de

$$\left(a, b, c, d\right)\widehat{\;}\left(x\mathrm{X} - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{Y},\ y\mathrm{X} + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{Y}\right)^3.$$

Or on trouve sans peine que

$$\left(a, b, c, d\right)\widehat{\;}\left(x\mathrm{X} - \frac{1}{2} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{Y},\ y\mathrm{X} + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{X}\right)^3 = (f, h, \Delta f, \Delta h)\widehat{\;}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})^3,$$

Δ désignant l'invariant unique de f, savoir :

$$\begin{aligned}\Delta &= (bc - ad)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd)\\ &= 4ac^3 + 4db^3 + a^2d^2 - 6abcd - 3b^2c^2.\end{aligned}$$

Ce sont donc encore f et h qui se présentent, mais accompagnés maintenant de l'*invariant* Δ. Notre seconde proposition (§ II) conduit ainsi à ces deux conclusions :

Tout covariant θ *de la forme* cubique f *est exprimable, soit de cette manière :*

$$\theta = \frac{\Pi(f, g, h)}{f^\mu}, \tag{1}$$

soit de la suivante :

$$\theta = \frac{\Phi(f, h, \Delta)}{g^\nu}, \tag{2}$$

les deux numérateurs étant des fonctions rationnelles et entières des diverses quantités qui y entrent, et les exposants μ *et* ν *étant entiers. Or, de là, il est facile de conclure que* θ *peut également s'exprimer par une fonction entière de* f, g, h *et* Δ.

Pour établir la démonstration, j'observe d'abord que deux quelconques de ces trois quantités f, g, h peuvent être regardées comme entièrement indépendantes. On le voit en considérant un cas particulier. Soit, par exemple,

$$f = x^3 + y^3;$$

on trouvera

$$g = -2xy, \qquad h = x^3 - y^3;$$

quantités qui, envisagées deux à deux, ne peuvent être liées par aucune relation indépendante de x et y. Mais, entre f, g et h,

une telle relation existe nécessairement et s'obtient en comparant les invariants des deux formes

$$(a, b, c, d)\widehat{\;}(x, y)^3 \quad \text{et} \quad (f, 0, -\tfrac{1}{2}fg, fh)\widehat{\;}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})^3,$$

qui sont respectivement

$$\Delta \quad \text{et} \quad f^4h^2 - \tfrac{1}{2}f^4g^3.$$

Or, la seconde résultant de la première, par la substitution linéaire au déterminant f, qui donne naissance aux covariants associés à f, on trouvera

$$\Delta f^6 = f^4h^2 - \tfrac{1}{2}\Delta f^4 g^3$$

et, plus simplement,

$$\Delta f^2 + \tfrac{1}{2}g^3 = h^2. \tag{3}$$

(Cette équation a été récemment indiquée par M. Cayley dans un Mémoire intitulé : *Nouvelles recherches sur les covariants.*)

Cela posé, j'observe que les numérateurs dans les expressions (1) et (2) de θ pourront être ramenés, en vertu de cette relation, à contenir seulement la première puissance de h; ainsi, on pourra écrire

$$\begin{aligned}\Pi(f, g, h) &= \Pi_0(f, g, \Delta) + h\Pi_1(f, g, \Delta),\\ \Phi(f, h, \Delta) &= \Phi_0(f, g, \Delta) + h\Phi_1(f, g, \Delta),\end{aligned}$$

les nouvelles fonctions Π_0, Π_1, Φ_0, Φ_1 étant essentiellement entières en f, g et Δ.

Égalons maintenant les deux expressions du covariant θ; il viendra

$$\frac{1}{f^\mu}\Pi_0(f, g, \Delta) + \frac{h}{f^\mu}\Pi_1(f, g, \Delta) = \frac{1}{g^\nu}\Phi_0(f, g, \Delta) + \frac{h}{g^\nu}\Phi_1(f, g, \Delta).$$

Or je dis qu'on devra avoir séparément

$$\frac{1}{f^\mu}\Pi_0(f, g, \Delta) = \frac{1}{g^\nu}\Phi_0(f, g, \Delta), \tag{4}$$

$$\frac{1}{f^\mu}\Pi_1(f, g, \Delta) = \frac{1}{g^\nu}\Phi_1(f, g, \Delta). \tag{5}$$

Effectivement, s'il n'en était pas ainsi, on aurait entre f, g, h une équation essentiellement distincte de (3), contenant h au premier degré seulement. Il serait donc possible, en éliminant cette quantité, d'obtenir entre f et g une relation indépendante de x et y; contrairement à ce que nous avons précédemment établi. Or l'égalité (4), lorsqu'on a chassé les dénominateurs, prouve immédiatement que Π_0 est divisible par f^μ, et Φ_0 par g^ν. Une conséquence toute semblable se tire de l'égalité (5). Ainsi nous avons ce théorème :

Tout covariant de la forme cubique proposée f est une fonction entière de f, g, h et de l'invariant Δ; le covariant h pouvant être regardé comme entrant seulement au premier degré dans cette fonction.

De là découlent beaucoup de conséquences sur lesquelles nous aurons à revenir dans la suite de ces recherches. En nous bornant maintenant à ce qui se rapporte à la division des formes *cubiques*, nous voyons que cette division peut être faite de trois manières différentes.

Soient, en effet, $f, f', f'', \ldots, f^{(i)}$ les formes par lesquelles on peut représenter la totalité des classes *cubiques* différentes pour un même invariant Δ; à ces formes correspondront, d'une part, les covariants *quadratiques* $g, g', g'', \ldots, g^{(i)}$ et, de l'autre, les covariants *cubiques*, $h, h', h'', \ldots, h^{(i)}$. Cela posé, chacun de ces trois groupes de formes, que pour abréger nous nommerons (f), (g) et (h), pourra tout d'abord être individuellement divisé en ordres, en appliquant le principe de M. Gauss, tel que nous l'avons présenté (§ I). Or, en réunissant dans le même groupe toutes les formes de (f), dont les covariants quadratiques appartiennent au même ordre dans (g), on obtiendra une seconde division en ordres de (f), que nous dirons attachée à g. Et semblablement, si l'on prend pour point de départ la division en ordres de (h), et qu'on réunisse encore dans un même groupe les formes de (f), dont les covariants *cubiques* appartiennent au même ordre de (h), on arrivera à une troisième division en ordres de (f), que nous dirons attachée à h. De ces deux dernières divisions, celle qui est attachée à g a la plus grande importance, comme nous nous réservons de le montrer dans un autre Mémoire. Elle sert de base, en effet, à la détermination complète du nombre des classes cubiques pour un invariant donné; recherche que M. Eisenstein a déjà traitée d'une manière aussi ingénieuse

qu'élégante, mais seulement dans un cas particulier. Pour ce qui regarde la division en ordres attachée au covariant h, je ne puis la justifier que par l'analogie avec la précédente, car jusqu'ici je n'ai pas encore été amené à en faire usage, et à la caractériser par quelque propriété arithmétique particulière. Cependant, dans plusieurs circonstances, j'ai vu le covariant h jouer un rôle important, et j'en vais citer un exemple qui se rapporte précisément à la recherche du nombre des classes *cubiques*. Il est nécessaire, dans la méthode que j'ai suivie, d'obtenir l'expression analytique de toutes les formes pour lesquelles le covariant quadratique est le même. Or, f désignant une forme déterminée dont le covariant quadratique est g, toutes les autres qui auront le même covariant seront données par la formule $tf + uh$, h étant le covariant cubique de f; t et u des constantes liées par la relation

$$t^2 - \Delta u^2 = 1.$$

Il me reste encore à indiquer comment les diviseurs communs des coefficients de f, g ou h dépendent de Δ. Or, en nommant λ, μ, ν ces diviseurs, et remarquant que les invariants de f, g, h, à savoir : Δ, Δ et Δ^3, sont respectivement des fonctions homogènes du quatrième, du deuxième et encore du quatrième ordre, des coefficients de ces formes, on voit immédiatement que

λ^4	est un diviseur de	Δ,
μ^2	id.	Δ,
ν^4	id.	Δ^3.

A ces relations il faut aussi joindre les suivantes :

λ^2	est un diviseur des coefficients de	g,
λ^3	id.	h,
μ	id.	$2h$.

Les deux premières sont évidentes, et la troisième suit de l'équation

$$6h = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x},$$

dont le second membre contient le facteur *trois*, qui est amené par les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

V.

Division en ordres des formes biquadratiques.

La recherche du système complet des covariants est le point de départ de cette question, comme de la précédente. Nous allons la traiter en nous proposant de mettre dans tout son jour l'analogie que nous avons reconnue à cet égard entre les formes *cubiques* et *biquadratiques*.

Soit, en conservant les dénominations de mon premier Mémoire,

$$f = (a, b, c, b', a'\widehat{)}(x, y)^4$$

la forme proposée; ses covariants associés seront, d'après les formules générales données à la fin du § III,

$$\begin{aligned} f_1 &= 0, \\ f_2 &= -fg, \\ f_3 &= fh, \\ f_4 &= f(if^2 - 3g^2), \end{aligned}$$

i étant *l'invariant quadratique*

$$aa' - 4bb' + 3c^2;$$

g et h, les *covariants* que nous avons déjà considérés, savoir :

$$\begin{aligned} g = [b^2 - ac,\ \tfrac{1}{2}(bc - ab'),\ \tfrac{1}{6}(3c^2 - 2bb' - aa'),& \\ \tfrac{1}{2}(b'c - a'b),\ b'^2 - a'c\widehat{]}(x, y)^4,& \\ h = (p, q, r, s, r', q', p'\widehat{)}(x, y)^6,& \end{aligned}$$

en faisant pour abréger

$$p = 2b^3 - 3abc + a^2b', \qquad 6q = 6b^2c - 9ac^2 + 2abb' + a^2a', \qquad \ldots.$$

Cela posé, les covariants associés à g résulteront de l'identité suivante :

$$\begin{aligned} &(a, b, c, b', a'\widehat{)}\left(xX - \frac{1}{4}\frac{\partial g}{\partial y}Y,\ yX + \frac{1}{4}\frac{\partial g}{\partial x}Y\right)^2 \\ &= [f,\ \tfrac{1}{2}h,\ -\tfrac{1}{4}f(jf + ig),\ -\tfrac{1}{8}h(jf + ig),\ -jg^3 + \tfrac{1}{16}h(jf + ig)^2\widehat{]}(X, Y)^4, \end{aligned}$$

qu'on vérifiera par un calcul un peu long, quoique sans difficulté, en réduisant les covariants à leurs premiers termes. Il en résulte que nous retrouvons les quantités f, g, h accompagnées des deux invariants i et j. Ainsi la seconde proposition du § II conduit à ces conclusions :

Tout covariant θ *de la forme biquadratique* f *est exprimable, soit de cette manière :*

$$(1) \qquad \theta = \frac{\Pi(f, g, h; i)}{f^\mu},$$

soit de la suivante :

$$(2) \qquad \theta = \frac{\Phi(f, g, h; i, j)}{g^\nu};$$

les deux numérateurs étant des fonctions rationnelles et entières des diverses quantités qui y entrent, et les exposants μ, ν *étant entiers.*

Je vais maintenant établir que θ peut également s'exprimer par une fonction entière de f, g, h, i et j. J'observe d'abord que f et g ne sauraient être liés par aucune relation indépendante de x et y; comme on le voit en considérant le cas particulier de $f = x^4 + y^4$, qui donne $g = -x^2y^2$. Mais une telle relation existe entre f, g et h, et a été établie dans mon premier Mémoire, savoir :

$$4g^3 - igf^2 - jf^3 = h^2.$$

Or, on voit que les numérateurs, dans les expressions (1) et (2) de θ, pourront être ramenés, à l'aide de cette relation, à ne contenir que la première puissance de h. Ainsi on pourra écrire

$$\begin{aligned} \Pi(f, g, h; i) &= \Pi_0(f, g; i, j) + h\,\Pi_1(f, g; i, j), \\ \Phi(f, g, h; i, j) &= \Phi_0(f, g; i, j) + h\,\Phi_1(f, g; i, j), \end{aligned}$$

les nouvelles fonctions Π_0, Π_1, Φ_0, Φ_1, étant essentiellement entières en f, g, i et j. Il suit de là, en égalant les deux expressions du covariant θ,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{f^\mu}\Pi_0(f, g; i, j) + \frac{h}{f^\mu}\Pi_1(f, g; i, j) \\ &= \frac{1}{g^\nu}\Phi_0(f, g; i, j) + \frac{h}{g^\nu}\Phi_1(f, g; i, j); \end{aligned}$$

donc, achevant de raisonner absolument comme nous l'avons fait pour les formes *cubiques*, on obtiendra les équations séparées

$$\frac{1}{f^{\mu}}\,\Pi_0(f, g;\, i, j) = \frac{1}{g^{\nu}}\,\Phi_0(f, g;\, i, j),$$

$$\frac{1}{f^{\mu}}\,\Pi_1(f, g;\, i, j) = \frac{1}{g^{\nu}}\,\Phi_1(f, g;\, i, j),$$

desquelles il résulte que Π_0 et Π_1 sont divisibles par f^{μ}; Φ_0 et Φ_1 par g^{ν}. Ainsi nous avons ce théorème :

Tout covariant de la forme biquadratique *f est une fonction rationnelle et entière de f, g, h et des deux invariants i, j, le covariant h pouvant être regardé comme entrant seulement au premier degré dans cette relation.*

Pour procéder maintenant à la division en ordres, il conviendra d'introduire, au lieu de g et h, $6g$ et $6h$, qui ne contiendront aucun coefficient fractionnaire. La méthode que nous avons employée pour les formes *cubiques* donnera alors trois divisions différentes de l'ensemble des classes distinctes qui ont les mêmes invariants i et j. L'une sera directement déduite de la considération des diviseurs communs aux coefficients des formes qui représentent ces classes; les autres seront respectivement attachées à $6g$ et $6h$. Mais, moins avancés dans l'étude arithmétique des formes *biquadratiques*, nous ne pouvons encore, comme nous l'avons annoncé pour les formes *cubiques*, attribuer à aucune de ces divisions d'autres propriétés que celles-là mêmes qui leur servent de définition. Nous nous bornerons donc à la recherche des relations qui existent entre les diviseurs des coefficients des formes f, $6g$, $6h$, et les invariants i, j, recherche qui exige plus de développement que dans la théorie des formes cubiques; car elle dépend de la détermination des divers invariants de $6g$ et $6h$. Nous nous occuperons d'abord, à cet égard, de la forme g, mais en nous plaçant à un point de vue plus général, afin d'en tirer occasion de présenter quelques remarques sur un beau théorème qu'a donné M. Hesse, et qu'on peut énoncer ainsi :

Soit F *une forme biquadratique composée linéairement en f et g, savoir :*

$$\mathrm{F} = tf - ug,$$

t et u étant des constantes; si l'on nomme G *le covariant déduit de* F, *comme g de f, on aura*

$$\mathrm{G} = u'g - t'f,$$

u' et t' désignant de nouvelles constantes.

Une nouvelle démonstration de ce théorème résulte d'abord immédiatement de notre proposition, que tous les covariants des formes biquadratiques sont des fonctions entières de f, g, h. Effectivement, la forme G, qui, comme on le voit aisément, est un covariant de f, doit être, comme cela se voit *a priori*, du *quatrième* degré en x et y. Or les seuls covariants du quatrième degré qui puissent résulter d'une fonction entière de f, g, h sont des fonctions linéaires de f et g. G est donc, comme la forme F elle-même, une expression de cette nature. Cela étant, on trouvera, comme il suit, t' et u' au moyen de t et u. Nommons I, J et H les quantités analogues à i, j et h pour la forme F. Entre ces quantités on aura la relation

$$4\mathrm{G}^3 - \mathrm{I}\mathrm{G}\mathrm{F}^2 - \mathrm{J}\mathrm{F}^3 = \mathrm{H}^2,$$

que j'écrirai ainsi :

$$(4, 0, -\tfrac{1}{3}\mathrm{I}, -\mathrm{J})\widehat{\;}(\mathrm{G}, \mathrm{F})^3 = \mathrm{H}^2.$$

Or, on reconnaît immédiatement par l'expression de H au moyen des dérivées partielles $\frac{d\mathrm{F}}{dx}$, $\frac{d\mathrm{G}}{dx}$, $\frac{d\mathrm{F}}{dy}$, $\frac{d\mathrm{G}}{dy}$ que l'on a

$$\mathrm{H} = (tu' - ut')h.$$

Nous pouvons donc poser

$$\begin{aligned}&(4, 0, -\tfrac{1}{3}\mathrm{I}, -\mathrm{J})\widehat{\;}(\mathrm{G}, \mathrm{F})^3\\ &\quad = \mathrm{H}^2 = (tu' - ut')^2 h^2 = (tu' - ut')^2 (4, 0, -\tfrac{1}{3}i, -j)\widehat{\;}(g, f)^3,\end{aligned}$$

et, en observant que les équations

$$\mathrm{F} = tf - ug, \qquad \mathrm{G} = u'g - t'f$$

donnent

$$f = \frac{u\mathrm{G} + u'\mathrm{F}}{tu' - ut'}, \qquad g = \frac{t\mathrm{G} + t'\mathrm{F}}{tu' - ut'},$$

$$\begin{aligned}&4, 0, -\tfrac{1}{3}\mathrm{I}, -\mathrm{J})\widehat{\;}(\mathrm{G}, \mathrm{F})^3\\ &\quad = (tu' - ut')^2 \left(4, 0, -\frac{1}{3}i, -j\right)\widehat{\;}\left(\frac{t\mathrm{G} + t'\mathrm{F}}{tu' - ut'}, \frac{u\mathrm{G} + u'\mathrm{F}}{tu - ut'}\right)^3,\end{aligned}$$

cette dernière relation peut elle-même évidemment se ramener à la suivante :

$$(3)\qquad \begin{cases} (tu' - ut')\left(4, 0, -\frac{1}{3}I, -J\right)\widehat{\;}(G, F)^3 \\ \quad = \left(4, 0, -\frac{1}{3}i, -j\right)\widehat{\;}(tG + t'F, uG + u'F)^3, \end{cases}$$

que nous allons traiter comme identique par rapport à G et F.

A cet effet, je désigne pour un instant par $\varphi(t, u)$ la forme cubique

$$\left(4, 0, -\frac{1}{3}i, -j\right)\widehat{\;}(t, u)^3.$$

On trouvera, en égalant les coefficients de G^3 et G^2F, ces deux équations :

$$4(tu' - ut') = \varphi(t, u),$$

$$0 = t'\frac{d\varphi}{dt} + u'\frac{d\varphi}{du},$$

desquelles on tirera

$$t' = -\frac{1}{12}\frac{d\varphi}{du}, \qquad u' = \frac{1}{12}\frac{d\varphi}{dt};$$

expressions bien simples, comme on voit.

Mais notre principal objet est d'obtenir les invariants I et J, qu'il nous faudra tout à l'heure employer dans le cas particulier où $F = 6g$. Soient, dans ce but, χ et ψ les covariants quadratique (¹) et cubique de φ, savoir :

$$\chi = \left(\frac{4}{3}i, 2j, \frac{1}{9}i^2\right)\widehat{\;}\left(t, u\right)^2,$$

$$\psi = \left(-16j, -\frac{8}{9}i^2, -\frac{4}{3}ij, +\frac{2}{27}i^3 - 4j^2\right)\widehat{\;}\left(t, u\right)^3,$$

on trouvera, en employant les valeurs obtenues pour t' et u',

$$\left(4, 0, -\frac{1}{3}i, -j\right)\widehat{\;}\left(tG - \frac{1}{12}\frac{d\varphi}{du}F, uG + \frac{1}{12}\frac{d\varphi}{dt}F\right)^3$$

$$= \left(\varphi, 0, -\frac{1}{4^2}\varphi\chi, \frac{1}{4^3}\varphi\psi\right)\widehat{\;}\left(G, F\right)^3;$$

car nous avons été amenés à faire usage précédemment de la substi-

(¹) Ce covariant χ est le covariant désigné par g dans le paragraphe III et la moitié de celui ainsi désigné dans le paragraphe IV. E. P.

tution qui donne naissance aux covariants associés. L'équation (3) devient ainsi, en remplaçant $tu' - ut'$ par $\frac{1}{4}\varphi$,

$$\frac{1}{4}\varphi\left(4, 0, -\frac{1}{3}I, -J\right)\widehat{\;}\left(G, F\right)^3 = \left(\varphi, 0, -\frac{1}{4^2}\varphi\chi, \frac{1}{4^3}\varphi\psi\right)\widehat{\;}\left(G, F\right)^3,$$

et l'on en tire

$$I = \frac{3}{4}\chi = \left(i, \frac{3}{2}j, \frac{1}{12}i^2\right)\widehat{\;}\left(t, u\right)^2,$$

$$J = -\frac{1}{16}\psi = \left(j, \frac{1}{18}i^2, \frac{1}{12}ij, \frac{54j^2 - i^3}{6^3}\right)\widehat{\;}\left(t, u\right)^3.$$

En particulier, si l'on suppose $t = 0$, $u = -6$, afin d'obtenir $F = 6g$, on trouvera

$$I = 3i^2, \qquad J = i^3 - 54j^2.$$

C'est là le résultat que nous voulions établir pour arriver à caractériser les nombres entiers, diviseurs des coefficients de $6g$.

Nous allons maintenant procéder à une recherche analogue relativement aux coefficients de la forme $6h$. Cette recherche tout d'abord semble plus difficile ; car nous ne possédons aucune proposition sur les invariants des formes du sixième degré. Mais il se présente ici le premier exemple d'un fait remarquable que nous verrons plus tard se reproduire dans bien des circonstances. La forme h possède, en effet, cette singulière propriété que tous ses invariants sont ou le discriminant, ou les puissances du discriminant de la forme biquadratique proposée f. Voici, je crois, la manière la plus facile de le démontrer. Imaginons que, par une substitution S, au déterminant un, on fasse évanouir dans f les coefficients de x^3y et xy^3, de sorte que la transformée obtenue soit

$$F = (A, 0, C, 0, A')\widehat{\;}(X, Y)^4.$$

Cette substitution, effectuée dans h, donnera précisément pour transformée la forme H qu'on déduirait de F, par la même loi que h de f. Or on trouve ainsi

$$H = \left[0, \tfrac{1}{6}A(AA' - 9C^2), 0, 0, 0, -\tfrac{1}{6}A'(AA' - 9C^2), 0\right]\widehat{\;}(X, Y)^6.$$

Cela posé, un invariant quelconque de h, fonction homogène de p, q, r, s, r', q', p', ne changera pas de valeur en substituant à ces coefficients ceux de la transformée H. Mais, par là, cet invariant devient une fonction homogène des deux seules quantités

$$A(AA'-9C^2) \quad \text{et} \quad A'(AA'-9C^2),$$

et même une fonction qui ne doit pas changer par rapport à la substitution

$$X = KX', \qquad Y = \frac{Y'}{K},$$

en désignant par K une constante quelconque; il ne peut donc être que *proportionnel* à une puissance du produit

$$AA'(AA'-9C^2)^2.$$

Or ce produit s'exprime aisément en i et j; car, F étant une transformée de f par une substitution au déterminant 1, on a

$$i = AA' + 3C^2, \qquad j = C(AA'-C^2),$$

et, par suite, le discriminant Δ a pour valeur

$$\Delta = i^3 - 27j^2 = AA'(AA'-9C^2)^2;$$

d'où résulte ce que nous avons annoncé.

Ceci établi, on sait par un théorème de M. Cayley que l'expression

$$pp' - 6qq' + 15rr' - 10s^2$$

est un invariant de la forme

$$(p, q, r, s, r', q', p' \widehat{)(} x, y)^6,$$

de sorte qu'on doit avoir, en désignant par μ une quantité numérique,

$$pp' - 6qq' + 15rr' - 10s^2 = \mu\Delta.$$

Or, en supposant $b = 0$, $b' = 0$, on trouve de suite que μ doit être $\frac{1}{6}$; nous avons donc pour la forme $6h$ un invariant du *second degré* par rapport à ses coefficients, et dont la valeur est 6Δ. Ce dernier résultat et les expressions précédemment obtenues pour les invariants de $6g$ donnent les conséquences suivantes :

Désignant par λ, μ, ν les diviseurs des coefficients des

formes f, $6g$, $6h$,

λ^2	est un diviseur de l'invariant	i,
λ^3	id.	j,
μ^2	id.	$3i^2$,
μ^3	id.	$i^3 - 54j^2$,
ν^2	id.	6Δ

ou

$$6(i^3 - 27j^2).$$

A ces relations il faut aussi joindre celles-ci, qu'il nous suffira d'indiquer :

λ^2	est un diviseur des coefficients de	$6g$,
λ^3	id.	$6h$,
μ	id.	$8h$.

Comme pour les formes cubiques, la dernière résulte de l'équation

$$8h = \frac{dg}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{dg}{dy}\frac{df}{dx}.$$

Je terminerai par une remarque qui ne sera pas peut-être sans importance au point de vue arithmétique, et qui se tire des formules que j'ai données pour le théorème de M. Hesse. Elle consiste en ce que le discriminant Δ est en *facteur* dans le covariant G, et les deux invariants I et J de la forme

$$F = i^2 f + 18jg.$$

VI.

Sur les covariants des formes du cinquième degré.

Il a été précédemment établi que tous les covariants des formes cubiques et biquadratiques s'expriment en fonction rationnelle et entière de deux d'entre eux, et de la forme proposée. Ces deux covariants fondamentaux ont, comme nous l'avons vu, une origine commune, et se trouvent dans le groupe des covariants associés à la forme primitive. Or cette propriété fondamentale n'existe plus pour les formes du *cinquième* degré, et il devient alors impossible d'exprimer tous les covariants en fonction entière de ceux que nous avons définis comme associés à la proposée. Effectivement, les formules générales données à la fin du § III mettent en évidence ces quatre covariants associés, g, g', h, h', dont voici les premiers termes :

$$\begin{aligned} g &= (b^2 - ac)x^6 + \ldots, \\ g' &= (ae - 4bd + 3c^2)x^2 + \ldots, \\ h &= (2b^3 - 3abc + a^2 d)x^9 + \ldots, \\ h' &= [2b(ae - 4bd + 3c^2) - a(af - 3be + 2cd)]x^5 + \ldots, \end{aligned}$$

la forme primitive étant supposée

$$f = (a, b, c, d, e, f\widehat{)(}x, y)^5.$$

Or il existe au moins un covariant *cubique* qu'on pourra, par exemple, définir comme l'invariant j de la forme *biquadratique* suivante :

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}, \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}, \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)\widehat{}\left(X, Y\right)^4,$$

et qui ne pourra jamais s'exprimer par une fonction entière de f, g, g', h, h', qui sont respectivement des degrés 5, 6, 2, 9 et 5.

Il existe donc bien, au point de vue algébrique, un caractère important qui appartient exclusivement aux formes de degrés moindres que *cinq*; mais il y a, même pour ces formes, des propriétés qu'on doit regarder comme exceptionnelles, et qui peuvent véritablement les faire considérer comme des cas singuliers dans les théories générales. Ainsi, les formes cubiques ne possèdent point de covariants linéaires, qui se présentent pour toutes les autres formes de degrés impairs. Les formes biquadratiques n'ont pas non plus de covariants quadratiques qui se présentent, au contraire, pour toutes les autres formes de degrés pairs. Or, de là découlent, dans la nature de ces formes, de profondes différences, que nous nous attacherons à apprécier et à faire ressortir dans la suite de nos recherches.

Paris, juillet 1854.

SUR

LE NOMBRE DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE

COMPRISES ENTRE DES LIMITES DONNÉES.

(Extrait d'une Lettre à M. Borchardt, *Journal de Crelle*, t. 52).

..... En poursuivant mes recherches sur le théorème de M. Sturm j'ai réussi à traiter par les mêmes principes les équations à coefficients imaginaires, ce qui m'a conduit au théorème de M. Cauchy pour le cas du rectangle, du cercle et d'une infinité d'autres courbes qui sont même à branches infinies, comme l'hyperbole. La théorie des formes quadratiques vient ainsi donner pour ces théorèmes des démonstrations indépendantes de toute considération de continuité, comme celle que vous avez déjà pu conclure vous-même de ce que j'ai dit au sujet du théorème de M. Sturm dans les *Comptes rendus de l'Académie* (1) (1853, 1er sem., p. 294). La réduction d'une forme quadratique à une somme de carrés, qui a été le sujet de votre Mémoire sur l'équation dont dépendent les inégalités séculaires, joue le principal rôle dans mes recherches. Seulement, au lieu des substitutions où la somme des carrés des variables qu'on introduit est égale à la somme des carrés des variables primitives, je considère des substitutions réelles quelconques. On a alors cette proposition dont je donnerai une démonstration très facile, dans la suite des Mémoires sur les formes quadratiques que je destine au *Journal de Crelle* : De quelque manière que l'on fasse évanouir les rectangles d'une forme quadratique par une substitution réelle, le nombre des carrés qui se présenteront affectés de coefficients de mêmes signes, sera constant. Ce nombre est ainsi un véritable invariant pour l'ensemble des formes équivalentes par

(1) *Voyez* page 284 de ce volume. E. P.

des substitutions réelles. Maintenant voici le premier théorème qu'il faut établir, pour traiter les équations à coefficients imaginaires.

I.

Soient

$$X = x + ix', \qquad Y = y + iy', \qquad \ldots, \qquad U = u + iu'$$

n variables imaginaires, i désignant $\sqrt{-1}$, *et*

$$X_0 = x - ix', \qquad Y_0 = y - iy', \qquad \ldots, \qquad U_0 = u - iu'$$

leurs conjuguées respectives; la forme quadratique suivante :

$$\begin{aligned}\varphi = \quad & X_0(a_{1,1}X + a_{1,2}Y + \ldots + a_{1,n}U)\\ &+ Y_0(a_{2,1}X + a_{2,2}Y + \ldots + a_{2,n}U)\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ U_0(a_{n,1}X + a_{n,2}Y + \ldots + a_{n,n}U)\end{aligned}$$

sera évidemment réelle en mettant en évidence $x, y, \ldots, u; x', y', \ldots, u'$, *si les constantes* $a_{\mu,\nu}$ *et* $a_{\nu,\mu}$ *sont des quantités imaginaires conjuguées, ce qui suppose réelles* $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$.

Sous cette condition nommons $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n$ les déterminants qui suivent :

$$\Delta_1 = a_{1,1}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Tous ces déterminants sont réels, car ils se reproduisent en mettant les colonnes horizontales à la place des colonnes verticales, ou $a_{\nu,\mu}$ au lieu de $a_{\mu,\nu}$; ce qui revient à changer dans les éléments $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$. Cela étant, si l'on fait évanouir les rectangles de la forme φ par une substitution réelle, le nombre des carrés qui se présenteront avec des coefficients positifs sera double du nombre des termes positifs de la suite

$$\Delta_1, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

et le nombre des carrés multipliés par des coefficients négatifs sera le double du nombre des termes négatifs de la même suite. On voit par ce théorème que les formes telles que φ se comportent comme des formes à un nombre d'indéterminées moitié moindre, ce qui est surtout important pour l'Arithmétique, comme je l'ai démontré dans la théorie nouvelle dont j'ai fait dépendre la décomposition des nombres en quatre carrés. Mais la considération de ce genre de formes me semble également indispensable pour arriver au théorème suivant, qui est un théorème fondamental.

II.

Soit

$$F(z) = Az^n + Bz^{n-1} + \ldots + Kz + L = 0$$

une équation dont les coefficients sont des quantités imaginaires quelconques, et a, b, c, ..., k ses racines; nommons A_0, $B_0, \ldots, K_0, L_0$ *les quantités conjuguées de* $A, B, \ldots, K, L$, *et posons*

$$F_0(z) = A_0 z^n + B_0 z^{n-1} + \ldots + K_0 z + L_0.$$

La forme quadratique suivante :

$$\begin{aligned}\varphi = \quad & \frac{i}{F_0(a)F'(a)}(x + ay + \ldots + a^{n-1}u)^2\\ &+ \frac{i}{F_0(b)F'(b)}(x + by + \ldots + b^{n-1}u)^2\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ \frac{i}{F_0(k)F'(k)}(x + ky + \ldots + k^{n-1}u)^2,\end{aligned}$$

fonction symétrique des racines $a, b, \ldots, k$, sera toujours réelle, et jouira de cette propriété que, si l'on fait évanouir les rectangles, le nombre des carrés affectés de coefficients *positifs* sera égal au nombre des racines $a, b, \ldots, k$, dans lesquelles le coefficient de i sera *positif*, et le nombre des carrés affectés de coefficients *négatifs* égal au nombre des racines dans lesquelles le coefficient de i est *négatif*.

Pour le démontrer, je vais introduire, comme plus haut, les indéterminées imaginaires conjuguées

$$X = x + ix', \quad X_0 = x - ix', \quad Y = y + iy', \quad Y_0 = y - iy', \quad \ldots, \quad U = u + iu', \quad U_0 = u - iu',$$