## SECTION III.

**L'équation générale du cinquième degré est ramenée à ne dépendre que de deux paramètres.**

Ce résultat suit immédiatement de l'expression de la forme-type que nous venons d'obtenir. Qu'on fasse, en effet,

$$K = \frac{J_2}{\Delta^2}, \qquad K' = \frac{J_3}{\Delta^3},$$

et l'on pourra écrire

$$\Phi = \frac{\Delta^6\sqrt{\Delta}}{(2J_3)^5}\left(\mathfrak{A}_0\sqrt{\Delta^5},\ \mathfrak{B}_0\sqrt{\Delta^4},\ \mathfrak{C}_0\sqrt{\Delta^3},\ \mathfrak{C}'_0\sqrt{\Delta^2},\ \mathfrak{B}'_0\sqrt{\Delta},\ \mathfrak{A}'_0\right)(\xi, \eta)^5,$$

$\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$, ..., désignant respectivement ce que deviennent les numérateurs dans $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., quand on y remplace $\Delta$, $J_2$, $J_3$ par 1, K, K'. Nommons de même $I_0$ ce que devient alors l'invariant I, il est clair qu'il suffit de mettre $\eta I_0\sqrt{\Delta}$, au lieu de $\eta$, pour ramener l'équation $\Phi = 0$ à contenir seulement les deux paramètres K et K'. Et s'il arrive que $\Delta$ soit une quantité négative, la réduction sera aussi bien obtenue en remplaçant $\eta$ par $\eta I_0\sqrt{-\Delta}$ ; c'est la seule quantité irrationnelle qui figure dans la substitution, et il est aisé de voir que l'irrationnelle $I_0\sqrt{\Delta}$ disparaîtra dans l'équation transformée, de sorte que K et K' entreront rationnellement dans le résultat. L'équation à laquelle nous mène ainsi la notion des formes-types n'a pas la simplicité apparente de la réduite de l'équation du cinquième degré qu'a obtenue Jerrard, mais elle met en évidence les fonctions des coefficients dont dépend essentiellement la nature des racines, et tandis que l'ingénieuse découverte du géomètre anglais est restée jusqu'ici stérile, nous allons pouvoir immédiatement tirer d'importantes conséquences de notre transformée.



## SECTION IV.

**Les invariants de tous les degrés des formes du cinquième degré sont des fonctions entières des quatre invariants fondamentaux $\Delta$, $J_2$, $J_3$ et I.**

Dans la première Partie de ces recherches, j'ai obtenu pour les invariants dont le degré est $\equiv 0$ ou $\equiv 2 \pmod 4$ les expressions générales

$$\frac{\Theta_0(J_3, \Delta J_2, \Delta^3)}{\Delta^\mu} \quad \text{et} \quad \frac{I\,\Theta_1(J_3, \Delta J_2, \Delta^3)}{\Delta^\mu},$$

où entre en dénominateur une puissance de $\Delta$ ; mais on peut aller plus loin et parvenir à des expressions entières par la considération de la forme-type. En effet, $\Phi$ étant une transformée de $f$, par une substitution linéaire au déterminant $\frac{1}{2J_3}$, comme il est aisé de le voir, tout invariant de $f$ s'exprime au moyen d'une fonction semblable des coefficients de $\Phi$, multiplié par une certaine puissance de $J_3$. Mais ces coefficients de la forme-type sont, comme nous l'avons établi, des fonctions entières des invariants fondamentaux divisées par une puissance de $J_3$ ; donc déjà, tout invariant de la forme proposée est une fonction entière des invariants fondamentaux, ou au moins une pareille fonction divisée par une puissance de $J_3$. Distinguant maintenant les deux cas où le degré des invariants est $\equiv 0$ ou $\equiv 2 \pmod 4$, nous reconnaîtrons bien aisément que l'expression générale

$$\frac{F(\Delta, J_2, J_3, I)}{J_3^\nu},$$

où F est une fonction entière, se réduit dans le premier à la forme

$$\frac{H_0(\Delta, J_2, J_3)}{J_3^\nu},$$

et dans le second à la forme

$$\frac{I H_1(\Delta, J_2, J_3)}{J_3^\nu},$$

$H_0$ et $H_1$ étant pareillement des fonctions entières. Cela suit, en effet, de ce que le carré et les puissances paires de l'invariant I du dix-huitième degré s'expriment en fonction entière de $\Delta$, $J_2$ et $J_3$. Voici donc, par exemple, pour les invariants dont le degré est multiple de 4, deux expressions différentes qui doivent être égales :

$$\frac{\Theta_0(J_3, \Delta J_2, \Delta^3)}{\Delta^\mu} \quad \text{et} \quad \frac{H_0(\Delta, J_2, J_3)}{J_3^\nu};$$

or les trois quantités $\Delta$, $J_2$, $J_3$ qui y figurent n'ont entre elles aucune relation et doivent être considérées comme absolument indépendantes ; l'égalité

$$\frac{H_0(\Delta, J_2, J_3)}{J_3^\nu} = \frac{\Theta_0(J_3, \Delta J_2, \Delta^3)}{\Delta^\mu}$$

entraîne donc que $H_0$ est divisible par $J_3^\nu$ et $\Theta$ par $\Delta^\mu$, c'est-à-dire que les invariants en question s'expriment en fonction entière de $\Delta$, $J_2$ et $J_3$. Quant au second cas où le degré est $\equiv 2 \pmod{4}$, il se traite tout à fait de même, car il conduit à l'égalité

$$\frac{I\Theta_1(J_3, \Delta J_2, \Delta^3)}{\Delta^\mu} = \frac{IH_1(\Delta, J_2, J_3)}{J_3^\nu},$$

qui, après la suppression du facteur I, coïncide avec celle qu'on vient d'obtenir ; ainsi donc, en général, tout invariant d'une forme du cinquième degré, dont le degré par rapport aux coefficients est $\equiv 0 \pmod{4}$, est une fonction entière de $\Delta$, $J_2$, $J_3$, et tout invariant dont le degré est $\equiv 2$ est le produit d'une pareille fonction multipliée par l'invariant I du dix-huitième degré. Les expressions suivantes :

$$\Sigma\alpha.\Delta^i J_2^{i'} J_3^{i''}, \qquad I\Sigma\alpha.\Delta^i J_2^{i'} J_3^{i''},$$

où les quantités $\alpha$ sont numériques, représentent donc tous les invariants des formes du cinquième degré, d'où l'on voit qu'il existe autant d'invariants linéairement indépendants, d'un degré donné $m$, qu'il y a de solutions entières et positives de l'une ou l'autre de ces équations

$$4i + 8i' + 12i'' = m,$$
$$18 + 4i + 8i' + 12i'' = m.$$

On en conclut, par la loi de réciprocité, que les formes d'un degré quelconque $m$ ont autant d'invariants du cinquième degré par rapport à leurs coefficients qu'il y a de solutions entières et



positives des mêmes équations. Ainsi, parmi les formes dont le degré est impairement pair, il faut aller jusqu'au dix-huitième degré pour rencontrer un invariant du cinquième ordre.

## SECTION V.

### Recherche particulière sur le discriminant des formes du cinquième degré.

MM. Cayley et Sylvester nomment, comme on sait, *discriminant d'une forme* $f$ le résultat de l'élimination de $\frac{x}{y}$, entre les deux équations homogènes

$$\frac{df}{dx} = 0, \qquad \frac{df}{dy} = 0.$$

On obtient ainsi pour une forme de degré $m$ un invariant de degré $2(m-1)$ qui, égalé à zéro, exprime que $f$ a un facteur linéaire élevé au carré. Dans le cas des formes du cinquième degré, le discriminant est donc un invariant du huitième ordre, et qui, d'après la théorie précédente, doit être de cette forme $\alpha J_2 + \alpha' \Delta^2$, $\alpha$ et $\alpha'$ étant numériques. Mais nous allons en former l'expression par une méthode particulière et sans supposer les résultats généraux établis dans la précédente Section, dont nous voulons offrir ainsi une confirmation dans un cas spécial très important en lui-même. A cet effet, nous nous proposerons généralement d'obtenir les valeurs des invariants fondamentaux, lorsqu'il existe un facteur linéaire élevé au carré dans la forme proposée, c'est-à-dire lorsqu'on peut lui donner cette expression

$$f = (0, 0, a, b, c, d)(x, y)^5.$$

En observant qu'on peut mettre $x + ky$ au lieu de $x$ sans que les deux premiers coefficients cessent d'être nuls, disposons de cette quantité $k$ de manière à faire évanouir le coefficient de $xy$ dans le covariant quadratique $\theta$. Nous aurons ainsi une transformée

$$f_1 = (0, 0, a_1, b_1, c_1, d_1)(x, y)^5,$$

et il faudra que les nouveaux coefficients vérifient la condition $a_1 b_1 = 0$. Comme nous ne voulons point admettre de facteurs linéaires à la troisième puissance, il faudra faire $b_1 = 0$, et, si l'on écrit ainsi $f_1$ sous la forme

$$f_1 = \left(0, 0, \frac{4}{a^2}, 0, \frac{3}{b^2}, e\right)(x, y)^5,$$

le covariant $\theta$ sera

$$\theta = \frac{48}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right),$$

ce qui nous conduit à remplacer encore $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$ par X et Y. Nous trouverons de la sorte cette transformée des formes à facteur linéaire double

$$pY^5 + q(3XY^4 + 8X^3Y^2),$$

où $p$ et $q$ sont des constantes quelconques, et qui a pour covariant quadratique

$$\frac{48q^2}{25}(X^2 - Y^2).$$

Cela étant, il suffira de mettre X + Y et X − Y au lieu de X et Y pour obtenir la transformée canonique, qui sera

$$\begin{aligned}
F &= p(X-Y)^5 + q(X-Y)^2(X+Y)[3(X-Y)^2 + 8(X+Y)^2],\\
&= p(X-Y)^5 + q(X-Y)^2(X+Y)(11X^2 + 10XY + 11Y^2),\\
&= (p + 11q, -p - \tfrac{1}{5}q, p - q, -p - q, p - \tfrac{1}{5}q, -p + 11q)(X, Y)^5.
\end{aligned}$$

Voici donc en fonction des deux indéterminées $p$ et $q$ les valeurs suivantes, propres au cas d'un facteur linéaire élevé au carré dans la forme proposée, savoir :

$$AA' = -p^2 + 121q^2, \quad BB' = -p^2 + \tfrac{1}{25}q^2, \quad CC' = -p^2 + q^2,$$
$$ACB'^2 - A'C'B^2 = \tfrac{48}{5}pq(2p^2 + q^2).$$

On en tire

$$\sqrt{\Delta} = \frac{3.2^{10}}{25}q^2, \qquad \frac{J_2}{\sqrt{\Delta^3}} = -\frac{3.2^3}{25}q^2, \qquad \frac{J_3}{\sqrt{\Delta^5}} = q^2 - p^2,$$

d'où cette conclusion importante

$$\Delta^2 + 2^7 J_2 = 0.$$

Le discriminant des formes du cinquième degré est donc obtenu, puisque nous avons un invariant du huitième ordre $\Delta^2 + 2^7 J_2$ qui s'évanouit lorsqu'on suppose deux racines égales dans ces formes,



et il se présente bien sous la forme valide d'après notre théorie générale. Exprimé par les coefficients de la forme canonique, il a cette valeur

$$\text{discriminant} = \Delta^2 + 2^7 J_2 = \sqrt{\Delta^3}(AA' + 125BB' - 126CC'),$$

de sorte qu'on a un procédé arithmétique facile pour calculer dans un cas donné cette fonction si importante. Remarquons encore, avant d'aller plus loin, la quantité

$$25\Delta^3 - 2^{11}J_3,$$

qui s'évanouit si la forme proposée contient deux facteurs linéaires différents élevés chacun au carré. Si l'on cherche, en effet, le discriminant de la forme cubique

$$\frac{F}{(X-Y)^2} = p(X-Y)^3 + q(X+Y)(11X^2 + 10XY + 11Y^2),$$

on le trouvera, abstraction faite d'un facteur numérique, égal à $q^2(2p^2 + q^2)$ et, d'après les relations précédentes, cette valeur s'exprime ainsi

$$25\,\frac{25\Delta^3 - 2^{11}J_3}{3.2^{20}\Delta^2}.$$

Dans un instant nous allons reconnaître le rôle important que joue cette quantité (¹).

## SECTION VI.

### Expression par les invariants fondamentaux du nombre des racines réelles et imaginaires de toute équation du cinquième degré.

La possibilité d'un pareil résultat est une conséquence immédiate de ces deux propriétés de la forme-type, d'être une transformée par une substitution réelle de la forme proposée, et d'avoir pour coefficients des invariants. Mais on sent combien il y a loin d'une telle possibilité à un résultat effectif; aussi, depuis l'époque

---

(¹) Dans le cas d'une forme contenant au cube un facteur linéaire, tous les invariants s'évanouissent, comme cela résulte d'un théorème général donné par mon ami M. Cayley dans le *Journal de Crelle*.

où je communiquais pour la première fois cette vue à mon ami M. Sylvester, avais-je désespéré d'aller plus loin, l'application du théorème de M. Sturm n'étant pas praticable sur l'équation littérale et compliquée qui aurait la forme-type pour son premier membre.

La méthode suivante, à laquelle je ne suis parvenu qu'après bien des efforts, me semble peut-être mériter un instant d'attention, car elle offrira, si je ne me trompe, une étude algébrique complète des racines de l'équation générale du cinquième degré, sous le point de vue de la distinction de ces racines comme quantités réelles et imaginaires, lorsqu'on attribue aux coefficients toutes les valeurs réelles possibles. Je ferai précéder cette recherche de quelques lemmes, afin de ne pas interrompre par la suite l'ordre des raisonnements.

## LEMMES PRÉLIMINAIRES.

Lemme I. — *Le produit des carrés des différences des racines d'une équation de degré quelconque $f(x) = 0$ est positif ou négatif, selon que le nombre des racines imaginaires de cette équation est $\equiv 0$ ou $\equiv 2 \pmod 4$. Supposons cette proposition vraie pour une équation d'un degré déterminé $f(x) = 0$, nous allons démontrer qu'elle subsiste pour la nouvelle équation*

$$F(x) = (x - \alpha)(x - \beta) f(x) = 0.$$

Soient en effet D et **D** les discriminants, ou, pour plus de précision, les produits des carrés des différences des racines des équations $F = 0$, $f = 0$; on trouvera sans difficulté

$$D = (\alpha - \beta)^2 f^2(\alpha) f^2(\beta)\, \mathbf{D}.$$

D'où l'on voit qu'en supposant réelles les racines $\alpha$ et $\beta$, D et **D** seront de même signe, tandis qu'en les supposant imaginaires conjuguées, D et **D** seront de signes contraires, car le produit $f(\alpha) f(\beta)$ sera positif, et le facteur $(\alpha - \beta)^2$ négatif. La proposition annoncée se vérifie donc à l'égard de l'équation $F = 0$ si elle a lieu pour l'équation $f = 0$; ainsi elle est générale, puisqu'elle est vraie dans le cas du second degré. Les exemples suivants montreront déjà un usage de cette remarque.



Considérons une forme biquadratique

$$f = (a, b, c, b', a')(x, y)^4 = a(x - \alpha y)(x - \beta y)(x - \gamma y)(x - \delta y);$$

soient I l'invariant du second ordre

$$aa' - 4bb' + 3c^2$$

et D le discriminant

$$a^6 (\alpha - \beta)^2 (\alpha - \gamma)^2 \ldots (\gamma - \delta)^2.$$

Je dis qu'en supposant $I < 0$ la forme proposée aura deux ou quatre racines imaginaires, suivant que D sera négatif ou positif.

On a, en effet, ce qui se vérifie très aisément,

$$I = aa' - 4bb' + 3c^2 = \frac{a^2}{24} [(\alpha - \beta)^2 (\gamma - \delta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 (\beta - \delta)^2 + (\alpha - \delta)^2 (\beta - \gamma)^2];$$

donc, l'hypothèse $I < 0$ exclut le cas où toutes les racines sont réelles, et le lemme précédent suffit pour distinguer l'un de l'autre les deux autres cas seuls possibles où le nombre des racines imaginaires est deux ou quatre. Quelque chose d'analogue a lieu aussi pour le cinquième degré; nous allons l'indiquer, bien que nous n'ayons pas à nous en servir par la suite. Soient

$$\begin{aligned} f &= (a, b, c, c', b', a')(x, y)^5 \\ &= a(x - \alpha y)(x - \beta y)(x - \gamma y)(x - \delta y)(x - \varepsilon y), \end{aligned}$$

D le discriminant, $a^8 (\alpha - \beta)^2 \ldots$ et $\Delta$ l'invariant qui figure dans nos recherches, savoir

$$(aa' - 3bb' + 2cc')^2 - 4(ab' - 4bc' + 3c^2)(a'b - 4b'c + 3c'^2);$$

on trouvera

$$\Delta = -\frac{a^4}{2.5^4} \Sigma (\alpha - \beta)^2 (\beta - \gamma)^2 (\gamma - \delta)^2 (\delta - \varepsilon)^2 (\varepsilon - \alpha)^2,$$

le signe $\Sigma$ se rapportant aux termes qu'on déduit de celui que nous avons écrit par les permutations des racines.

Il s'ensuit que, en supposant $\Delta$ positif, la forme aura des racines imaginaires, et, comme précédemment, elle en aura deux ou quatre, suivant que D sera négatif ou positif.

En passant, remarquons encore cette relation

$$D = a^8(\alpha-\beta)^2\ldots(\delta-\varepsilon)^2 = 5^5(\Delta^2+2^7 J_2).$$

Lemme II. — *Il a été remarqué* (Section II) *que les coefficients de la forme-type avaient pour commun dénominateur* $(2J_3)^5$; *d'après cela, et pour plus de commodité, nous considérons par la suite au lieu de* $\varphi$ *la forme* $(2J_3)^5\varphi$, *c'est-à-dire nous ferons*

$$\Phi = (A, B, C, C', B', A')(\xi, \eta)^5,$$

*les coefficients n'offrant plus* $J_3$ *en dénominateur et ayant ainsi pour valeurs*

$$\begin{aligned}
36A &= \Delta^7 J_2 + \Delta^6 J_3 + 6\Delta^5 J_2^2 - 39\Delta^4 J_2 J_3 - 9\Delta^3(6J_3^2 - J_2^3)\\
&\qquad - 126\Delta^2 J_3 J_2^2 + 288\Delta J_3^2 J_2 + 1152 J_3^3,\\
36C &= \Delta^6 J_2 + \Delta^5 J_3 + 6\Delta^4 J_2^2 - 27\Delta^3 J_2 J_3 - 3\Delta^2(14J_3^2 - 3J_2^3)\\
&\qquad - 90\Delta J_3 J_2^2 + 144 J_3^2 J_2,\\
36B' &= \Delta^5 J_2 + \Delta^4 J_3 + 6\Delta^3 J_2^2 - 15\Delta^2 J_2 J_3 - 3\Delta(10J_3^2 - 3J_2^3) - 54 J_3 J_2^2;\\
9B &= -I(\Delta^4 + 3\Delta^2 J_2 - 24\Delta J_3),\\
9C' &= -I(\Delta^3 + 3\Delta J_2 - 12 J_3),\\
9A' &= -I(\Delta^2 + 3J_2).
\end{aligned}$$

Cela posé, on aura ces relations remarquables,

$$(1)\qquad \begin{cases} AB' - 4BC' + 3C^2 = 16\Delta J_3^5,\\ A'B - 4B'C + 3C'^2 = -16J_3^5,\\ AA' - 3BB' + 2CC' = 0.\end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} A - 2\Delta C + \Delta^2 B' = 32J_3^3,\\ B - 2\Delta C' + \Delta^2 A' = 0;\end{cases}$$

les premières résultent de l'expression du covariant quadratique de $\Phi$, qu'on obtient bien aisément. Effectivement, cette forme $\Phi$ provient, par le fait de la suppression du dénominateur $(2J_3)^5$, de la transformée canonique F, par la substitution

$$\Delta(CX + C'Y) = 2J_3\xi, \qquad \Delta\sqrt{\Delta}(CX - C'Y) = 2J_3\eta;$$

donc son covariant quadratique proviendra, par la même substitution, du covariant $\sqrt{\Delta}XY$ relatif à F, multiplié par la quatrième puissance du déterminant de la substitution, c'est-à-dire par $(2J_3)^4$. Cela donne pour le covariant quadratique de la forme-type



cette expression remarquable,

$$16J_3^5(\Delta\xi^2 - \eta^2),$$

d'où l'on tire de suite les équations (1).

En recherchant de la même manière le covariant linéaire du cinquième ordre de la forme-type, on obtiendra la valeur

$$120(2J_3)^{13}\xi;$$

mais, d'après la loi générale de formation (Section I), ce covariant sera

$$\begin{aligned}
&2^8 J_3^{10}\left(\Delta^2\frac{d^4\Phi}{d\eta^4} - 2\Delta\frac{d^4\Phi}{d\xi^2\,d\eta^2} + \frac{d^4\Phi}{d\xi^4}\right)\\
&\quad = 120.2^8 J_3^{10}[(A - 2\Delta C + \Delta^2 B')\xi + (B - 2\Delta C' + \Delta^2 A')\eta],
\end{aligned}$$

d'où l'on conclut les relations (2).

Il serait très important, pour la théorie des formes du cinquième degré, de calculer, comme nous venons de le faire, les valeurs d'un plus grand nombre de covariants de la forme-type; on recueillerait ainsi des éléments précieux d'observation qui pourraient éclairer la nature des rapports de ces covariants avec la forme dont ils tirent naissance. Pour le moment, nous ne pouvons nous empêcher d'appeler l'attention du lecteur sur la simplicité des équations que nous venons de trouver entre les coefficients si compliqués de la forme-type; elles vont nous donner une démonstration facile de la proposition suivante, qu'il importe d'établir pour la recherche spéciale que nous avons en vue dans cette Section.

Lemme III. — *L'équation du quatrième degré par rapport à* $J_2$, *qu'on forme en égalant à zéro l'invariant du dix-huitième ordre, a toujours deux racines réelles, et deux racines imaginaires.*

D'après la valeur que nous avons obtenue pour $I^2$, cette équation est

$$\begin{aligned}
16I^2 &= \Delta^5 J_2^2 + 2\Delta^4 J_2 J_3 + \Delta^3(J_3^2 + 6J_2^3) - 18\Delta^2 J_2^2 J_3\\
&\quad + 3\Delta(3J_2^4 - 24J_2 J_3^2) - 24(2J_3^3 + 3J_2^3 J_3) = 0,
\end{aligned}$$

ou, en ordonnant par rapport à $J_2$,

$$\begin{aligned}
&9\Delta J_2^4 + 6(\Delta^3 - 12J_3)J_2^3 + (\Delta^5 - 18\Delta^2 J_3)J_2^2\\
&\quad + (2\Delta^4 J_3 - 72\Delta J_3^2)J_2 + \Delta^3 J_3^2 - 48J_3^3 = 0.
\end{aligned}$$

Elle est, comme on voit, assez compliquée pour qu'on puisse hésiter à y appliquer le théorème de M. Sturm; mais heureusement elle admet une transformée très simple. Effectivement, pour une valeur de $J_2$ qui satisfait à cette équation, les coefficients A, C, B′ donnent, en vertu des équations (1) et (2),

$$AB' + 3C^2 = 16\Delta J_3^5,$$
$$B'C = 4J_3^5,$$
$$A - 2\Delta C + \Delta^2 B' = 32 J_3^3,$$

puisque B, C′, A′, contenant I en facteur, s'annulent. Or, en éliminant A et B′, on trouve

$$3C^4 - 8\Delta J_3^5 C^2 + 128 J_3^8 C - 16\Delta^2 J_3^{10} = 0.$$

Ce résultat paraîtra bien remarquable, si l'on a égard à la complication de la valeur de C exprimée en fonction de $J_2$; quoi qu'il en soit, cette fonction étant rationnelle et entière par rapport à $J_2$, il suffira de raisonner sur l'équation en C, et d'établir qu'elle a bien deux racines réelles et deux racines imaginaires. Or le premier point résulte de ce que le dernier terme est essentiellement négatif, et le second de ce qu'en faisant

$$3C^4 - 8\Delta J_3^5 C^2 + 128 J_3^8 C - 16\Delta^2 J_3^{10} = (a, b, c, b', a')(C, 1)^4,$$

l'invariant du second ordre,

$$aa' - 4bb' + 3c^2,$$

a la valeur négative

$$-\tfrac{128}{3}\Delta^2 J_3^{10} \qquad (\text{Lemme I}).$$

**Des limites entre lesquelles se trouve toujours renfermé l'invariant $J_2$ de toute forme du cinquième degré à coefficients réels.**

La forme-type, à laquelle nous avons ramené la forme générale du cinquième degré par une substitution linéaire, ne contenant plus que trois paramètres, $\Delta$, $J_2$, $J_3$, on est naturellement conduit à étudier les racines de cette forme considérées comme fonctions de ces paramètres, tandis qu'on n'aurait jamais songé à se proposer la même question sur les racines elles-mêmes de la forme primitive, considérées comme fonctions de cinq quantités arbitraires.



Mais, dès l'abord de cette recherche, se présente une circonstance importante. En considérant pour les coefficients de la forme proposée, des valeurs réelles, les paramètres de la forme-type, qu'on ne devra pas déjà supposer imaginaires, ne peuvent même recevoir toutes les valeurs réelles possibles. Il entre, en effet, dans la forme-type, l'invariant I du dix-huitième ordre, qui doit être aussi essentiellement réel, de sorte que (étant algébriquement indépendantes) les quantités $\Delta$, $J_2$, $J_3$, en tant qu'elles proviennent d'une forme réelle, sont assujetties à cette condition de rendre positive la fonction

$$16 I^2 = 9\Delta J_2^4 + 6(\Delta^3 - 12 J_3) J_2^3 + (\Delta^5 - 18\Delta^2 J_3) J_2^2$$
$$+ (2\Delta^4 J_3 - 72\Delta J_3^2) J_2 + \Delta^3 J_3^2 - 48 J_3^3.$$

Or, quels que soient $\Delta$ et $J_3$, nous avons démontré que l'équation $I^2 = 0$, en prenant $J_2$ pour inconnue, avait toujours deux racines réelles et deux racines imaginaires. Nommant donc $j$ et $j'$ ces racines réelles, il est aisé de voir qu'en supposant $\Delta$ positif, les valeurs de $J_2$ qui rendront la fonction I réelle seront nécessairement au dehors de l'intervalle compris entre $j$ et $j'$, tandis qu'en supposant $\Delta$ négatif ces valeurs seront comprises, au contraire, dans le même intervalle. Une observation très simple confirme cette conclusion que $J_2$ est nécessairement limité quand $\Delta$ est négatif; si l'on suppose, en effet, $J_2$ très grand, on trouvera, en employant les expressions données précédemment des coefficients A, B, ..., que la forme $\Phi$ devient sensiblement proportionnelle à $(\xi\sqrt{\Delta} - \eta)^5$, de sorte que les cinq racines se présenteraient toutes comme imaginaires, en devenant égales à la limite, tandis qu'on sait bien que leur commune valeur doit être réelle. Ces limites, que nous venons de trouver pour les valeurs de $J_2$, vont encore se présenter dans une circonstance importante, comme on va voir.

**Des limites entre lesquelles les racines de la forme-type sont des fonctions continues de $J_2$, considéré comme une variable réelle.**

Nous nous fonderons pour cette recherche sur ce théorème si important dans toute l'Analyse, que l'illustre géomètre, M. Cauchy, a démontré sous un point de vue plus général dans les *Nouveaux* *exercices de Mathématiques* (t. II, p. 109) : « Les racines d'une équation algébrique dont les coefficients contiennent, sous forme rationnelle, un paramètre, sont des fonctions continues de ce paramètre, tant qu'en variant suivant une loi donnée, en restant toujours réel, par exemple, il n'atteint pas une des valeurs particulières qui font acquérir des racines égales à l'équation proposée. Mais la quantité $J_2$, que nous considérons comme un paramètre variable entrant dans l'équation que nous voulons étudier, savoir,

$$(A, B, C, C', B', A')(x, 1)^5 = 0,$$

sous un radical carré I, nous ferons $y = Ix$, ce qui donnera l'équation en $y$,

$$(A, IB, I^2C, I^3C', I^4B', I^5A')(y, 1)^5 = 0,$$

dont tous les coefficients sont rationnels, puisque B, C′, A′ contiennent déjà I en facteur. Cela posé, nous allons, pour appliquer le théorème de M. Cauchy, calculer son discriminant. Or le discriminant D, de la forme primitive

$$f = (a, b, c, c', b', a')(x, y)^5,$$

se reproduisant dans toute transformée, multiplié par la vingtième puissance du déterminant de la substitution, on trouvera d'abord $(2J_3)^{20}.D$ pour le discriminant de $\Phi$, et $(2J_3)^{20}.I^{20}.D$, pour celui de l'équation en $y$. Par là nous voyons que les valeurs de $J_2$, pour lesquelles les racines $y$ deviennent discontinues [1], sont données par les équations

$$I = 0, \qquad D = \Delta^2 + 2^7 J_2 = 0.$$

Et comme le radical carré I est aussi fonction continue de $J_2$, entre les limites déterminées par l'équation $I = 0$, la relation $y = Ix$ montre qu'on peut regarder les racines $x$ elles-mêmes comme fonctions continues de $J_2$, tant que cette variable, que nous supposons réelle, n'atteint pas la valeur $-2^{-7}\Delta^2$ ou l'une des quantités nommées précédemment $j$ et $j'$. Peut-être devons-nous faire observer que nous ne considérons pas un autre genre de discontinuité, le passage à l'infini d'une racine, lorsque le coefficient A s'annule. La raison en est que, dans le voisinage d'une valeur

[1] On dirait plutôt aujourd'hui *sont irrégulières*, car il ne s'agit pas ici d'une véritable discontinuité. E. P.



réelle de $J_2$, qui donnerait $A = 0$, les inverses des cinq racines sont certainement des fonctions continues, et ne pourront passer du réel à l'imaginaire, ou de l'imaginaire au réel, lorsque $J_2$ aura atteint et dépassé la valeur particulière en question, en supposant toutefois, comme il arrive en général, que l'on n'a pas en même temps $B = 0$. On voit donc qu'aucun changement dans le mode d'existence des racines de la forme-type, comme quantités réelles et imaginaires, ne correspond à cette discontinuité particulière qui provient du passage par l'infini, et qu'ainsi elle n'est pas à considérer dans notre recherche [1]. »

### Sur les valeurs des racines de la forme-type lorsque $J_2$ est égal à la limite $j$ ou à la limite $j'$.

Nous avons précédemment distingué avec soin, dans l'ensemble des valeurs réelles de $J_2$, les intervalles entre lesquels cette quantité peut être regardée comme provenant d'une forme à coefficients réels. Franchir les limites assignées sera donc considérer ce que deviennent les racines de la forme-type, pour un état imaginaire des coefficients de la forme primitive. Cependant, si nous supposons toujours $J_2$ réel, ces valeurs imaginaires, qui viendront nécessairement s'offrir, ne seront point entièrement arbitraires, et seront soumises à des conditions spéciales. Or on va voir combien est utile la considération de ces valeurs limitées comme nous le disons, de manière que les invariants du quatrième, du huitième et du douzième ordre restent réels, l'invariant du dix-huitième étant seul affecté du facteur $\sqrt{-1}$. Effectivement, nous allons pouvoir suivre de la manière la plus facile et la plus claire comment les racines de la forme-type changent successivement de

[1] Cette considération des inverses des racines sert aussi à établir, quand on recherche la distribution en systèmes circulaires des racines $\nu$ d'une équation de la forme

$$N\nu^m + P\nu^{m-1} + \ldots = 0,$$

N, P, … étant des polynomes entiers en $z$, que ces systèmes subsistent sans altération lorsque le contour décrit par la variable $z$ vient à comprendre un nombre quelconque de points, auxquels correspondent des racines de l'équation $N = 0$. *Voyez* à ce sujet le n° 37 du Mémoire de M. Puiseux intitulé *Recherches sur les Fonctions algébriques* (*Journal de Liouville*, t. XV).

nature en passant du réel à l'imaginaire ou de l'imaginaire au réel, lorsque $J_2$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, et, par suite, établir ce que sont ces racines dans un intervalle donné, résultat important auquel nous n'aurions pu parvenir en renonçant à ces valeurs de paramètre variable qui supposent nécessairement imaginaires les coefficients de la forme proposée. Voici, pour cet objet, les dernières propositions préliminaires que nous avons à démontrer. Je dis d'abord qu'en supposant $D = 0$, on aura

$$2^{32} I^2 = (25\Delta^3 - 3.2^{10} J_3)(25\Delta^3 - 2^{11} J_3)^2.$$

C'est une conséquence immédiate de la formule

$$\frac{I}{\sqrt{\Delta^7}} = ACB'^2 - A'C'B^2 = \frac{48}{5} pq(2p^2 + q^2),$$

donnée Section V. On trouvera, en effet, le résultat annoncé en élevant au carré et remplaçant $p^2$ et $q^2$ par leurs valeurs en $J_3$ et $\Delta$, telles qu'elles résultent des formules de cette Section. Il s'ensuit que, pour $D = 0$, I sera réel ou imaginaire, suivant le signe de la quantité $25\Delta^3 - 3.2^{10} J_3$, et, par conséquent, le discriminant s'évanouira dans l'intervalle des valeurs admises ou des valeurs exclues de $J_2$, suivant que $25\Delta^3 - 3.2^{10} J_3$ sera positif ou négatif. Cela posé, je vais démontrer que si le discriminant ne s'évanouit qu'en dehors des limites $J_2 = j$, $J_2 = j'$, les racines de la forme-type présenteront pour ces deux limites un même nombre de quantités réelles et un même nombre de quantités imaginaires. Deux cas sont à distinguer suivant que $\Delta$ est positif ou négatif. Dans l'un et l'autre, les racines de la forme-type seront certainement entre les limites $j$ et $j'$ des fonctions continues de $J_2$; dans le second cas, les coefficients de l'équation étant réels, le nombre des racines réelles de l'équation ne peut changer entre $j$ et $j'$ que si D s'annule, ce qui n'a pas lieu. Dans le premier cas, on ne peut faire le même raisonnement. C'est donc seulement dans le second cas que notre proposition se trouve immédiatement établie, et, sous ce point de vue, le premier exigerait une discussion que la méthode suivante évite, car il n'y figure plus de considérations de continuité.

Lorsque $I = 0$, nous avons trouvé précédemment les relations

$$(1) \qquad AB' + 3C^2 = 16\Delta J_3^5, \qquad B'C = 4 J_3^5, \qquad A - 2\Delta C + \Delta^2 B' = 32 J_3^3$$



et aussi une équation ne contenant que C, et que nous présenterons sous cette forme

$$(2) \qquad (3C^2 + 4J_3^5\Delta)(C^2 - 4\Delta J_3^5) = -128 J_3^8 C.$$

Cela posé, il s'agit d'en déduire les valeurs des quantités qui déterminent par leurs signes la nature des racines de l'équation

$$(A, 0, C, 0, B', 0)(x, 1)^5 = 0.$$

Or ces quantités sont $25C^2 - 5AB'$, en premier lieu, puis les rapports $\frac{C}{A}$, $\frac{B'}{A}$, mais en leur place il sera préférable de prendre les suivantes

$$5C^2 - AB', \quad AC, \quad AB',$$

ou même celles-ci

$$5C^2 - AB', \quad \frac{5C^2 - AB'}{AB'} \quad \text{et} \quad B'C,$$

ce qui est permis comme on le verra bien facilement. Mais, par l'équation (1), on trouvera

$$5C^2 - AB' = 8(C^2 - 2\Delta J_3^5)$$

et

$$\frac{5C^2 - AB'}{AB'} = 8\,\frac{C^2 - 2\Delta J_3^5}{16\Delta J_3^5 - 3C^2},$$

ce qui nous conduit à déterminer la nature des racines de notre équation par ces deux fonctions très simples

$$u = C^2 - 2\Delta J_3^5, \qquad v = \frac{C^2 - 2\Delta J_3^5}{16\Delta J_3^5 - 3C^2},$$

car il est inutile de considérer la troisième $B'C$, qui conserve absolument la même valeur pour $J_2 = j$, $J_2 = j'$.

Or, en élevant au carré les deux membres de l'équation (2), on introduira partout le carré $C^2$, et une élimination facile alors donnera

$$(3) \qquad (3u + 10\Delta J_3^5)^2(u - 2\Delta J_3^5)^2 = 128^2 J_3^{16}(u + 2\Delta J_3^5),$$

$$(4) \qquad \Delta^3(30v + 5)^2(2v - 1)^2 = 2.32^2 J_3(8v + 1)(3v + 1)^3.$$

Chacune de ces équations aura, comme l'équation en C, deux racines imaginaires et deux racines réelles qui correspondent respectivement à $J_2 = j$, $J_2 = j'$; donc, pour l'une et pour l'autre, les racines réelles seront de mêmes signes ou de signes contraires, suivant que le dernier terme sera positif ou négatif. Or le dernier terme de (3) est

$$\left(\tfrac{4}{3}\right)^2 \Delta J_3^{20} (25\Delta^3 - 2^{11} J_3),$$

après avoir réduit à l'unité le coefficient de $u^4$, et, après avoir réduit à l'unité le coefficient de $v^4$, le dernier terme de (4) devient

$$\frac{25\Delta^3 - 2^{11} J_3}{12^2 [25\Delta^3 - 3.2^{10} J_3]},$$

et que $\Delta$ soit positif ou négatif, il est aisé de voir que ces quantités sont positives. En effet, pour $\Delta > 0$, elles le sont évidemment si $J_3$ est négatif; mais, si $J_3$ est positif, la condition

$$25\Delta^3 - 3.2^{10} J_3 > 0,$$

qui est l'hypothèse, entraîne

$$25\Delta^3 - 2^{11} J_3 > 0,$$

et notre proposition est vérifiée. Enfin, pour $\Delta < 0$, elle est évidente si $J_3$ est positif; mais, si $J_3$ est négatif, l'hypothèse, qui est alors

$$25\Delta^3 - 3.2^{10} J_3 < 0,$$

entraîne

$$25\Delta^3 - 2^{11} J_3 < 0.$$

Donc, aux deux limites $j$ et $j'$, les trois quantités qui déterminent la nature des racines de la forme-type ont individuellement les mêmes signes, et ces racines présentent dans ces deux cas un même nombre de quantités réelles et imaginaires.



### Ce que deviennent successivement les racines de la forme-type lorsque $J_2$ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Nous distinguerons quatre cas principaux dans cette recherche, que nous traiterons dans l'ordre suivant :

Premier cas

$$\Delta > 0, \quad 25\Delta^3 - 3.2^{10} J_3 > 0.$$

Deuxième cas

$$\Delta < 0, \quad 25\Delta^3 - 3.2^{10} J_3 > 0.$$

Troisième cas

$$\Delta > 0, \quad 25\Delta^3 - 3.2^{10} J_3 < 0.$$

Quatrième cas

$$\Delta < 0, \quad 25\Delta^3 - 3.2^{10} J_3 < 0.$$

*Premier cas* (1). — Les valeurs admises de $J_2$ forment alors deux séries, l'une de $-\infty$ à $j$, la seconde de $j'$ à $+\infty$ (en nommant $j$ la plus petite des quantités $j$ et $j'$), et la condition

$$25\Delta^3 - 3.2^{10} J_3 > 0$$

signifie, comme il a été dit plus haut, que le discriminant s'évanouira nécessairement pour une valeur de $J_2$ comprise dans l'une des séries indiquées; nous admettrons, pour fixer les idées, que ce soit dans la première.

Cela posé, faisons croître $J_2$ par degrés insensibles à partir de $-\infty$; tant que le discriminant $D = \Delta^2 + 2^7 J_2$ ne viendra pas à s'annuler, les cinq racines resteront des fonctions continues, et aucun changement ne surviendra dans leur nature. Mais, pour $J_2 = -2^{-7}\Delta^2$, deux d'entre elles et deux seulement deviendront égales; de sorte que, dans le voisinage de cette valeur, elles pourront passer du réel à l'imaginaire ou de l'imaginaire au réel, en devenant discontinues, tandis que les trois autres resteront au contraire des fonctions continues de $J_2$.

(1) Dans la discussion de ce premier cas, M. Hermite s'appuie sur le fait exact, mais dont il n'indique pas la démonstration, que $-2^{-7}\Delta^2$ est dans l'intervalle $-\infty, j$, quand $J_3$ est positif, et dans l'intervalle $j', +\infty$ quand $J_3$ est négatif.

E. P.

En raison de cette circonstance, essayons d'en déterminer la nature. Pour cela, nous nous placerons précisément dans ce cas particulier où $D = 0$. Divisant la forme-type par le facteur linéaire qu'elle contient alors au carré, nous obtiendrons une forme cubique, dont il faudra calculer le discriminant. Mais, dans ce but, nous pouvons remplacer la forme-type $\Phi$ par la transformée canonique F, puisqu'elle s'en déduit en faisant une substitution au déterminant réel $2J_3$. Alors un calcul très facile, qui a été exécuté à la Sect. V (*in finem*), conduit, abstraction faite d'un facteur positif, à la fonction déjà considérée plus haut

$$25\Delta^3 - 2^{11}J_3 \text{ (}^1\text{)}.$$

Il a été remarqué qu'elle était positive dans ce premier cas, où nous nous trouvons maintenant, où l'on a les conditions

$$\Delta > 0, \quad 25\Delta^3 - 3.2^{10}J_3 > 0.$$

Ainsi, de ces trois racines fonctions continues de $J_2$ entre les limites $J_2 = -\infty$, $J_2 = j$, une seule est réelle et les deux autres sont imaginaires. Cela posé, il s'agirait de reconnaître, pour des valeurs de $J_2$ infiniment voisines de $-2^{-7}\Delta^2$, la nature des deux autres racines qui sont égales pour

$$J_2 = -2^{-7}\Delta^2.$$

Cette question rentre dans les principes connus, mais nous pouvons l'éviter en rappelant le premier lemme où il a été établi que la seule condition $D < 0$ assurait l'existence de deux racines imaginaires et de trois racines réelles. Puisqu'il y a dans l'équation deux racines imaginaires quel que soit $J_2$, il faudra que les deux racines qui deviennent égales quand le discriminant s'évanouit soient réelles, tant qu'il est négatif, et passent à l'imaginaire lorsque, après s'être annulé, le discriminant devient positif. Maintenant, $J_2$ continuant à croître, la forme-type offrira toujours quatre racines imaginaires et une racine réelle jusqu'à ce qu'on parvienne à la limite $J_2 = j$, à partir de laquelle on entre dans l'intervalle des valeurs exclues du paramètre. Alors les coefficients qui contiennent

(1) J'ai pris, suivant l'usage, le discriminant d'une forme cubique de signe contraire au produit des carrés des différences des racines de cette forme.



en facteur le radical carré deviennent, dans tout cet intervalle, imaginaires; cependant nous allons encore suivre les racines en les faisant dépendre d'une équation à coefficients réels. Pour cela, faisant dans la proposée

$$(A, B, C, C', B', A')(x, 1)^5 = 0, \qquad y = x\sqrt{-1},$$

nous aurons dans l'intervalle compris entre $j$ et $j'$ la transformée à coefficients réels

$$\left[A, \sqrt{-1}\,B, -C, -\sqrt{-1}\,C', B', \sqrt{-1}\,A'\right](y, 1)^5 = 0.$$

Dans cet intervalle et les limites comprises, les cinq racines $y$ seront fonctions continues de $J_2$; ainsi leur nature dépend de leurs valeurs initiales, par exemple pour $J_2 = j$. Mais il est bien à remarquer qu'alors les quatre racines qui sont imaginaires peuvent avoir leurs parties réelles nulles; deux cas différents peuvent donc se présenter : les valeurs initiales des racines $y$ seront toutes réelles, ou bien quatre d'entre elles seront imaginaires et une seule réelle.

C'est une question curieuse et délicate de reconnaître si les deux cas sont possibles, ou lequel peut seulement avoir lieu. Pour le résoudre, je remarquerai que l'équation en $y$, pour $J_2 = j$ par exemple, est de cette forme

$$(A, 0, -C, 0, B', 0)(y, 1)^5 = 0,$$

et que la quantité $\frac{B'}{A}$ est nécessairement positive. En effet, si elle était négative, on voit bien aisément que cette équation aurait nécessairement deux racines imaginaires et trois racines réelles. Et la même chose a lieu pour $J_2 = j'$, d'où il suit que le signe commun aux deux racines réelles de l'équation en

$$v = \frac{C^2 - 2\Delta J_3^{\frac{5}{3}}}{16\Delta J_3^{\frac{5}{3}} - 3C^2} = \frac{1}{8}\,\frac{5C^2 - AB'}{AB'}$$

sera celui de la quantité $5C^2 - AB'$ aux deux limites. Or l'équation en $v$ a ses deux racines positives, car son premier membre, comme nous l'avons vu, est positif pour $v = 0$, et $J_3$ étant positif, par la substitution, on le trouvera négatif au contraire pour $v = \frac{1}{2}$; donc, nous avons une racine comprise entre zéro et $\frac{1}{2}$, et l'autre racine, qui est nécessairement de même signe, sera donc aussi positive. L'équation

$$Ay^4 - 10Cy^2 + 5B' = 0$$

a donc, par rapport à $y^2$, ses deux racines réelles, et, comme $AB'$ est positif et que $B'C = 4J_3^5$ est aussi positif, ces deux valeurs de $y^2$ seront positives. Ainsi, l'équation en $y$, pour $J_2 = j$ et $J_2 = j'$, a ses racines toutes réelles, et le premier des deux cas dont nous avions admis la possibilité a seul lieu.

Au delà de la limite $J_2 = j'$, les coefficients de l'équation en $x$ redeviennent réels, et dans cette seconde série des valeurs admises du paramètre, jusqu'à $J_2 = +\infty$, les cinq racines restent indéfiniment des fonctions continues, et offrent toujours une quantité réelle et quatre quantités imaginaires dont les valeurs initiales sont les produits du facteur $\sqrt{-1}$ par des quantités réelles.

Enfin, considérons le cas où le discriminant s'évanouit entre les limites $J_2 = +\infty$, $J_2 = j'$, et faisons alors décroître le paramètre variable de $+\infty$ à $-\infty$. Tout à fait comme précédemment, nous trouverons, dans l'intervalle compris entre les limites $+\infty$ et $j'$, trois racines qui seront fonctions continues de $J_2$. Deux d'entre elles seront imaginaires et la troisième réelle, à cause de la condition $25\Delta^3 - 2^{11}J_3 > 0$. Quant aux deux autres, qui deviennent égales quand le discriminant s'évanouit, elles seront imaginaires tant que le discriminant D restera positif, et passeront à l'état réel en devenant irrégulières lorsque D, après s'être annulé, deviendra négatif. Nous parvenons ainsi à la limite $J_2 = j'$, avec deux racines imaginaires et trois racines réelles. Pour suivre ultérieurement les racines, dans l'intervalle des valeurs exclues, de $J_2 = j'$ à $J_2 = j$, nous ferons encore $y = x\sqrt{-1}$, et la transformée à coefficients réels aura dans toute cette étendue ses racines fonctions continues de $J_2$. Quant à leur nature, elle résulte cette fois sans ambiguïté des valeurs initiales, qui offrent trois quantités réelles et deux quantités imaginaires produits du facteur $\sqrt{-1}$ multiplié par des quantités réelles. Nous savons que dans ce cas $J_3$ est nécessairement négatif.

Enfin, lorsque le paramètre décroît de la limite $j$ à $-\infty$, nous retrouvons pour les cinq racines des fonctions continues, parmi lesquelles deux sont imaginaires et les trois autres réelles.



*Deuxième cas.* — Les valeurs admises de $J_2$ forment une seule série de $j$ à $j'$, et la condition

$$25\Delta^3 - 3.2^{10}J_3 > 0$$

signifie que le discriminant s'évanouit dans cet intervalle. Faisant donc croître $J_2$ par degrés insensibles à partir de la limite $j$, tant qu'on n'atteindra pas la valeur $-2^{-7}\Delta^2$, pour laquelle D s'annule, les cinq racines demeureront des fonctions continues, et aucun changement ne surviendra dans leur nature. Mais, pour $D = 0$, deux d'entre elles présenteront alors une irrégularité en devenant égales, tandis que les trois autres resteront des fonctions continues jusqu'à la limite $j'$. En raisonnant comme dans le cas précédent, on verra que la nature de ces trois racines dépend encore de l'expression $25\Delta^3 - 2^{11}J_3$, qui maintenant peut être positive ou négative. Supposons-la d'abord positive; c'est admettre dans l'intervalle compris entre $j$ et $j'$ l'existence de deux racines imaginaires et d'une racine réelle. Donc, tant que le discriminant, avant de s'évanouir, restera négatif, les deux autres racines de l'équation seront réelles et, lorsque D deviendra positif après s'être annulé, elles passeront, en devenant discontinues, à l'état imaginaire. Ainsi donc, dans ce cas, deux racines imaginaires et trois racines réelles à l'origine $J_2 = j$, et quatre racines imaginaires avec une racine réelle à la limite supérieure $J_2 = j'$. Maintenant, si nous faisons encore $y = x\sqrt{-1}$, pour arriver à une transformée à coefficients réels entre les limites $J_2 = j$, $J_2 = -\infty$, d'une part, $J_2 = j'$, $J_2 = +\infty$, de l'autre, il est clair que dans ces deux intervalles les racines $y$ ne présenteront plus aucune discontinuité et demeureront respectivement ce qu'elles sont aux deux origines. Or, pour $J_2 = j$ nous savons avoir, sur les cinq racines $x$, trois quantités réelles et deux imaginaires; donc, il en sera de même pour les racines $y$. Et, puisqu'il en est ainsi, l'expression $5C^2 - AB'$ est positive; alors, nous en conclurons qu'elle sera négative pour $J_2 = j'$, car le dernier terme de l'équation en $u$ étant

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 \Delta J_3^{20} (25\Delta^3 - 2^{11}J_3),$$

à cause de $\Delta < 0$, les deux racines $u$ sont de signes contraires. Donc, les racines $x$ présentant quatre quantités imaginaires pour $J_2 = j'$, il en sera de même des racines $y$.

Supposons en second lieu

$$25\Delta^3 - 2^{11} J_3 < 0;$$

c'est admettre trois racines réelles comme fonctions continues de $j$ à $j'$. Alors les deux autres racines, qui sont égales quand D s'annule, seront imaginaires pour $D < 0$, et deviendront réelles quand D passera à l'état positif. Ainsi, comme tout à l'heure, deux racines imaginaires et trois racines réelles à l'origine $J_2 = j$, mais cinq racines réelles à la limite $J_2 = j'$. Pour ce qui concerne les quantités $y = x\sqrt{-1}$, de $J_2 = j$ à $J_2 = -\infty$, elles seront fonctions continues, et, dans tout cet intervalle, présenteront, comme à l'origine, deux quantités imaginaires et trois réelles. De $J_2 = j'$ à $J_2 = +\infty$, elles seront encore continues, mais une seule sera réelle, les quatre autres imaginaires, et ayant pour valeurs initiales les produits du facteur $\sqrt{-1}$ multiplié par des quantités réelles.

*Troisième cas.* — Les deux derniers cas peuvent se ramener par la considération suivante aux deux premiers.

Concevons que dans la forme-type on change $\Delta$ et $J_3$ en $-\Delta$ et $-J_3$, en conservant $J_2$ avec son signe, on vérifiera que les coefficients A, B, C, C′, B′, A′ deviendront respectivement

$$-A, \quad B\sqrt{-1}, \quad C, \quad -C'\sqrt{-1}, \quad -B', \quad A'\sqrt{-1};$$

donc, en mettant à la place de $x$, $x\sqrt{-1}$, et multipliant encore la transformée par $\sqrt{-1}$, on trouvera exactement le même résultat qu'en changeant les signes des invariants $\Delta$ et $J_3$. Or les conditions caractéristiques des deux derniers cas, savoir

$$\Delta > 0, \quad 25\Delta^3 - 3.2^{10} J_3 < 0 \quad \text{et} \quad \Delta < 0, \quad 25\Delta^3 - 3.2^{10} J_3 < 0,$$

reproduisent, par le changement de signe de $\Delta$ et $J_3$, celles des deux premiers. Ainsi, du second nous allons déduire le troisième, et du premier le quatrième, avec ce seul changement que tout ce qui a été dit des quantités $x$ et $y$ devra être transporté aux quantités $y$ et $x$, $x$ étant toujours l'inconnue de l'équation proposée, et $y$ désignant $x\sqrt{-1}$. Cela donne les conclusions suivantes, en commençant par le troisième cas. Alors les valeurs admises du paramètre forment les deux séries de $-\infty$ à $j$ et de $j'$ à $+\infty$.



Dans la première des cinq racines $x$, deux sont imaginaires et trois réelles; dans la seconde, quatre sont imaginaires, une seule est réelle, et, d'ailleurs, dans les deux séries elles restent toutes fonctions continues du paramètre. Pour les racines $y$, c'est dans l'intervalle compris de $j$ à $j'$ qu'elles dépendent d'une équation à coefficients réels, et deux cas sont à distinguer suivant que $25\Delta^3 - 2^{11} J_3$ est négatif ou positif. Dans le premier, sur les trois racines qui sont fonctions continues de $j$ à $j'$, une est réelle, et deux sont imaginaires. Quant aux deux autres racines qui deviennent discontinues pour $D = 0$, elles sont réelles si D est négatif, et imaginaires lorsque D est positif. Enfin, si $25\Delta^3 - 2^{11} J_3$ est positif, les trois racines qui sont fonctions continues sont réelles, et les deux autres sont imaginaires pour $D < 0$ et réelles pour $D > 0$.

*Quatrième cas.* — *Résumé.* — En nous bornant pour abréger aux racines $x$, on voit qu'elles seront toutes fonctions continues du paramètre dans l'intervalle des valeurs admises qui s'étend de $j$ à $j'$. Maintenant, et d'après ce qui a été dit du premier cas, toutes ces racines seront réelles si $J_3$ est négatif, deux seront imaginaires et les trois autres réelles si $J_3$ est positif. Ici on ne voit plus figurer le discriminant; cependant il est bien facile de vérifier encore que pour $J_3$ négatif il a une valeur positive et pour $J_3$ positif une valeur négative. Effectivement, cette condition $J_3 < 0$ signifie, d'après ce que nous avons vu dans le premier cas, que le discriminant s'évanouit entre les limites $J_2 = -\infty$, $J_2 = j$; or, pour des valeurs croissantes du paramètre, il passe, en s'évanouissant, du négatif au positif, et arrive à l'état positif dans l'intervalle des valeurs admises. Au contraire, si $J_3$ est positif, il s'évanouit entre les limites $J_2 = j'$, $J_2 = +\infty$, et a conséquemment une valeur négative dans l'intervalle compris entre $j$ et $j'$. Dans le troisième cas, le discriminant ne se trouve pas non plus immédiatement en évidence; mais, comme il s'évanouit alors dans l'intervalle compris de $j$ à $j'$, il est clair qu'il est négatif de $J_2 = -\infty$ à $J_2 = j$, et positif de $J_2 = j'$ à $J_2 = +\infty$.

Ces remarques faites, nous pouvons maintenant rapprocher les divers résultats que nous venons d'obtenir; nous formerons ainsi le tableau suivant, qui offre l'expression par les invariants fondamentaux du nombre des racines réelles et imaginaires de l'équation générale du cinquième degré :

$$\Delta^2 + 2^7 J_2 < 0 \ldots,$$

trois racines réelles, deux racines imaginaires;

$$\Delta^2 + 2^7 J_2 > 0 \left\{ \begin{array}{l} \Delta < 0, \quad 25\Delta^3 - 3.2^{10} J_3 < 0, \\ \text{cinq racines réelles;} \\ \Delta < 0, \quad 25\Delta^3 - 3.2^{10} J_3 > 0, \quad 25\Delta^3 - 2^{11} J_3 < 0, \\ \text{cinq racines réelles;} \\ \Delta > 0, \quad \ldots, \\ \text{une racine réelle, quatre imaginaires;} \\ \Delta < 0, \quad 25\Delta^3 - 3.2^{10} J_3 > 0, \quad 25\Delta^3 - 2^{11} J_3 > 0, \\ \text{une racine réelle, quatre imaginaires.} \end{array} \right.$$

On comprend facilement comment dans certains cas le nombre des conditions a pu se réduire. Par exemple, avec $\Delta^2 + 2^7 J_2 > 0$ et $\Delta > 0$, on trouve une racine réelle et quatre racines imaginaires lorsque $25\Delta^3 - 3.2^{10} J_3$ est positif, et aussi lorsqu'il est négatif; on peut donc ne conserver que les deux premières conditions. Enfin, nous remarquerons, dans l'un des cas où il y a cinq racines réelles, que les conditions

$$\Delta < 0, \quad J_3 > 0$$

entraînent la suivante

$$25\Delta^3 - 3.2^{10} J_3 < 0,$$

qu'on pourra supprimer si l'on veut. La simplicité de ces résultats ne semble-t-elle pas indiquer que le théorème de M. Sturm, si beau dans sa généralité, est loin de fournir l'expression définitive des conditions de réalité des racines des équations algébriques?

---



## SECTION VII.

### Sur la réduite du sixième degré de l'équation générale du cinquième degré.

Lagrange a fait voir que la résolution par radicaux de l'équation du cinquième degré dépend, lorsqu'elle est possible, de la détermination d'une racine commensurable, d'une équation du sixième degré dont les coefficients dépendent rationnellement de ceux de la proposée. Mais jamais le calcul de cette réduite du sixième degré n'a été effective en général. La raison en est que les fonctions de cinq lettres les plus simples qui n'ont que six valeurs étant au moins du second degré par rapport à l'une de ces lettres, les coefficients de la réduite se présenteraient comme des fonctions des cinq coefficients de l'équation proposée montant jusqu'au douzième degré, et contiendraient par suite plusieurs centaines de termes. Or on va voir qu'on peut vaincre cette difficulté à l'aide des résultats que nous avons obtenus sur les invariants des formes du cinquième degré. Faisons, en effet,

$$\begin{aligned} f &= (a, b, c, c', b', a')(x, y)^5 \\ &= \alpha(x - \alpha y)(x - \beta y)(x - \gamma y)(x - \delta y)(x - \varepsilon y), \end{aligned}$$

et considérons la fonction suivante des racines

$$\begin{aligned} \mathrm{J} = {} & a^4(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \delta)^2(\delta - \varepsilon)^2(\varepsilon - \alpha)^2. \\ & + a^4(\alpha - \gamma)^2(\beta - \delta)^2(\gamma - \varepsilon)^2(\delta - \alpha)^2(\varepsilon - \beta)^2, \end{aligned}$$

on reconnaîtra bien facilement qu'elle est susceptible seulement de six valeurs, et, en second lieu, qu'elle est un invariant de la forme $f$. Il en résulte que les coefficients de l'équation du sixième degré en $t$ seront des fonctions rationnelles et entières de ces invariants fondamentaux, $\Delta$, $J_2$, $J_3$, car l'invariant du dix-huitième ordre n'y entrera pas, les degrés par rapport aux coefficients de $f$ étant multiples de 4.

Ainsi, qu'on représente cette équation en $t$ par

$$t^6 + (1)\,t^5 + (2)\,t^4 + (3)\,t^3 + (4)\,t^2 + (5)\,t + (6) = 0,$$

(1), (2), etc. seront respectivement des fonctions linéaires des quantités placées en regard dans le tableau suivant :

| | |
|---|---|
| (1) | $\Delta$ |
| (2) | $\Delta^2 \quad J_2$ |
| (3) | $\Delta^3 \quad \Delta J_2 \quad J_3$ |
| (4) | $\Delta^4 \quad \Delta^2 J_2 \quad \Delta J_3 \quad J_2^2$ |
| (5) | $\Delta^5 \quad \Delta^3 J_2 \quad \Delta^2 J_3 \quad \Delta J_2^2 \quad J_2 J_3$ |
| (6) | $\Delta^6 \quad \Delta^4 J_2 \quad \Delta^3 J_3 \quad \Delta^2 J_2^2 \quad \Delta J_2 J_3 \quad J_2^3 \quad J_3^2.$ |

On voit donc qu'on est ainsi amené à un calcul relativement très facile, et que je me réserve de développer dans une autre occasion. J'exposerai alors les propriétés de cette équation en $t$, qui sont analogues à celles de l'équation modulaire pour la transformation du cinquième ordre, sous ce point de vue que les fonctions non symétriques des racines qui s'expriment rationnellement par les coefficients varient ou ne changent pas dans les deux cas par les mêmes permutations de ces racines. Cette équation en $t$ est également intéressante en ce qu'elle offre le type d'une classe d'équations du sixième degré réductibles au cinquième. La propriété distinctive et caractéristique de cette classe d'équations consiste en ce que l'une des valeurs de ces fonctions des racines qui, sans être symétriques par rapport à cinq d'entre elles, n'ont cependant que six déterminations possibles, est alors nécessairement rationnelle.

Je ne terminerai pas ces recherches sur les formes du cinquième degré, sans rappeler que mon ami M. Sylvester avait obtenu avant moi, dans son beau Mémoire sur le calcul des formes, la notion des invariants du quatrième, du huitième et du douzième ordre. En donnant aux formes du cinquième degré cette expression élégante

$$ax^5 + by^5 + cz^5,$$

sous la condition

$$x + y + z = 0,$$

M. Sylvester a trouvé pour ces invariants les valeurs

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - 2abc(a + b + c), \quad a^2b^2c^2(ab + ac + bc), \quad a^4b^4c^4,$$

qui sont des fonctions symétriques très simples des trois éléments $a$, $b$, $c$.



Enfin, l'invariant du dix-huitième ordre, qui joue un rôle si important dans ma théorie, s'est aussi présenté dans ses recherches, élevé au carré et indiquant, lorsqu'il s'évanouit, l'impossibilité de la réduction à la forme citée

$$ax^5 + by^5 + cz^5.$$

Exprimé en $a$, $b$, $c$, il a pour valeur

$$a^5b^5c^5(a - b)(a - c)(b - c),$$

expression encore bien simple, et qui montre sous des points de vue très différents comment on est conduit aux mêmes notions analytiques dans cette vaste et féconde théorie des formes.