SUR LA

THÉORIE DES FORMES QUADRATIQUES.

Journal de Crelle, Tome 47.

PREMIER MÉMOIRE.

La méthode que j'ai exposée dans un précédent article, pour obtenir toutes les transformations en elle-même d'une forme ternaire indéfinie, exige, comme élément analytique essentiel, la connaissance des systèmes d'entiers qui rendent positive la forme adjointe. La nature d'une pareille condition fait bien voir que les transformations *semblables* d'une forme indéfinie impliquent nécessairement dans leurs expressions un nombre *infini* d'entiers arbitraires. Les considérations que nous développerons ici montreront même la possibilité de donner aux formules de transformations une expression qui offre explicitement un nombre infini d'entiers indéterminés. Nous insistons sur ce point, parce qu'il nous semble caractéristique dans la théorie des formes quadratiques. D'autres formes donneront lieu, en effet, à un nombre pareillement infini de substitutions semblables, mais toutes ces substitutions s'expriment avec un nombre essentiellement limité d'entiers arbitraires. Telles sont les formes du $n^{\text{ième}}$ degré, décomposables en n facteurs linéaires, pour lesquelles on a la proposition suivante :

Soit a le nombre des facteurs linéaires réels, b le nombre des couples de facteurs imaginaires conjugués et $\omega+1$ la somme de ces nombres : toutes les substitutions semblables seront données symboliquement par la formule

$$S_1^{m_1} S_2^{m_2} S_3^{m_3} \ldots S_\omega^{m_\omega},$$

où m_1, m_2, ... sont des entiers arbitraires et $S_1, S_2, \ldots, \omega$ substitutions telles qu'aucune d'elles ne puisse s'exprimer par les produits des puissances des autres.

On peut encore démontrer, par rapport à ces formes, qu'en nommant S et T deux substitutions semblables quelconques, on a toujours

$$ST = TS.$$

Au contraire, dans la théorie des formes ternaires indéfinies, une pareille relation n'existe qu'autant que S et T sont les puissances d'une même substitution, auquel cas la relation proposée se vérifie d'elle-même. Nous rappellerons encore que la connaissance d'une transformation semblable d'une forme quadratique ternaire ne définit pas complètement cette forme, de sorte qu'une substitution donnée change en elles-mêmes une infinité de formes ternaires distinctes. Par le théorème suivant on verra, au contraire, comment une forme décomposable en facteurs linéaires est connue, à un facteur près, lorsqu'on donne une de ces transformations en elle-même.

Désignons cette substitution par Σ, et concevons qu'on forme $\Sigma^2, \Sigma^3, \ldots, \Sigma^i$ en représentant par cette notation la même substitution, prise 2, 3, ..., i fois de suite, et, pour fixer les idées, supposons la substitution Σ donnée par les formules

$$\begin{aligned}
x &= aX + a'Y + \ldots + a^{(n-1)}U,\\
y &= bX + b'Y + \ldots + b^{(n-1)}U,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
u &= kX + k'Y + \ldots + k^{(n-1)}U,
\end{aligned}$$

et la substitution Σ^i par les suivantes

$$\begin{aligned}
x_i &= a_iX + a'_iY + \ldots + a_i^{(n-1)}U,\\
y_i &= b_iX + b'_iY + \ldots + b_i^{(n-1)}U,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
u_i &= k_iX + k'_iY + \ldots + k_i^{(n-1)}U.
\end{aligned}$$

En formant le déterminant du système

$$\begin{vmatrix}
X & Y & \ldots & U\\
x & y & \ldots & u\\
x_2 & y_2 & \ldots & u_2\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
x_{n-1} & y_{n-1} & \ldots & u_{n-1}
\end{vmatrix},$$

on aura, à un facteur numérique près, la forme en $X, Y, \ldots, U$, décomposable en facteurs linéaires, et que la susbtitution Σ change en elle-même. Je me réserve de démontrer prochainement ces théorèmes, sur la forme décomposable en facteurs. Le dernier exige qu'aucune puissance de la substitution Σ ne puisse donner la substitution identique

$$x = X, \qquad y = Y, \qquad \ldots, \qquad u = U.$$

Ces exemples de la grande différence que l'on doit établir entre la théorie des formes quadratiques et celle des formes décomposables en facteurs, au point de vue de la recherche des substitutions semblables, ajoutent encore, ce me semble, à l'intérêt de la question difficile que nous avons abordée pour le cas des formes ternaires. En se bornant d'abord en quelque sorte au point de vue algébrique, on est conduit à plusieurs théorèmes qui nous ont paru dignes d'intérêt, et que nous exposerons avec détail. Nous donnerons ensuite un nouveau développement aux considérations arithmétiques déjà présentées dans notre premier article.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

L'analyse que j'ai exposée précédemment dans le *Journal de Crelle* donne sous la forme suivante, au moyen de trois indéterminées λ, μ, ν, l'expression de toutes les substitutions qui changent en elle-même une forme quadratique ternaire. Posons, en conservant les mêmes notations,

$$\begin{aligned} f &= ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}, \\ \Delta &= ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - 2bb'b'' - aa'a'', \end{aligned}$$

et représentons la forme adjointe par

$$g = \begin{pmatrix} b^2 - a'a'', & b'^2 - aa'', & b''^2 - aa' \\ ab - b'b'', & a'b' - bb'', & a''b'' - bb' \end{pmatrix}.$$

Nous aurons souvent besoin d'employer la valeur de g lorsqu'on

met λ, μ, ν pour la première, la deuxième et la troisième indéterminée; nous la désignerons par γ, de sorte que

$$\gamma = g(\lambda, \mu, \nu),$$

et nous posons enfin

$$\Pi = \lambda X + \mu Y + \nu Z.$$

Cela étant, on aura identiquement

$$f(x, y, z) = f(X, Y, Z),$$

en prenant

$$(1)\quad \begin{cases} (1-\gamma)x = (1+\gamma)X + \mu \dfrac{df}{dZ} - \nu \dfrac{df}{dY} - \dfrac{d\gamma}{d\lambda}\Pi, \\ (1-\gamma)y = (1+\gamma)Y + \nu \dfrac{df}{dX} - \lambda \dfrac{df}{dZ} - \dfrac{d\gamma}{d\mu}\Pi, \\ (1-\gamma)z = (1+\gamma)Z + \lambda \dfrac{df}{dY} - \mu \dfrac{df}{dX} - \dfrac{d\gamma}{d\nu}\Pi. \end{cases}$$

On peut le démontrer directement de la manière suivante :

Déduisons en premier lieu des formules (1) les valeurs des trois fonctions linéaires $\dfrac{df}{dx}, \dfrac{df}{dy}, \dfrac{df}{dz}$; on trouvera sans peine

$$(2)\quad \begin{cases} (1-\gamma)\dfrac{df}{dx} = (1+\gamma)\dfrac{df}{dX} + 2\left(Y\dfrac{d\gamma}{d\nu} - Z\dfrac{d\gamma}{d\mu}\right) - 4\lambda\Delta\Pi, \\ (1-\gamma)\dfrac{df}{dy} = (1+\gamma)\dfrac{df}{dY} + 2\left(Z\dfrac{d\gamma}{d\lambda} - X\dfrac{d\gamma}{d\nu}\right) - 4\mu\Delta\Pi, \\ (1-\gamma)\dfrac{df}{dz} = (1+\gamma)\dfrac{df}{dZ} + 2\left(X\dfrac{d\gamma}{d\mu} - Y\dfrac{d\gamma}{d\lambda}\right) - 4\nu\Delta\Pi, \end{cases}$$

et nous allons en conclure l'identité

$$(1-\gamma)^2\left(x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} + z\frac{df}{dz}\right) = (1-\gamma)^2\left(X\frac{df}{dX} + Y\frac{df}{dY} + Z\frac{df}{dZ}\right).$$

Multipliant à cet effet, membre à membre, les deux premières équations de (1) et (2), nous disposerons de la manière suivante les divers termes du produit

$$\begin{aligned} (1-\gamma)^2 x\frac{df}{dx} = {} & 2(1+\gamma)X\left(Y\frac{d\gamma}{d\nu} - Z\frac{d\gamma}{d\mu}\right) + (1+\gamma)\frac{df}{dX}\left(\mu\frac{df}{dZ} - \nu\frac{df}{dY}\right) \\ & - 4\lambda\Pi\Delta\left(\mu\frac{df}{dZ} - \nu\frac{df}{dY}\right) - 2\frac{d\gamma}{d\lambda}\Pi\left(Y\frac{d\gamma}{d\nu} - Z\frac{d\gamma}{d\mu}\right) \\ & + (1+\gamma)^2 X\frac{df}{dX} + 2\left(\mu\frac{df}{dZ} - \nu\frac{df}{dY}\right)\left(Y\frac{d\gamma}{d\nu} - Z\frac{d\gamma}{d\mu}\right) \\ & + 4\lambda\frac{d\gamma}{d\lambda}\Delta\Pi^2 - 4(1+\gamma)\Delta\lambda X\Pi - (1+\gamma)\frac{d\gamma}{d\lambda}\frac{df}{dX}\Pi, \end{aligned}$$

et nous concevons qu'on ait opéré de même pour les produits

$$(1-\gamma)^2 y\,\frac{df}{dy},\qquad (1-\gamma)^2 z\,\frac{df}{dz}.$$

Or, en ajoutant membre à membre les équations ainsi formées, on va voir se présenter diverses sommes partielles de termes dont l'évaluation est très facile. Considérons d'abord le premier terme mis en évidence dans $(1-\gamma)^2 x\,\dfrac{df}{dx}$, savoir :

$$2(1+\gamma)\,X\left(Y\,\frac{d\gamma}{d\nu}-Z\,\frac{d\gamma}{d\mu}\right);$$

ses analogues dans les valeurs de

$$(1-\gamma)^2 y\,\frac{df}{dy}\quad\text{et}\quad(1-\gamma)^2 z\,\frac{df}{dz}$$

seront

$$2(1+\gamma)\,Y\left(Z\,\frac{d\gamma}{d\lambda}-X\,\frac{d\gamma}{d\nu}\right)\quad\text{et}\quad 2(1+\gamma)\,Z\left(X\,\frac{d\gamma}{d\mu}-Y\,\frac{d\gamma}{d\lambda}\right),$$

et leur somme, que nous désignerons par le signe Σ mis devant le premier terme, s'exprime évidemment par un déterminant à trois colonnes, de sorte qu'on a

$$\Sigma\,2(1+\gamma)\,X\left(Y\,\frac{d\gamma}{d\nu}-Z\,\frac{d\gamma}{d\mu}\right)=2(1+\gamma)\begin{vmatrix} X, & X, & \dfrac{d\gamma}{d\lambda}\\[2mm] Y, & Y, & \dfrac{d\gamma}{d\mu}\\[2mm] Z, & Z, & \dfrac{d\gamma}{d\nu}\end{vmatrix}=0,$$

puisque deux colonnes du déterminant sont identiques. Or, on trouvera de même

$$\Sigma(1+\gamma)\,\frac{df}{dX}\left(\mu\,\frac{df}{dZ}-\nu\,\frac{df}{dY}\right)=(1+\gamma)\begin{vmatrix} \dfrac{df}{dX}, & \dfrac{df}{dX}, & \lambda\\[2mm] \dfrac{df}{dY}, & \dfrac{df}{dY}, & \mu\\[2mm] \dfrac{df}{dZ}, & \dfrac{df}{dZ}, & \nu\end{vmatrix}=0,$$

$$\Sigma\,4\lambda\,\Pi\Delta\left(\mu\,\frac{df}{dZ}-\nu\,\frac{df}{dY}\right)=4\,\Pi\Delta\begin{vmatrix} \lambda, & \lambda, & \dfrac{df}{dX}\\[2mm] \mu, & \mu, & \dfrac{df}{dY}\\[2mm] \nu, & \nu, & \dfrac{df}{dZ}\end{vmatrix}=0$$

et

$$\Sigma\Pi\,\frac{d\gamma}{d\lambda}\left(Y\,\frac{d\gamma}{d\nu}-Z\,\frac{d\gamma}{d\mu}\right)=\Pi\begin{vmatrix} \dfrac{d\gamma}{d\lambda}, & \dfrac{d\gamma}{d\lambda}, & X\\[2mm] \dfrac{d\gamma}{d\mu}, & \dfrac{d\gamma}{d\mu}, & Y\\[2mm] \dfrac{d\gamma}{d\nu}, & \dfrac{d\gamma}{d\nu}, & Z\end{vmatrix}=0.$$

Maintenant, il est à évaluer cinq autres sommes partielles dont aucune ne s'évanouit plus. On a d'abord

$$\Sigma(1+\gamma)^2 X\,\frac{df}{dX}=(1+\gamma)^2\left(X\,\frac{df}{dX}+Y\,\frac{df}{dY}+Z\,\frac{df}{dZ}\right).$$

Pour calculer ensuite

$$\Sigma\,2\left(\mu\,\frac{df}{dZ}-\nu\,\frac{df}{dY}\right)\left(Y\,\frac{d\gamma}{d\nu}-Z\,\frac{d\gamma}{d\mu}\right),$$

on emploiera une formule élémentaire de la théorie des déterminants qui exprime une somme de produits de déterminants à deux colonnes par un déterminant qui est lui-même à deux colonnes. En ayant aussi égard à la relation suivante, qui est facile à démontrer,

$$\frac{d\gamma}{d\lambda}\,\frac{df}{dX}+\frac{d\gamma}{d\mu}\,\frac{df}{dY}+\frac{d\gamma}{d\nu}\,\frac{df}{dZ}=4\Delta(\lambda X+\mu Y+\nu Z),$$

on trouvera

$$\Sigma\,2\left(\mu\,\frac{df}{dZ}-\nu\,\frac{df}{dY}\right)\left(Y\,\frac{d\gamma}{d\nu}-Z\,\frac{d\gamma}{d\mu}\right)=8\Delta\Pi^2-4\gamma\left(X\,\frac{df}{dX}+Y\,\frac{df}{dY}+Z\,\frac{df}{dZ}\right);$$

enfin, il viendra immédiatement

$$\Sigma\,4\lambda\,\frac{d\gamma}{d\lambda}\,\Delta\Pi^2=8\gamma\,\Delta\Pi^2,$$

$$\Sigma\,4(1+\gamma)\,\Delta\lambda X\Pi=4(1+\gamma)\,\Delta\Pi^2,$$

$$\Sigma(1+\gamma)\,\frac{d\gamma}{d\lambda}\,\frac{df}{dX}\,\Pi=4(1+\gamma)\,\Delta\Pi^2,$$

et, en ajoutant et réduisant, on obtiendra finalement, comme nous l'avons annoncé,

$$(1-\gamma)^2\left(X\,\frac{df}{dX}+Y\,\frac{df}{dY}+Z\,\frac{df}{dZ}\right),$$

de sorte qu'on a identiquement

$$f(x,y,z)=f(X,Y,Z).$$

Nous allons maintenant donner quelques conséquences de ces formules que nous venons de démontrer, pour la transformation en elle-même d'une forme ternaire.

II.

La première de ces conséquences est le théorème exprimé par l'égalité

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \lambda X + \mu Y + \nu Z,$$

et que nous avons précédemment fait connaître. Nous y joindrons la remarque suivante :

Selon que la substitution par laquelle f se change en elle-même est au déterminant $+1$ ou -1, il existe une fonction linéaire que la même substitution reproduit identiquement ou reproduit changée de signe.

III.

En mettant en évidence les indéterminées X, Y, Z, dans les formules (1), de sorte qu'elles deviennent

$$\begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z, \\ y &= bX + b'Y + b''Z, \\ z &= cX + c'Y + c''Z, \end{aligned}$$

les racines de l'équation du troisième degré que l'on forme en égalant à zéro le déterminant du système

$$\begin{vmatrix} a-t & a' & a'' \\ b & b'-t & b'' \\ c & c' & c''-t \end{vmatrix}$$

seront

$$t = 1, \qquad t = \frac{1-\sqrt{\gamma}}{1+\sqrt{\gamma}}, \qquad t = \frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}}.$$

Ainsi l'on voit que cette équation est *réciproque*, comme nous l'avons déjà dit.

IV.

En formant l'expression

$$x + \frac{1}{2}\left(\nu\frac{df}{dy} - \mu\frac{df}{dz}\right),$$

on trouvera qu'elle reproduit une expression de même nature en X, Y, Z, mais où les signes de μ et ν sont changés, de sorte qu'on obtient

$$x + \frac{1}{2}\left(\nu\frac{df}{dy} - \mu\frac{df}{dz}\right) = X - \frac{1}{2}\left(\nu\frac{df}{dY} - \mu\frac{df}{dZ}\right),$$

et l'on trouvera de même

$$\begin{aligned} y + \frac{1}{2}\left(\lambda\frac{df}{dz} - \nu\frac{df}{dx}\right) &= Y - \frac{1}{2}\left(\lambda\frac{df}{dZ} - \nu\frac{df}{dX}\right), \\ z + \frac{1}{2}\left(\mu\frac{df}{dx} - \lambda\frac{df}{dy}\right) &= Z - \frac{1}{2}\left(\mu\frac{df}{dX} - \lambda\frac{df}{dY}\right). \end{aligned}$$

Ces formules montrent qu'en désignant par S la substitution (1), S^{-1} se déduira immédiatement de S, en y changeant λ, μ, ν de signe.

V.

Faisons suivre S d'une nouvelle substitution S′, où l'on aurait mis λ', μ', ν' au lieu de λ, μ, ν. La substitution composée SS′ changeant f en elle-même sera nécessairement comprise dans la même forme analytique que S et S′, et devra se déduire des formules (1), en mettant au lieu de λ, μ, ν des quantités $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, fonctions de λ, μ, ν et de λ', μ', ν'. Or voici l'expression de ces quantités :

Posons

$$l = \mu\nu' - \nu\mu', \qquad m = \nu\lambda' - \lambda\nu', \qquad n = \lambda\mu' - \mu\lambda',$$

$$\begin{aligned} L &= al + b''m + b'n = \frac{1}{2}\frac{df}{dl}, \\ M &= b''l + a'm + bn = \frac{1}{2}\frac{df}{dm}, \\ N &= b'l + bm + a''n = \frac{1}{2}\frac{df}{dn}, \end{aligned}$$

et

$$\Gamma = \frac{1}{2}\left(\lambda'\frac{d\gamma}{d\lambda} + \mu'\frac{d\gamma}{d\mu} + \nu'\frac{d\gamma}{d\nu}\right),$$

on aura

$$\mathfrak{L} = \frac{\lambda + \lambda' + \mathrm{L}}{1 + \Gamma},$$

$$\mathfrak{M} = \frac{\mu + \mu' + \mathrm{M}}{1 + \Gamma},$$

$$\mathfrak{N} = \frac{\nu + \nu' + \mathrm{N}}{1 + \Gamma}.$$

Ainsi, les fonctions linéaires que les substitutions S et S′ changent en elles-mêmes étant

$$\lambda x + \mu y + \nu z \quad \text{et} \quad \lambda' x + \mu' y + \nu' z,$$

la fonction linéaire que reproduit la substitution composée SS′ sera

$$\mathfrak{L}x + \mathfrak{M}y + \mathfrak{N}z,$$

ou, en omettant le facteur numérique $\frac{1}{1+\Gamma}$,

$$(\lambda x + \mu y + \nu z) + (\lambda' x + \mu' y + \nu' z) + (\mathrm{L}x + \mathrm{M}y + \mathrm{N}z).$$

C'est ce qu'on peut, comme on va voir, établir directement.

D'après le théorème (IV) définissons la substitution S par les équations

$$(3)\quad \begin{cases} x + \frac{1}{2}\left(\nu \frac{df}{dy} - \mu \frac{df}{dz}\right) = \mathrm{X} - \frac{1}{2}\left(\nu \frac{df}{d\mathrm{Y}} - \mu \frac{df}{d\mathrm{Z}}\right), \\ y + \frac{1}{2}\left(\lambda \frac{df}{dz} - \nu \frac{df}{dx}\right) = \mathrm{Y} - \frac{1}{2}\left(\lambda \frac{df}{d\mathrm{Z}} - \nu \frac{df}{d\mathrm{X}}\right), \\ z + \frac{1}{2}\left(\mu \frac{df}{dx} - \lambda \frac{df}{dy}\right) = \mathrm{Z} - \frac{1}{2}\left(\mu \frac{df}{d\mathrm{X}} - \lambda \frac{df}{d\mathrm{Y}}\right), \end{cases}$$

et la substitution S′ par les relations analogues

$$(4)\quad \begin{cases} \mathrm{X} + \frac{1}{2}\left(\nu' \frac{df}{d\mathrm{Y}} - \mu' \frac{df}{d\mathrm{Z}}\right) = \mathrm{U} - \frac{1}{2}\left(\nu' \frac{df}{d\mathrm{V}} - \mu' \frac{df}{d\mathrm{W}}\right), \\ \mathrm{Y} + \frac{1}{2}\left(\lambda' \frac{df}{d\mathrm{Z}} - \nu' \frac{df}{d\mathrm{X}}\right) = \mathrm{V} - \frac{1}{2}\left(\lambda' \frac{df}{d\mathrm{W}} - \nu' \frac{df}{d\mathrm{U}}\right), \\ \mathrm{Z} + \frac{1}{2}\left(\mu' \frac{df}{d\mathrm{X}} - \lambda' \frac{df}{d\mathrm{Y}}\right) = \mathrm{W} - \frac{1}{2}\left(\mu' \frac{df}{d\mathrm{U}} - \lambda' \frac{df}{d\mathrm{V}}\right), \end{cases}$$

de sorte que SS′ s'obtienne, en éliminant X, Y, Z, et exprimant x, y, z en U, V, W.

Posons ensuite, pour abréger,

$$\begin{aligned} \pi &= \lambda x + \mu y + \nu z, & \varpi &= \lambda \mathrm{X} + \mu \mathrm{Y} + \nu \mathrm{Z}, & \Pi &= \lambda \mathrm{U} + \mu \mathrm{V} + \nu \mathrm{W}, \\ \pi' &= \lambda' x + \mu' y + \nu' z, & \varpi' &= \lambda' \mathrm{X} + \mu' \mathrm{Y} + \nu' \mathrm{Z}, & \Pi' &= \lambda' \mathrm{U} + \mu' \mathrm{V} + \nu' \mathrm{W}, \\ \varphi &= \mathrm{L}x + \mathrm{M}y + \mathrm{N}z, & \psi &= \mathrm{LX} + \mathrm{MY} + \mathrm{NZ}, & \Phi &= \mathrm{LU} + \mathrm{MV} + \mathrm{NW}; \end{aligned}$$

nous obtiendrons immédiatement la relation

$$\pi' + \varphi = \varpi' - \psi,$$

en ajoutant les équations (3) respectivement multipliées, la première par λ', la seconde par μ' et la troisième par ν'. Si l'on opère de même sur les équations (4) avec λ, μ, ν, il viendra

$$\varpi - \psi = \Pi + \Phi.$$

Or on a à la fois

$$\pi = \varpi,$$

$$\varpi' = \Pi';$$

on en conclut la relation proposée, savoir :

$$\pi + \pi' + \varphi = \Pi + \Pi' + \Phi.$$

VI.

La substitution composée SS′ peut être définie par trois relations linéaires entre π, π', φ et Π, Π', Φ. Posons, à cet effet,

$$\gamma' = g(\lambda', \mu', \nu')$$

et

$$\begin{aligned} (1 - \gamma')\pi &= p, & (1 - \gamma)\Pi' &= -\mathrm{P}, \\ (1 - \gamma)\pi' + 2(1 + \Gamma)\pi &= q, & (1 - \gamma')\Pi + 2(1 + \Gamma)\Pi' &= -\mathrm{Q}, \\ 2(\pi + \pi' + \varphi) &= r, & 2(\Pi + \Pi' + \Phi) &= -\mathrm{R}; \end{aligned}$$

on aura les équations suivantes :

$$p = \mathrm{Q} - \mathrm{R},$$

$$q = \mathrm{P} - \mathrm{R},$$

$$r = \quad - \mathrm{R}.$$

Nous remarquerons encore le résultat de la substitution des variables π, π', φ aux variables x, y, z dans la forme ternaire proposée. En posant en premier lieu

$$\begin{aligned}\lambda x + \mu y + \nu z &= \pi,\\ \lambda' x + \mu' y + \nu' z &= \pi',\\ \mathrm{L}x + \mathrm{M}y + \mathrm{N}z &= \varphi,\end{aligned}$$

on a identiquement

$$f(x, y, z)\, f(l, m, n) = \varphi^2 - \gamma'\pi^2 + 2\Gamma\pi\pi' - \gamma\pi'^2.$$

On trouvera encore

$$g(x, y, z) = \Delta f(l, m, n)\,\zeta^2 + \gamma\xi^2 + 2\Gamma\xi\eta + \gamma'\eta^2,$$

en employant la substitution transposée

$$\begin{aligned}x &= \lambda\xi + \lambda'\eta + \mathrm{L}\zeta,\\ y &= \mu\xi + \mu'\eta + \mathrm{M}\zeta,\\ z &= \nu\xi + \nu'\eta + \mathrm{N}\zeta.\end{aligned}$$

D'ailleurs, la forme

$$\begin{vmatrix} \gamma, & \gamma', & \Delta f(l, m, n) \\ 0, & 0, & \Gamma \end{vmatrix}$$

est l'adjointe de

$$\begin{vmatrix} -\gamma', & -\gamma, & 1 \\ 0, & 0, & \Gamma \end{vmatrix}.$$

VII.

Les propositions précédentes peuvent être présentées sous un autre point de vue, comme se rattachant à la théorie de la composition des formes. Elles nous semblent offrir, en effet, les premiers exemples de l'extension de la théorie, donnée par M. Gauss pour les formes binaires, aux formes quadratiques d'un plus grand nombre d'indéterminées. Concevons qu'au lieu des formules (1) on prenne les suivantes, où l'on a supprimé le dénominateur et introduit une nouvelle indéterminée ρ, de sorte qu'elles deviennent homogènes relativement à λ, μ, ν, ρ, savoir :

$$\begin{aligned}x &= (\rho^2 + \gamma)\,\mathrm{X} + \rho\left(\mu\frac{df}{d\mathrm{Z}} - \nu\frac{df}{d\mathrm{Y}}\right) - \frac{d\gamma}{d\lambda}\,\Pi,\\ y &= (\rho^2 + \gamma)\,\mathrm{Y} + \rho\left(\nu\frac{df}{d\mathrm{X}} - \lambda\frac{df}{d\mathrm{Z}}\right) - \frac{d\gamma}{d\mu}\,\Pi,\\ z &= (\rho^2 + \gamma)\,\mathrm{Z} + \rho\left(\lambda\frac{df}{d\mathrm{Y}} - \mu\frac{df}{d\mathrm{X}}\right) - \frac{d\gamma}{d\nu}\,\Pi;\end{aligned}$$

on aura

$$f(x, y, z) = f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})\,[\rho^2 - g(\lambda, \mu, \nu)]^2.$$

Ainsi toute forme ternaire est composée d'elle-même et du carré de la forme quaternaire $\rho^2 - g(\lambda, \mu, \nu)$. Nous joindrons à ce théorème les résultats suivants, qui dépendent des mêmes principes. Faisons, pour abréger,

$$\begin{aligned}\xi &= \mu\mathrm{Z} - \nu\mathrm{Y},\\ \eta &= \nu\mathrm{X} - \lambda\mathrm{Z},\\ \zeta &= \lambda\mathrm{Y} - \mu\mathrm{X},\end{aligned}$$

$$\mathfrak{G} = \lambda\frac{dg}{d\mathrm{X}} + \mu\frac{dg}{d\mathrm{Y}} + \nu\frac{dg}{d\mathrm{Z}};$$

la substitution

$$\begin{aligned}x &= (\rho^2 + \gamma)\,\mathrm{X} + \rho\frac{df}{d\xi} - \lambda\mathfrak{G},\\ y &= (\rho^2 + \gamma)\,\mathrm{Y} + \rho\frac{df}{d\eta} - \mu\mathfrak{G},\\ z &= (\rho^2 + \gamma)\,\mathrm{Z} + \rho\frac{df}{d\zeta} - \nu\mathfrak{G}\end{aligned}$$

donnera identiquement

$$g(x, y, z) = g(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})\,[\rho^2 - g(\lambda, \mu, \nu)]^2.$$

Soit encore

$$\mathfrak{F} = \lambda\frac{df}{d\mathrm{X}} + \mu\frac{df}{d\mathrm{Y}} + \nu\frac{df}{d\mathrm{Z}},$$

$$\varphi = f(\lambda, \mu, \nu).$$

En posant

$$\begin{aligned}x &= (\varphi + \Delta\rho^2)\,\mathrm{X} + \rho\frac{dg}{d\xi} - \lambda\mathfrak{F},\\ y &= (\varphi + \Delta\rho^2)\,\mathrm{Y} + \rho\frac{dg}{d\eta} - \mu\mathfrak{F},\\ z &= (\varphi + \Delta\rho^2)\,\mathrm{Z} + \rho\frac{dg}{d\zeta} - \nu\mathfrak{F},\end{aligned}$$

on aura

$$f(x, y, z) = f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})\,[\Delta\rho^2 - f(\lambda, \mu, \nu)]^2.$$

Ce dernier résultat, conséquence immédiate du précédent, offre sous une forme analytique nouvelle les expressions générales des substitutions semblables pour les formes ternaires ; on les déduira sans peine, d'ailleurs, des formules (1). Enfin, on trouvera

$$g(x, y, z) = g(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})\,[\Delta\rho^2 - f(\lambda, \mu, \nu)]^2,$$

en employant la substitution

$$x = (\varphi + \Delta\rho^2)\,\mathrm{X} + \rho\left(\mu\,\frac{dg}{d\mathrm{Z}} - \nu\,\frac{dg}{d\mathrm{Y}}\right) - \frac{d\varphi}{d\lambda}\,\Pi,$$
$$y = (\varphi + \Delta\rho^2)\,\mathrm{Y} + \rho\left(\nu\,\frac{dg}{d\mathrm{X}} - \lambda\,\frac{dg}{d\mathrm{Z}}\right) - \frac{d\varphi}{d\mu}\,\Pi,$$
$$z = (\varphi + \Delta\rho^2)\,\mathrm{Z} + \rho\left(\lambda\,\frac{dg}{d\mathrm{Y}} - \mu\,\frac{dg}{d\mathrm{X}}\right) - \frac{d\varphi}{d\nu}\,\Pi.$$

VIII.

L'étude des formes quaternaires de déterminant carré, qui viennent se présenter dans les théorèmes précédents, savoir :

$$\rho^2 - g(\lambda, \mu, \nu) \quad \text{et} \quad \Delta\rho^2 - f(\lambda, \mu, \nu),$$

conduira à d'importantes notions arithmétiques. Dans un autre travail nous essayerons d'approfondir la nature de ces formes, qui nous paraissent devoir offrir une nouvelle application de l'idée ingénieuse des *nombres idéaux* de M. Kummer. Elles donnent lieu effectivement aux théorèmes de composition que nous allons énoncer, et dont on trouvera sans peine la démonstration par ce qui précède. Posons

$$\mathfrak{L} = \lambda\rho' + \lambda'\rho + \mathrm{L},$$
$$\mathfrak{M} = \mu\rho' + \mu'\rho + \mathrm{M},$$
$$\mathfrak{N} = \nu\rho' + \nu'\rho + \mathrm{N},$$
$$\mathfrak{R} = \rho\rho' + \Gamma,$$

où L, M, N, Γ ont la signification donnée (§ V). On aura identiquement

$$\mathfrak{R}^2 - g(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = [\rho^2 - g(\lambda, \mu, \nu)]\,[\rho'^2 - g(\lambda', \mu', \nu')].$$

En second lieu, faisons

$$\mathfrak{L} = \lambda\rho' + \frac{1}{2}\left(\mu'\,\frac{df}{d\nu} - \nu'\,\frac{df}{d\mu}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{dg}{d\lambda'}\,\rho,$$
$$\mathfrak{M} = \mu\rho' + \frac{1}{2}\left(\nu'\,\frac{df}{d\lambda} - \lambda'\,\frac{df}{d\nu}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{dg}{d\mu'}\,\rho,$$
$$\mathfrak{N} = \nu\rho' + \frac{1}{2}\left(\lambda'\,\frac{df}{d\mu} - \mu'\,\frac{df}{d\lambda}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{dg}{d\nu'}\,\rho,$$
$$\mathfrak{R} = \rho\rho' + \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu';$$

on aura

$$\Delta\mathfrak{R}^2 - f(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = [\Delta\rho^2 - f(\lambda, \mu, \nu)]\,[\rho'^2 - g(\lambda', \mu', \nu')].$$

Ces deux théorèmes comprennent, comme cas particuliers, ceux d'Euler et de Lagrange, sur le produit de deux sommes de quatre carrés, ou de deux fonctions de la forme

$$x^2 + ay^2 + bz^2 + abu^2.$$

IX.

Nous avons déjà dit qu'en désignant par S et S′ deux substitutions semblables quelconques on ne pouvait avoir la relation

$$\mathrm{SS'} = \mathrm{S'S}$$

qu'en supposant S et S′ exprimables par les puissances d'une même substitution. C'est ce qu'on peut établir de la manière suivante :

D'après le théorème du § V, si l'on désigne par λ, μ, ν ; λ', μ', ν' les quantités qui déterminent les substitutions S et S′, et par $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ celles qui déterminent la substitution composée S, S′, on aura

$$\mathfrak{L} = \frac{\lambda + \lambda' + \mathrm{L}}{1 + \Gamma},$$
$$\mathfrak{M} = \frac{\mu + \mu' + \mathrm{M}}{1 + \Gamma},$$
$$\mathfrak{N} = \frac{\nu + \nu' + \mathrm{N}}{1 + \Gamma}.$$

Cela étant, si l'on permute simultanément λ et λ', μ et μ', ν et ν' de manière à obtenir les quantités analogues à $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ pour la substitution S′S, on trouvera immédiatement que ces quantités ne diffèrent des précédentes que par les signes de L, M, N. La condition SS′ = S′S entraîne donc les relations

$$\mathrm{L} = 0, \quad \mathrm{M} = 0, \quad \mathrm{N} = 0$$

et, par suite, celles-ci :

$$l = 0, \quad m = 0, \quad n = 0,$$

puisque le déterminant relatif aux trois fonctions linéaires L, M, N est essentiellement différent de zéro. Or les valeurs de l, m, n font voir que λ, μ, ν sont aussi respectivement proportionnelles à λ', μ', ν'; la proposition annoncée revient donc à celle-ci :

Toutes les substitutions semblables où λ, μ, ν sont proportionnels à trois nombres constants se réduisent aux puissances d'une seule substitution.

Pour le faire voir, observons en premier lieu que ces quantités λ, μ, ν ont nécessairement des valeurs *rationnelles*, si la substitution est à coefficients entiers. Nous pouvons donc supposer en général

$$\lambda = k\alpha, \qquad \mu = k\beta, \qquad \nu = k\gamma,$$

λ, μ, ν étant trois entiers constants sans diviseurs communs, et k un facteur rationnel arbitraire. Cela posé, prenons six autres membres α', β', γ'; α'', β'', γ'', de telle sorte que le déterminant du système

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

soit l'unité; en faisant

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z &= u, \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z &= v, \\ \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z &= w, \end{aligned}$$

la forme ternaire proposée $f(x, y, z)$ se changera en une forme équivalente que nous désignerons par $F(u, v, w)$ et dont les substitutions semblables se déduiront immédiatement de celles de la proposée. Désignons, en effet, spécialement par S les transformations semblables de f, où α, β, γ sont supposés constants; k étant seul variable, les transformations semblables correspondantes de F seront données par la formule symbolique

$$\Sigma S \Sigma^{-1},$$

où Σ est la substitution employée ci-dessus, entre les variables x, y, z et u, v, w. Or il suffira de prouver que $\Sigma S \Sigma^{-1}$ est de la forme T^n; car de l'équation

$$\Sigma S \Sigma^{-1} = T^n$$

on tirera, comme on le voit, bien facilement

$$S = \Sigma^{-1} T^n \Sigma = (\Sigma^{-1} T \Sigma)^n.$$

Or, comme nous l'avons remarqué dans notre premier article, les transformations semblables de $F(u, v, w)$, données par la formule $\Sigma S \Sigma^{-1}$, sont caractérisées en ce que la fonction linéaire que ces transformations reproduisent est simplement la variable u. Appliquant donc cette forme F aux formules générales (1), nous y devrons faire μ et ν nuls, pour en déduire l'expression particulière des transformations $\Sigma S \Sigma^{-1}$. On trouvera ainsi, en supposant $F(u, v, w) = \begin{pmatrix} A, A', A'' \\ B, B', B'' \end{pmatrix}$ et l'adjointe $= \begin{pmatrix} \mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'' \\ \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'' \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} u &= U, \\ v &= \frac{(1 - 2B\lambda + \mathfrak{A}\lambda^2)V - 2A''\lambda W - 2(B'\lambda + \mathfrak{B}''\lambda^2)U}{1 - \mathfrak{A}\lambda^2}, \\ w &= \frac{2A'\lambda V + (1 + 2B\lambda + \mathfrak{A}\lambda^2)W + 2(B''\lambda - \mathfrak{B}'\lambda^2)U}{1 - \mathfrak{A}\lambda^2}; \end{aligned}$$

et c'est là le type des substitutions que nous devons ramener à la forme T^n. Observons à cet effet qu'en y supposant nulles les variables u et U, elles doivent fournir les substitutions semblables de la forme binaire

$$A'v^2 + 2Bvw + A''w^2.$$

Cela nous conduit à faire

$$\frac{1 + \mathfrak{A}\lambda^2}{1 - \mathfrak{A}\lambda^2} = p, \qquad \frac{2\lambda}{1 - \mathfrak{A}\lambda^2} = q,$$

p et q vérifiant l'équation

$$p^2 - \mathfrak{A}q^2 = 1.$$

Or il vient ainsi

$$\begin{aligned} u &= U, \\ v &= (p - Bq)V - A''qW - \left(B'q + \frac{(p-1)\mathfrak{B}''}{\mathfrak{A}}\right)U, \\ w &= A'qV + (p + Bq)W + \left(B''q - \frac{(p-1)\mathfrak{B}'}{\mathfrak{A}}\right)U; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}w - \mathfrak{B}'u + (B''u + A'v + Bw)\sqrt{\mathfrak{A}} \\ &\quad = (p + q\sqrt{\mathfrak{A}})[\mathfrak{A}W - \mathfrak{B}'U + (B''U + A'V + BW)\sqrt{\mathfrak{A}}] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}w - \mathfrak{B}'u - (B''u + A'v + Bw)\sqrt{\mathfrak{A}} \\ &\quad = (p - q\sqrt{\mathfrak{A}})[\mathfrak{A}W - \mathfrak{B}'U - (B''U + A'V + BW)\sqrt{\mathfrak{A}}]. \end{aligned}$$

Mais on sait qu'on peut faire

$$p + q\sqrt{\mathfrak{A}} = (\mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{\mathfrak{A}})^n,$$

les entiers P et Q étant les moindres nombres qui vérifient la condition

$$\mathrm{P}^2 - \mathfrak{A}\mathrm{Q}^2 = 1.$$

La substitution considérée étant donc définie par les équations

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{U}, \\ \mathfrak{A}w - \mathfrak{B}'u &+ (\mathrm{B}''u + \mathrm{A}'v + \mathrm{B}w)\sqrt{\mathfrak{A}} \\ &= (\mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{\mathfrak{A}})^n[\mathfrak{A}\mathrm{W} - \mathfrak{B}'\mathrm{U} + (\mathrm{B}''\mathrm{U} + \mathrm{A}'\mathrm{V} + \mathrm{BW})\sqrt{\mathfrak{A}}], \\ \mathfrak{A}w - \mathfrak{B}'u &- (\mathrm{B}''u + \mathrm{A}'v + \mathrm{B}w)\sqrt{\mathfrak{A}} \\ &= (\mathrm{P} - \mathrm{Q}\sqrt{\mathfrak{A}})^n[\mathfrak{A}\mathrm{W} - \mathfrak{B}'\mathrm{U} - (\mathrm{B}''\mathrm{U} + \mathrm{A}'\mathrm{V} + \mathrm{BW})\sqrt{\mathfrak{A}}], \end{aligned}$$

il est évident qu'elle résulte de la substitution particulière pour laquelle $n = 1$, prise n fois successivement.

X.

L'expression générale des transformations semblables donnée au § I peut être présentée sous une forme analytique bien différente, en cherchant à mettre en évidence les fonctions qui se reproduisent à un facteur constant près, comme nous venons d'être conduit à le faire. On y parvient aisément de la manière suivante :

Désignons par λ', μ', ν' trois quantités entièrement arbitraires, et employons les mêmes notations qu'au § V, pour désigner des expressions analytiques de même forme, savoir :

$$\begin{aligned} \pi &= \lambda x + \mu y + \nu z, & \Pi &= \lambda \mathrm{X} + \mu \mathrm{Y} + \nu \mathrm{Z}, \\ \pi' &= \lambda' x + \mu' y + \nu' z, & \Pi' &= \lambda' \mathrm{X} + \mu' \mathrm{Y} + \nu' \mathrm{Z}, \\ \varphi &= \mathrm{L}x + \mathrm{M}y + \mathrm{N}z, & \Phi &= \mathrm{LX} + \mathrm{MY} + \mathrm{NZ}; \end{aligned}$$

nous trouverons d'abord, en ajoutant les équations (1), après les avoir respectivement multipliées par λ', μ', ν',

$$(1 - \gamma)\pi' = (1 + \gamma)\Pi' - 2\Phi - 2\Gamma\Pi.$$

En second lieu, nous déduirons des équations (2) les suivantes :

$$\begin{aligned} (1-\gamma)\left(\mu\frac{df}{dz} - \nu\frac{df}{dy}\right) &= (1+\gamma)\left(\mu\frac{df}{d\mathrm{Z}} - \nu\frac{df}{d\mathrm{Y}}\right) + 4\gamma\mathrm{X} - 2\frac{d\gamma}{d\lambda}\Pi, \\ (1-\gamma)\left(\nu\frac{df}{dx} - \lambda\frac{df}{dz}\right) &= (1+\gamma)\left(\nu\frac{df}{d\mathrm{X}} - \lambda\frac{df}{d\mathrm{Z}}\right) + 4\gamma\mathrm{Y} - 2\frac{d\gamma}{d\mu}\Pi, \\ (1-\gamma)\left(\lambda\frac{df}{dy} - \mu\frac{df}{dx}\right) &= (1+\gamma)\left(\lambda\frac{df}{d\mathrm{Y}} - \mu\frac{df}{d\mathrm{X}}\right) + 4\gamma\mathrm{Z} - 2\frac{d\gamma}{d\nu}\Pi. \end{aligned}$$

Puis, en les ajoutant après les avoir multipliées, la première par λ', la seconde par μ', la troisième par ν', il viendra

$$(1 - \gamma)\varphi = (1 + \gamma)\Phi - 2\gamma\Pi' + 2\Gamma\Pi.$$

Ainsi, l'introduction des quantités arbitraires λ', μ', ν' nous conduit à cette transformation remarquable des équations (1), savoir :

$$\begin{aligned} \pi &= \Pi, \\ (1-\gamma)\pi' &= -2\Gamma\Pi + (1+\gamma)\Pi' - 2\Phi, \\ (1-\gamma)\varphi &= 2\Gamma\Pi - 2\gamma\Pi' + (1+\gamma)\Phi; \end{aligned}$$

et nous en conclurons en dernier lieu les relations suivantes, auxquelles nous voulions parvenir et qu'on vérifiera facilement :

$$\begin{aligned} \pi &= \Pi, \\ \gamma\pi' - \Gamma\pi + \varphi\sqrt{\gamma} &= \frac{1 - \sqrt{\gamma}}{1 + \sqrt{\gamma}}(\gamma\Pi' - \Gamma\Pi + \Phi\sqrt{\gamma}), \\ \gamma\pi' - \Gamma\pi - \varphi\sqrt{\gamma} &= \frac{1 + \sqrt{\gamma}}{1 - \sqrt{\gamma}}(\gamma\Pi' - \Gamma\Pi - \Phi\sqrt{\gamma}). \end{aligned}$$

Il est digne de remarque que les coefficients de la forme ternaire, les quantités λ, μ, ν, qui définissent la substitution par laquelle cette forme se change en elle-même, et enfin les quantités entièrement arbitraires λ', μ', ν' ne figurent plus dans les coefficients de ces nouvelles relations que par les deux constantes γ et Γ.

XI.

Les théorèmes de compositions relatifs aux formes quaternaires

$$\rho^2 - g(\lambda, \mu, \nu) \quad \text{et} \quad \Delta\rho^2 - f(\lambda, \mu, \nu),$$

donnés au § VIII, ont été déduits des expressions générales pour les transformations semblables des formes ternaires. Réciproquement, on peut obtenir ces expressions générales comme conséquence des théorèmes du § VIII par la méthode suivante :

Considérons le produit des trois facteurs

$$[\rho^2 - g(\lambda, \mu, \nu)][\rho'^2 - g(\lambda', \mu', \nu')][\rho''^2 - g(\lambda'', \mu'', \nu'')],$$

mis sous la forme

$$\mathfrak{R}^2 - g(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

Pour obtenir les valeurs de $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}$ nous poserons

$$\delta = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ \mu & \mu' & \mu'' \\ \nu & \nu' & \nu'' \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} l &= \mu'\nu'' - \nu'\mu'', & l' &= \mu''\nu - \nu''\mu, & l'' &= \mu\nu' - \nu\mu', \\ m &= \nu'\lambda'' - \lambda'\nu'', & m' &= \nu''\lambda - \lambda''\nu, & m'' &= \nu\lambda' - \lambda\nu', \\ n &= \lambda'\mu'' - \mu'\lambda'', & n' &= \lambda''\mu - \mu''\lambda, & n'' &= \lambda\mu' - \mu\lambda'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= \frac{1}{2}\frac{df}{dl}, & \mathrm{L}' &= \frac{1}{2}\frac{df'}{dl'}, & \mathrm{L}'' &= \frac{1}{2}\frac{df''}{dl''}, \\ \mathrm{M} &= \frac{1}{2}\frac{df}{dm}, & \mathrm{M}' &= \frac{1}{2}\frac{df'}{dm'}, & \mathrm{M}'' &= \frac{1}{2}\frac{df''}{dm''}, \\ \mathrm{N} &= \frac{1}{2}\frac{df}{dn}, & \mathrm{N}' &= \frac{1}{2}\frac{df'}{dn'}, & \mathrm{N}'' &= \frac{1}{2}\frac{df''}{dn''}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2}\left(\lambda''\frac{d\gamma'}{d\lambda'} + \mu''\frac{d\gamma'}{d\mu'} + \nu''\frac{d\gamma'}{d\nu'}\right), \\ \Gamma' &= \frac{1}{2}\left(\lambda\frac{d\gamma''}{d\lambda''} + \mu\frac{d\gamma''}{d\mu''} + \nu\frac{d\gamma''}{d\nu''}\right), \\ \Gamma'' &= \frac{1}{2}\left(\lambda'\frac{d\gamma}{d\lambda} + \mu'\frac{d\gamma}{d\mu} + \nu'\frac{d\gamma}{d\nu}\right), \end{aligned}$$

où l'on a mis, pour abréger,

$$f, \; f', \; f''; \qquad \gamma, \; \gamma', \; \gamma''$$

pour

$$f(l, m, n), \; f(l', m', n'), \; f(l'', m'', n''); \; g(\lambda, \mu, \nu), \; g(\lambda', \mu', \nu'), \; g(\lambda'', \mu'', \nu'').$$

Cela étant, on aura les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= (\rho\rho'\lambda'' + \rho'\rho''\lambda + \rho''\rho\lambda') + (\rho\mathrm{L} - \rho'\mathrm{L}' + \rho''\mathrm{L}'') + (\lambda\Gamma - \lambda'\Gamma' + \lambda''\Gamma''), \\ \mathfrak{M} &= (\rho\rho'\mu'' + \rho'\rho''\mu + \rho''\rho\mu') + (\rho\mathrm{M} - \rho'\mathrm{M}' + \rho''\mathrm{M}'') + (\mu\Gamma - \mu'\Gamma' + \mu''\Gamma''), \\ \mathfrak{N} &= (\rho\rho'\nu'' + \rho'\rho''\nu + \rho''\rho\nu') + (\rho\mathrm{N} - \rho'\mathrm{N}' + \rho''\mathrm{N}'') + (\nu\Gamma - \nu'\Gamma' + \nu''\Gamma''), \\ \mathfrak{R} &= (\rho\rho'\rho'' + \rho\Gamma + \rho'\Gamma' + \rho''\Gamma'' + \Delta\delta). \end{aligned}$$

Maintenant faisons

$$\lambda'' = -\lambda, \qquad \mu'' = -\mu, \qquad \nu'' = -\nu, \qquad \rho'' = \rho;$$

on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= \mathrm{L}'', & \mathrm{L}' &= 0, \\ \Gamma &= -\Gamma'', & \Gamma' &= -g(\lambda, \mu, \nu); \end{aligned}$$

et, le déterminant δ s'évanouissant, la valeur de $\mathfrak{R}$ deviendra

$$\mathfrak{R} = \rho'[\rho^2 - g(\lambda, \mu, \nu)].$$

L'équation

$$\mathfrak{R}^2 - g(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = [\rho^2 - g(\lambda, \mu, \nu)][\rho'^2 - g(\lambda', \mu', \nu')][\rho''^2 - g(\lambda'', \mu'', \nu'')]$$

se réduisant donc à la suivante :

$$\rho'^2[\rho^2 - g(\lambda, \mu, \nu)]^2 - g(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = [\rho^2 - g(\lambda, \mu, \nu)]^2[\rho'^2 - g(\lambda', \mu', \nu')],$$

donnera

$$g(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = g(\lambda', \mu', \nu')[\rho^2 - g(\lambda, \mu, \nu)]^2,$$

et l'on en conclura

$$g\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}}, \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}, \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{R}}\right) = g\left(\frac{\lambda'}{\rho'}, \frac{\mu'}{\rho'}, \frac{\nu'}{\rho'}\right).$$

D'ailleurs on obtient pour $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= (\rho^2 + \gamma)\lambda' + 2\rho\mathrm{L} - 2\lambda\Gamma'', \\ \mathfrak{M} &= (\rho^2 + \gamma)\mu' + 2\rho\mathrm{M} - 2\mu\Gamma'', \\ \mathfrak{N} &= (\rho^2 + \gamma)\nu' + 2\rho\mathrm{N} - 2\nu\Gamma''; \end{aligned}$$

de sorte que l'on retrouve ainsi l'un des théorèmes donnés au § VII. Mais il y a une autre conséquence à déduire des considérations précédentes.

Nommons respectivement S, S', S'' les transformations semblables de la forme ternaire f, qui sont définies par les quantités $\frac{\lambda}{\rho}, \frac{\mu}{\rho}, \frac{\nu}{\rho}; \frac{\lambda'}{\rho'}, \frac{\mu'}{\rho'}, \frac{\nu'}{\rho'}; \frac{\lambda''}{\rho''}, \frac{\mu''}{\rho''}, \frac{\nu''}{\rho''}$; les quantités analogues par lesquelles sera déterminée la substitution composée S S' S'' seront évidemment $\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}}, \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}, \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{R}}$. Or l'hypothèse admise précédemment, savoir :

$$\frac{\lambda''}{\rho''} = -\frac{\lambda}{\rho}, \qquad \frac{\mu''}{\rho''} = -\frac{\mu}{\rho}, \qquad \frac{\nu''}{\rho''} = -\frac{\nu}{\rho},$$

revient à supposer la substitution S'' l'inverse de la substitution S (*voir* § IV) : donc toute substitution, telle que

$$\mathrm{S}\,\mathrm{S}'\,\mathrm{S}^{-1},$$

se tire de S′, en y remplaçant $\frac{\lambda'}{\rho'}, \frac{\mu'}{\rho'}, \frac{\nu'}{\rho'}$ par trois fonctions linéaires de ces quantités qui donnent précisément une transformation en elle-même de la forme adjointe.

SECONDE PARTIE.

Nous venons de résumer tout ce que nous avons pu jusqu'à présent tirer de l'étude algébrique des formules générales de substitution par lesquelles une forme ternaire quelconque se change en elle-même. Si nous nous sommes un peu étendus sur ces considérations, c'est dans l'espoir de les lier un jour par de nouvelles recherches à l'étude arithmétique des substitutions semblables, que nous avons entreprises sous un point de vue si différent en le faisant dépendre de la réduction continuelle d'une forme ternaire définie à paramètres variables. Afin qu'on puisse mieux saisir ce qu'il y a de général dans ce point de vue, nous réunirons ici les deux questions de l'équivalence des formes décomposables en facteurs linéaires, et de l'équivalence des formes quadratiques indéfinies, traitées par le même principe arithmétique. Dans d'autres Mémoires nous donnerons les démonstrations des théorèmes que nous allons énoncer, désirant surtout en ce moment appeler l'attention du lecteur sur l'identité de la méthode appliquée à des genres de formes d'une nature si différente.

I.

Deux formes sont dites *équivalentes* lorsqu'on peut obtenir l'une d'elles en faisant dans l'autre une substitution linéaire et homogène, à coefficients entiers et au déterminant *un*. C'est en cela du moins que consiste l'*équivalence arithmétique*. En admettant des quantités quelconques pour les coefficients de la substitution, on aura la notion de ce qu'on peut appeler l'*équivalence algébrique*. Dans le cas des formes quadratiques à un nombre quelconque n d'indéterminées, et des formes du $n^{\text{ième}}$ degré, décomposables en

n facteurs linéaires, un seul et même fait analytique très simple déroule de cette notion. Ces formes, en effet, sont toujours algébriquement équivalentes; les premières comme réductibles à une somme de n carrés $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2$, les secondes comme réductibles à un produit de n variables $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. De là résulte, pour ces deux genres de formes, l'existence d'un seul *invariant,* c'est-à-dire d'une seule fonction des coefficients, qui la reproduit dans une transformée obtenue par une substitution algébrique, multipliée par une puissance donnée du déterminant de cette substitution. S'il s'agit d'une forme quadratique à n indéterminées $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$, nous définirons cet invariant comme le déterminant du système linéaire

$$\frac{1}{2}\frac{df}{dx_0},\quad \frac{1}{2}\frac{df}{dx_1},\quad \frac{1}{2}\frac{df}{dx_2},\quad \ldots,\quad \frac{1}{2}\frac{df}{dx_{n-1}}.$$

Pour une forme décomposable en facteurs linéaires

$$\mathrm{F} = u_0 u_1 u_2 \ldots u_{n-1},$$

où l'on suppose

$$u_i = a_i x_0 + b_i x_1 + c_i x_2 + \ldots + k_i x_{n-1},$$

nous le définirons comme le carré du déterminant relatif aux fonctions

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_{n-1}.$$

Dans ces deux cas l'invariant, que nous désignerons par Δ, se reproduira dans toute transformée, multiplié par le carré du déterminant de la substitution.

II.

On peut particulariser la nature de l'équivalence algébrique de deux formes, en exigeant que les coefficients de la substitution soient des quantités réelles. Sous ce point de vue, les formes dont nous nous occupons n'offrent plus une seule espèce chacune, et, en supposant leurs coefficients des quantités réelles, on a les propositions suivantes :

1° Les formes du $n^{\text{ième}}$ degré, décomposables en n facteurs linéaires, sont réductibles par des substitutions algébriques réelles, à $\frac{1}{2}(n+1)$ ou $\frac{1}{2}(n+2)$ types distincts, suivant que n est *impair* ou *pair*. L'un de ces types est encore le produit $x_0 x_1 \ldots x_{n-1}$ des variables, et les autres s'obtiendront en groupant deux à deux les indéterminées, et remplaçant successivement le produit des indéterminées d'un même groupe par la somme de leurs carrés. Nous les nommerons en général *types factoriels,* et le nombre des facteurs d'un type, qui seront formés d'une somme de deux carrés, sera l'*indice* de ce type.

2° Les formes quadratiques à n indéterminées sont réductibles par des substitutions réelles à $n+1$ types distincts, dont l'un est la somme $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2$ des carrés des indéterminées, les autres s'en déduisant en faisant précéder du signe *moins* le carré de l'une, de deux, etc. ou de toutes les indéterminées. Nous nommerons *indice* d'un type quadratique le nombre des carrés qui sont ainsi précédés du signe *moins*.

La proposition relative à l'équivalence réelle des formes décomposables en facteurs revient à la notion élémentaire des racines réelles ou imaginaires des équations algébriques; celle qui concerne les formes quadratiques, à la distinction géométrique des diverses courbes ou surfaces du second degré, dans les cas de trois ou quatre indéterminées.

III.

Les considérations précédentes impliquent ce théorème : *que deux types différents ne peuvent être identifiés par aucune substitution réelle ;* elles conduisent aussi à la recherche des conditions qui doivent être remplies par une forme pour qu'elle soit réductible à un type donné. Pour les formes quadratiques, M. Cauchy a donné l'expression suivante de ces conditions. Soient $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ la forme proposée, Δ_i l'invariant de la forme à i indéterminées, qu'on obtient en faisant

$$x_i = 0, \quad x_{i+1} = 0, \quad x_{i+2} = 0, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = 0;$$

le nombre des termes négatifs de la suite

$$\Delta_1, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

donnera immédiatement l'indice du type auquel appartient la forme proposée. Le premier terme Δ_1 est le coefficient de x_0^2, et il faut remarquer que, si l'une des quantités Δ, Δ_i, par exemple, vient à s'évanouir, on devra considérer les deux termes $\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$ et $\frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}}$ comme donnant, l'un un signe *plus* et l'autre un signe *moins*. Remarquons qu'en appliquant la même règle à une transformée de f les quantités $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ changent toutes en général, mais de manière que le nombre des termes positifs et négatifs de la nouvelle suite soit exactement le nombre des termes positifs et négatifs de l'ancienne.

IV.

Un premier point de contact entre la théorie des formes décomposables en facteurs et la théorie des formes quadratiques consiste en ce que la connaissance des caractères propres aux divers types quadratiques, que fournit si simplement la méthode de M. Cauchy, suffit pour arriver à la distinction des types factoriels. Soit, en effet,

$$F = u_0 u_1 \ldots u_{n-1}$$

la forme proposée, u_i désignant la même chose qu'au § I; il est aisé de voir que les coefficients de la forme quadratique

$$\varphi = \left(\frac{u_0}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{u_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{a_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{u_{n-1}}{a_{n-1}}\right)^2$$

s'exprimeront rationnellement par ceux de F. *Or le type factoriel de* F *et le type quadratique de* φ *ont précisément même indice.* Alors, si l'un des deux détermine l'autre, j'ajouterai la remarque suivante :

Soit ω une fonction rationnelle quelconque des quantités

$$\frac{b}{a}, \quad \frac{c}{a}, \quad \ldots, \quad \frac{k}{a},$$

et faisons

$$\omega_i = \theta\left(\frac{b_i}{a_i}, \frac{c_i}{a_i}, \ldots, \frac{k_i}{a_i}\right);$$

quelle que soit l'indéterminée z, les coefficients de la forme

$$f = \frac{1}{z-\omega_0}\left(\frac{u_0}{a_0}\right)^2 + \frac{1}{z-\omega_1}\left(\frac{u_1}{a_1}\right)^2 + \frac{1}{z-\omega_2}\left(\frac{u_2}{a_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{z-\omega_{n-1}}\left(\frac{u_{n-1}}{a_{n-1}}\right)^2$$

s'exprimeront encore rationnellement par ceux de F, où l'indice du type quadratique auquel appartient cette nouvelle forme sera l'indice du type factoriel de F, augmenté du nombre des quantités ω qui sont supérieures à z. Ainsi le nombre des quantités ω qui sont comprises entre deux limites z_0 et z_1 sera déterminé par la différence entre l'indice du type quadratique f pour $z = z_0$ et l'indice du type quadratique de la même forme pour $z = z_1$.

V.

Arrivons maintenant à la question de l'équivalence arithmétique de deux formes décomposables en facteurs, et des transformations semblables de ces formes. Cette recherche, que nous allons rapprocher de celle qui est relative aux formes quadratiques indéfinies, repose sur les principes suivants :

Désignons par $\operatorname{mod}^2 u$ le carré du module d'un facteur linéaire quelconque de F, c'est-à-dire le carré de ce facteur, s'il est *réel*, ou le produit qu'on obtient en le multipliant par le facteur conjugué s'il est *imaginaire*. Nous considérons en même temps avec F la forme quadratique définie

$$\varphi = \lambda_0^2 \operatorname{mod}^2 u_0 + \lambda_1^2 \operatorname{mod}^2 u_1 + \lambda_2^2 \operatorname{mod}^2 u_2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2 \operatorname{mod}^2 u_{n-1},$$

où les quantités λ sont des indéterminées réelles quelconques auxquelles nous donnerons le nom d'*arguments,* et nous aurons les propositions qui suivent :

1° Concevant qu'on calcule toutes les substitutions propres à réduire φ, pour toutes les valeurs des arguments, et qu'on fasse chacune de ces substitutions dans F, on obtiendra ainsi une infinité de transformées dont nous désignerons l'ensemble par le symbole (F). Cela étant, si l'on opère de même sur une autre forme F', et que F et F' soient arithmétiquement équivalentes, (F) et (F') seront *identiques*. L'opération de réduction est faite ici dans le sens que je lui ai donné dans la troisième de mes Lettres à M. Jacobi sur la théorie des nombres.

2° En supposant entiers les coefficients de F, ceux des formes contenues dans (F) le seront pareillement, et auront des limites

déterminées par une seule fonction des coefficients de F, à savoir l'invariant Δ.

3° Si l'on désigne par $\mathfrak{f}$ l'une des formes de (F), il n'y aura aucune transformation semblable de $\mathfrak{f}$ qui ne soit donnée par le calcul arithmétique de (F) tel que nous l'avons défini.

4° Toutes les formes F, à coefficients entiers et de même invariant Δ, sont réductibles à un nombre fini de classes distinctes. Une application de cette dernière conséquence, que nous allons indiquer en peu de mots, conduit à une notion importante sur les racines des équations à coefficients entiers.

Soit

$$\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \ldots + \delta x + \varepsilon = \alpha(x - a_0)(x - a_1)\ldots(x - a_{n-1}) = 0$$

une équation à coefficients entiers de degré n. Représentons par Δ cette fonction entière des coefficients α, β, ... à laquelle les Géomètres anglais ont donné le nom de *discriminant,* et qu'on peut définir ainsi

$$\Delta = \alpha^{2(n-1)}(a_0 - a_1)^2(a_1 - a_2)^2\ldots(a_{n-2} - a_{n-1})^2,$$

le second membre renfermant le produit des carrés des différences des racines prises deux à deux. Si l'on pose

$$u_i = x_0 + a_i x_1 + a_i^2 x_2 + \ldots + a_i^{n-1} x_{n-1},$$

et qu'on considère la forme

$$\mathrm{F} = \alpha^{n-1} u_0 u_1 u_2 \ldots u_{n-1},$$

les coefficients de cette forme seront tous entiers; et, d'après la définition que nous avons donnée, son invariant reproduira précisément le discriminant Δ. Observant donc que deux équations différentes, donnant lieu à des formes F arithmétiquement équivalentes, sont réductibles l'une à l'autre par une substitution rationnelle, on arrivera à ce théorème :

Les équations numériques, en nombre infini, pour lesquelles le discriminant a une même valeur, ne contiennent qu'un nombre essentiellement limité d'irrationnalités distinctes.

VI.

Considérons actuellement une forme quadratique quelconque *indéfinie* et à n indéterminées. Cette forme appartiendra à un type d'indice i, différent de zéro ; de sorte qu'on pourra trouver d'une infinité de manières n fonctions linéaires réelles, $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, telles qu'on ait

$$F = -u_0^2 - u_1^2 - \ldots - u_{i-1}^2 + u_i^2 + u_{i+1}^2 + \ldots + u_{n-1}^2.$$

Supposons d'abord connu un seul système de pareilles fonctions : tous les autres s'obtiendront en posant

$$\begin{aligned} &-u_0^2 - u_1^2 - \ldots - u_{i-1}^2 + u_i^2 + u_{i+1}^2 + \ldots + u_{n-1}^2 \\ &= -U_0^2 - U_1^2 - \ldots - U_{i-1}^2 + U_i^2 + U_{i+1}^2 + \ldots + U_{n-1}^2 \end{aligned}$$

et en déterminant l'expression la plus générale des quantités U par les quantités u. Cela revient à la recherche algébrique des substitutions semblables du type quadratique d'indice i. Or la méthode donnée dans mon premier article sur les formes ternaires s'applique à des formes d'un nombre quelconque d'indéterminées, et conduira à exprimer rationnellement cette substitution au moyen de $\frac{1}{2}n(n-1)$ quantités arbitraires ([1]). Nous leur donnerons le nom d'*arguments*, car on va voir qu'elles jouent le même rôle que les quantités λ du § V.

En effet, nous considérons, en même temps que la forme indéfinie proposée F, la forme définie

$$\varphi = U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_{n-1}^2,$$

et nous aurons les propositions suivantes :

1° Concevant qu'on calcule toutes les substitutions propres à réduire φ, pour toutes les valeurs des arguments, et qu'on fasse chacune de ces substitutions dans F, on obtiendra ainsi une infi-

([1]) On pourrait, sans recourir à ma théorie, déduire ces expressions de celles qu'a données M. Cayley, pour le type d'indice zéro. Voyez, dans le *Journal de Crelle*, le beau Mémoire, sur les déterminants gauches, du savant géomètre anglais.

nité de transformées dont nous désignerons l'ensemble par le symbole (F). Cela fait, si deux formes F et F′ sont arithmétiquement équivalentes, (F) et (F′) seront identiques.

2° En supposant entiers les coefficients de F, ceux des formes contenues dans (F) le seront pareillement, et auront des limites déterminées par une seule fonction des coefficients de F, l'invariant Δ. Un exemple des limitations de ces coefficients a été donné dans mon premier article, pour le cas des formes ternaires.

3° Si l'on désigne par $\mathfrak{f}$ l'une des formes de (F), il n'y aura aucune transformation de $\mathfrak{f}$ en elle-même qui ne soit donnée par le calcul arithmétique de (F), tel qu'il a été défini.

4° Toutes les formes quadratiques à coefficients entiers, qui appartiennent au même type et ont même invariant Δ, sont réductibles à un nombre fini de classes distinctes.

Depuis l'année 1847, où je rencontrais les principes de la réduction des formes définies, j'ai cherché à plusieurs reprises la démonstration rigoureuse de ce dernier théorème, et je ne suis parvenu qu'après bien des efforts à la théorie qu'on vient de voir. Il me reste à montrer comment, pour les formes binaires de déterminant positif qui appartiennent en même temps aux formes quadratiques indéfinies et aux formes décomposables en facteurs linéaires, on est conduit au même résultat en appliquant les principes relatifs à ces deux cas.

Ayant fait

$$F = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = (ax + by)(a'x + b'y) = uu',$$

nous aurons d'abord cette expression par le type quadratique binaire d'indice *un*, savoir :

$$F = \nu^2 - \nu'^2,$$

en posant

$$u + u' = 2\nu, \qquad u - u = 2\nu'.$$

Soient ensuite

$$U = \alpha\nu + \alpha'\nu', \qquad U' = \beta\nu + \beta'\nu',$$

et déterminons les constantes α, α', β, β' de manière à obtenir identiquement

$$U^2 - U'^2 = \nu^2 - \nu'^2.$$

On posera pour cela

$$\alpha^2 - \beta^2 = 1, \qquad \alpha\alpha' - \beta\beta' = 0, \qquad \alpha'^2 - \beta'^2 = -1,$$

d'où il sera facile de conclure

$$\beta^2 = \alpha'^2, \qquad \beta'^2 = \alpha^2.$$

Or la forme définie φ étant

$$\varphi = U^2 + U'^2 = (\alpha\nu + \alpha'\nu')^2 + (\beta\nu + \beta'\nu)^2,$$

elle deviendra par ces relations

$$\begin{aligned} \varphi &= (\alpha^2 + \beta^2)\nu^2 + 2(\alpha\alpha' + \beta\beta')\nu\nu' + (\alpha'^2 + \beta'^2)\nu' \\ &= (\alpha^2 + \alpha'^2)(\nu^2 + \nu'^2) + 4\alpha\alpha'\nu\nu'. \end{aligned}$$

Remettant maintenant au lieu de ν et ν' leurs valeurs en u et u', il viendra

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha'^2)(u^2 + u'^2) + \alpha\alpha'(u^2 - u'^2) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha')^2 u^2 + \tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha')^2 u'^2;$$

ce qui est précisément la forme quadratique définie à laquelle on serait amené, d'après le § V, en considérant F comme appartenant aux formes décomposables en facteurs linéaires. (Je reprendrai, dans un Mémoire spécial, la distribution en périodes des formes de déterminant positif, pour compléter et mettre fin en quelques points à ce que j'en ai déjà dit dans un Mémoire sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres.)

VII.

Pour compléter ce qui nous reste à dire des principes communs à ces deux grandes théories arithmétiques des formes quadratiques à un nombre quelconque d'indéterminées, et des formes décomposables en facteurs linéaires, nous allons exposer comment on doit concevoir l'opération de la réduction continuelle de l'une en l'autre des formes précédemment désignés par φ. Nommons $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$, $\mathfrak{f}''$, ... la série des formes contenues dans (F), F désignant soit une forme quadratique, soit une forme à facteurs linéaires, et S, S', S'', ... les substitutions par lesquelles on les a respectivement tirées de F.

En effectuant chacune de ces substitutions dans φ on aura les transformées correspondantes Φ, Φ', Φ'', ..., qui seront réduites pour certaines valeurs de leurs arguments. Or, il est très facile de voir, pour l'une et l'autre des formes φ, que toute transformée telle que Φ peut s'obtenir directement par $\mathfrak{f}$, d'après le mode même de formation de φ au moyen de F. Maintenant, pour arriver à saisir l'enchaînement de ces opérations arithmétiques de réduction continuelle, lorsque les arguments prennent toutes les valeurs possibles, nous observerons que, au lieu d'opérer toujours sur cette même forme φ, pour en déduire successivement Φ, Φ', Φ'', ..., on peut concevoir l'une quelconque de ces formes, obtenue au moyen d'une autre précédemment réduite, en y introduisant les valeurs des arguments pour lesquelles elle a cessé de l'être, et lui appliquant alors la méthode générale de réduction.

Or ici est l'origine d'une notion importante, que nous allons présenter d'abord, dans le cas particulier de deux arguments variables. Imaginons que ces deux arguments soient les coordonnées d'un point rapporté sur un plan à deux axes fixes, de sorte qu'à tout point de ce plan corresponde une forme φ entièrement déterminée. Indépendamment de toute connaissance sur la nature analytique des conditions que doivent remplir les coefficients d'une forme réduite, on peut concevoir l'existence d'une courbe séparant les points du plan auxquels correspond une forme Φ, toujours réduite, de ceux auxquels correspond une forme qui ne l'est plus. Cela posé, soient, à une distance infiniment voisine de cette courbe, Σ', Σ'', Σ''', ..., les diverses substitutions qu'il faudra successivement employer pour réduire de nouveau Φ; nous nommerons *réduites adjacentes* à Φ les transformées Φ', Φ'', Φ''', ... qu'on obtiendra en faisant ces substitutions dans Φ. Et, si l'on appelle $\mathfrak{f}$ la forme de (F) à laquelle Φ correspond, nous donnerons le nom de *formes contiguës* à $\mathfrak{f}$, aux transformées $\mathfrak{f}'$, $\mathfrak{f}''$, $\mathfrak{f}'''$, ..., qui en résultent par les substitutions Σ', Σ'', Σ''', ... Dans le cas général, considérons l'ensemble des valeurs des arguments pour lesquelles une forme Φ est réduite, ces valeurs étant telles que cette forme cesse de l'être lorsqu'elles subissent une variation infiniment petite. Nommons encore Σ', Σ'', ... la *totalité* des substitutions propres à réduire Φ de nouveau, dans cette hypothèse d'un changement infiniment petit dans les arguments : les réduites adjacentes seront les transformées Φ', Φ'', ... qui résultent de Φ par les substitutions Σ', Σ'', ...; et, en nommant f la forme correspondante de Φ dans (F), ses contiguës seront les transformées f', f'', ... qui s'en déduisent par les mêmes substitutions.

Cette notion des réduites adjacentes conduit à imaginer la disposition graphique suivante du calcul arithmétique de la réduction continuelle de φ :

Ayant représenté par les désignations abrégées Φ, Φ', Φ'', ... la série indéfinie des réduites quadratiques qui correspondent chacune à une forme de (F), nous concevrons qu'on fasse avec toutes ces formes un tableau dans lequel chacune d'elles sera immédiatement environnée de toutes celles qui lui sont adjacentes, et auxquelles on la joindra par autant de traits. De la sorte toute forme Φ se trouvera réunie par deux traits à une autre Φ'; car Φ ayant pour adjacente Φ', réciproquement Φ' aura pour adjacente Φ. Maintenant, si l'on place sur chaque double trait une désignation abrégée de la substitution par laquelle l'une des deux formes dépend de son adjacente, on aura la réunion de tous les éléments du calcul arithmétique dont nous avons essayé de donner une image claire et sensible.

On pourra encore, dans le tableau ainsi obtenu, remplacer chaque réduite quadratique par la forme f qui lui correspond dans (F); en conservant d'ailleurs toutes les indications de substitutions. De là résultera une disposition par groupes de formes contiguës, dont on va voir l'usage dans la démonstration du théorème suivant.

VIII.

Lorsque les coefficients de la forme F *sont entiers, que cette forme soit quadratique ou décomposable en facteurs linéaires, il existe un nombre fini de substitutions semblables, telles qu'on peut exprimer, par les produits des puissances de ces substitutions, toutes les transformations de cette forme en elle-même.*

Je dis en premier lieu qu'il suffit d'établir ce théorème pour une forme déterminée f, de l'ensemble (F). Supposons, en effet, que F se change en f par la substitution Σ, en désignant indéfiniment par S les substitutions semblables de f : toutes les substitutions de même nature relativement à F seront données, comme on sait, par la formule $\Sigma S \Sigma^{-1}$. Cela posé, admettons que S s'exprime par le produit de diverses substitutions S', S'', S''', ..., de sorte qu'on ait par exemple

$$S = S' S'' S'''.$$

En posant

$$T = \Sigma S \Sigma^{-1}, \qquad T' = \Sigma S' \Sigma^{-1}, \qquad T'' = \Sigma S'' \Sigma^{-1}, \qquad T''' = \Sigma S''' \Sigma^{-1},$$

on vérifiera de suite la relation

$$T = T' T'' T'''.$$

On voit par là comment à toute expression de la substitution S, par un produit d'autres substitutions, correspond une expression toute semblable pour la substitution T.

Cela posé, soit Φ la forme quadratique qui correspond à f. Cette forme sera réduite pour certaines valeurs de ses arguments; mais, en les faisant varier de nouveau, et considérant l'ensemble des substitutions qui se présentent successivement pour la réduire, nous avons fait la remarque (§ V et VI, 3°) qu'il n'y avait aucune transformation de f en elle-même qui ne soit comprise dans cet ensemble de substitutions. En partant de cette proposition, qui est fondamentale pour ce que nous allons avoir à dire, nous raisonnons comme il suit.

Supposons formé le tableau complet des formes de (F), disposé par groupes de formes contiguës, ainsi qu'on l'a expliqué plus haut. En vertu du second théorème des § V et VI, ce tableau renfermera, répétées une infinité de fois chacune, un nombre essentiellement limité de formes différentes. Ainsi il s'agit de saisir, en général, par quel enchaînement de substitutions on peut toujours lier deux transformées identiques occupant dans le tableau deux places distinctes.

Pour y parvenir, nous concevrons qu'on groupe les formes du tableau de la manière suivante :

Partant d'abord de f, nous la joindrons à toutes ses contiguës, pour en faire un *premier* groupe (A). Ensuite nous regarderons la totalité des formes contiguës à (A) comme formant, d'une part,

(A) lui-même, et de l'autre un *second* groupe (B). Nous continuerons de même en regardant les formes contiguës à (A) et (B) comme formant, d'une part, (A) et (B) et, de l'autre, un *troisième* groupe (C). Enfin, ayant en général obtenu les groupes (A), (B), (C), ..., (K), le suivant (L) sera défini comme réunissant les formes qui, sans appartenir aux groupes précédents, leurs sont contiguës.

Cela posé, j'observe que si deux formes égales à $\mathfrak{f}$ se présentent à deux places différentes dans le tableau général, et qu'on les prenne l'une et l'autre pour points de départ d'une disposition par groupes, on arrivera identiquement aux mêmes résultats. On se rappelle, en effet, que toute forme quadratique Φ se déduit directement de sa correspondante $\mathfrak{f}$, dans l'ensemble (F); de sorte que deux transformées égales dans (F) ramènent des formes quadratiques offrant les mêmes fonctions des arguments et, par suite, les mêmes opérations de réductions successives.

Cela étant, considérons les groupes successifs dans lesquels on retrouve la forme $\mathfrak{f}$, qui a été prise pour point de départ. Autant de fois cette forme se trouvera reproduite dans un groupe, autant on aura de transformations en elle-même. Nommons S, S′, S″, ... ces substitutions. De ce que nous avons dit précédemment résulte que ce sera toujours l'une de ces substitutions qu'il faudra employer pour passer de $\mathfrak{f}$ (quelle que soit sa place dans le tableau) à la même forme placée dans le groupe le plus voisin. Donc, de proche en proche, on voit que la substitution à faire pour passer généralement de $\mathfrak{f}$ à la même forme, placée en tout autre point, résultera nécessairement de la combinaison successive des substitutions *fondamentales* S, S′, S″, ...

IX.

Il est possible de réduire *de moitié* le nombre de ces substitutions fondamentales; car on démontre immédiatement, comme conséquence de la manière dont elles ont été obtenues, qu'on y trouve simultanément S et S^{-1}, S′ et S'^{-1}, ... Mais c'est seulement pour les formes décomposables en facteurs linéaires que j'ai pu obtenir l'expression du nombre des substitutions fondamentales, entièrement indépendantes. Il est alors le même que celui des arguments

essentiellement distincts dans la forme quadratique φ, c'est-à-dire, comme nous l'avons annoncé au commencement de ce Mémoire, la somme diminuée d'une unité du nombre des facteurs linéaires *réels* et du nombre des couples de facteurs *imaginaires* conjugués. La démonstration de ce théorème (1) sera pour nous l'objet d'un Mémoire particulier, dans lequel nous montrerons comment nos principes s'appliquent à l'étude des équations algébriques dont les coefficients sont des nombres entiers. Nous terminerons en remarquant que la présence d'un nombre illimité d'entiers arbitraires dans les transformations semblables des formes ternaires résulte des considérations précédentes. Car en supposant, pour fixer les idées, deux substitutions fondamentales S et S′, l'expression générale des transformations semblables serait de la forme

$$S^m S'^n S^p S'^q \ldots,$$

m, n, p, q étant des entiers positifs ou négatifs. Or aucune réduction ne saurait avoir lieu entre les nombres m, n, ..., à cause de l'impossibilité de permuter deux substitutions distinctes, comme nous l'avons démontrée (§ IX, 1re partie).

Paris, juin 1853.

(1) Il ne semble pas que M. Hermite soit jamais revenu sur ce théorème, qui présente une grande analogie avec le théorème de Dirichlet sur le nombre des unités complexes fondamentales dans un corps algébrique. E. P.