La belle solution donnée par M. Gauss, § 162, dépend d'une méthode profonde et cachée, qui, si je ne me trompe, reparaît encore dans d'autres circonstances, par exemple dans les recherches relatives à la multiplication des classes. J'aurais plutôt à essayer d'en pénétrer les principes qu'à y ajouter quelque chose; aussi je me bornerai à déduire des considérations précédentes ce cas particulier :

Le calcul de l'ensemble désigné par (f) *donne toutes les transformations possibles des réduites principales et intermédiaires en elles-mêmes.*

Soit $F = A(x + ay)(x + a'y)$ l'une d'elles : nous savons que toutes les autres réduites s'obtiendront par la réduction continuelle de la forme définie

$$\Phi = (x + ay)^2 + \lambda(x + a'y)^2,$$

et cette forme définie, comme correspondante à F, est elle-même réduite, par exemple pour $\lambda = \lambda_0$. Soit donc

$$x = mX + m_0Y, \qquad y = nX + n_0Y$$

la substitution qui change F en elle-même; par cette substitution, la forme

$$\frac{1}{(m + an)^2}(x + ay)^2 + \frac{\lambda_0}{(m + a'n)^2}(x + a'y)^2$$

deviendra précisément Φ, quand on y fait $\lambda = \lambda_0$; ainsi donc, en réduisant la forme définie dans l'hypothèse

$$\lambda = \lambda_0\left(\frac{m + an}{m + a'n}\right)^2,$$

on obtiendra bien une transformée semblable quelconque de F.

Maintenant, nommons P la substitution qui reproduit F, pour la première fois lorsque λ croît depuis la valeur λ_0, d'une manière continue jusqu'à une certaine limite λ_1; à partir de cette limite, les opérations se reproduiront périodiquement jusqu'à l'infini; c'est donc la substitution P, prise un nombre quelconque de fois, qui donnera toutes les transformations semblables. Et, si l'on considère les valeurs décroissantes de λ, de λ_1 à λ_0, on aura dans un ordre inverse la même série d'opérations, qu'on pourra prolonger à l'infini, dans l'autre sens, et qui donnera pour transformations

semblables la substitution inverse P^{-1}, prise de même un nombre quelconque de fois. Les mêmes choses auraient lieu relativement à la transformation de toute réduite F en — F, lorsque cette transformation est possible.

X.

L'équation $x^2 - Dy^2 = 1$ a une infinité de solutions.

En prenant, en effet, $f = x^2 - Dy^2$, on a l'une des réduites intermédiaires comprises dans (f), car la forme définie correspondante

$$(x + y\sqrt{D})^2 + \lambda(x - y\sqrt{D})^2$$

est réduite pour $\lambda = 1$. De là résulte l'existence d'une infinité de transformations semblables, telles que

$$x = mX + m_0Y, \qquad y = nX + n_0Y,$$

et toutes donnent nécessairement

$$m^2 - Dn^2 = 1.$$

Pour obtenir la loi de toutes ces solutions, nous emploierons la méthode suivante. Soit $\Pi(z)$ une fonction égale, pour toutes les valeurs réelles de z, au minimum de la forme

$$e^{2z}(x + y\sqrt{D})^2 + e^{-2z}(x - y\sqrt{D})^2,$$

lorsqu'on y suppose x et y entiers. Je dis que toute solution $x = a$, $y = b$, de l'équation proposée, donnera un indice de périodicité de la fonction Π. On pourra déterminer, en effet, une quantité réelle ω, telle que

$$e^{\omega} = a + b\sqrt{D}, \qquad e^{-\omega} = a - b\sqrt{D},$$

et l'on trouvera

$$\Pi(z + \omega) = e^{2z}\left(\frac{x + y\sqrt{D}}{a - b\sqrt{D}}\right)^2 + e^{-2z}\left(\frac{x - y\sqrt{D}}{a + b\sqrt{D}}\right)^2.$$

Or on peut faire

$$x + y\sqrt{D} = (a - b\sqrt{D})(X + Y\sqrt{D}),$$
$$x - y\sqrt{D} = (a + b\sqrt{D})(X - Y\sqrt{D}),$$

car cela revient à la substitution au déterminant 1 :

$$x = +aX - bDY, \qquad y = -bX + aY;$$

donc $\Pi(z+\omega)$ ne diffère pas de $\Pi(z)$.

Or la fonction $\Pi(z)$ est, par sa définition, du genre des fonctions parfaitement déterminées dans toute l'étendue des valeurs réelles de la variable : donc, d'après l'observation bien connue de M. Jacobi, tous les indices de périodicité, tels que ω, sont des multiples entiers du plus petit d'entre eux. Autrement dit : toutes les solutions $x = A$, $y = B$ de l'équation proposée se tirent de la solution unique $x = a$, $y = b$ (pour laquelle $a + b\sqrt{D}$ est le plus petit possible) par la formule

$$A + B\sqrt{D} = (a + b\sqrt{D})^i,$$

i étant un nombre entier positif ou négatif.

Toutes ces solutions d'ailleurs s'obtiendront en cherchant effectivement les minima successifs de $\Pi(z)$, ou bien, ce qui est au fond la même chose, en formant la période de $x^2 - Dy^2$. On a, en effet, cette proposition plus générale :

Toute représentation de minimum absolu d'une forme à facteurs réels

$$f = a(x + \alpha y)(x + \alpha' y)$$

sera donnée en cherchant, pour des valeurs convenables de t et t', le minimum de la forme définie

$$\varphi = t^2(x + \alpha y)^2 + t'^2(x + \alpha' y)^2.$$

Supposons que f soit le plus petit possible pour

$$x = a, \qquad y = b.$$

Si le minimum de φ, dans l'hypothèse suivante

$$t = \frac{1}{a + \alpha b}, \qquad t' = \frac{1}{a + \alpha' b},$$

n'était pas donné par le même système de valeurs, c'est qu'il en existerait un autre

$$x = A, \qquad y = B,$$

tel qu'on ait

$$\left(\frac{A + \alpha B}{a + \alpha b}\right)^2 + \left(\frac{A + \alpha' B}{a + \alpha' b}\right)^2 < 2;$$

or on en conclurait

$$\left(\frac{A + \alpha B}{a + \alpha b}\right)^2 \left(\frac{A + \alpha' B}{a + \alpha' b}\right)^2 < 1;$$

donc f ne serait pas, contre l'hypothèse, un minimum absolu pour $x = a$, $y = b$.

XI.

M. Gauss a encore déduit du développement de la période de la forme $(1, 0, -D)$ la décomposition en deux carrés du déterminant, lorsqu'il est un nombre premier $4n + 1$. Ce beau résultat dépend des spéculations les plus élevées de l'Arithmétique transcendante, car il repose en entier sur cette proposition : *que les formes proprement primitives de déterminant premier $4n + 1$ n'ont jamais qu'une classe ambiguë*. Je vais essayer cependant, sans sortir des considérations élémentaires, de donner la raison de ces rapports singuliers, entre deux points bien différents de la théorie des formes quadratiques.

Soient a et b deux nombres entiers, tels qu'on ait

$$a^2 - Db^2 = -\Delta,$$

Δ étant essentiellement positif. La période de $(1, 0, -D)$ contiendra une transformée obtenue par la réduction de la forme que nous avons nommée φ dans l'hypothèse suivante :

$$\varphi = (x + y\sqrt{D})^2(a + b\sqrt{D}) - (x - y\sqrt{D})^2(a - b\sqrt{D}) = 2\sqrt{D}(b, a, bD).$$

Or on obtient ainsi une forme à coefficients entiers de déterminant $-\Delta$. Soit donc

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$$

l'une quelconque des réduites pour ce déterminant, et

$$x = mX + m_0 Y, \qquad y = nX + n_0 Y$$

la substitution propre à passer de (b, a, bD) à $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$. Cette substitution se présentera nécessairement pour déduire de $(1, 0, -D)$ l'une des réduites principales ou intermédiaires de sa période; soit (A, B, C) cette réduite, on aura, d'une part,

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 = (mX + m_0Y)^2 - D(nX + n_0Y)^2,$$

et de l'autre

$$\mathbf{A}X^2 + 2\mathbf{B}XY + \mathbf{C}Y^2 = b(mX + m_0Y)^2 \\ + 2a(mX + m_0Y)(nX + n_0Y) + bD(nX + n_0Y)^2;$$

or on tire aisément de là l'équation suivante

$$A\mathbf{C} - 2B\mathbf{B} + C\mathbf{A} = 0,$$

dont nous allons montrer les conséquences.

Soit, en effet, $\Delta = 1, 2, 3, 4, 5$, etc. Au moyen des réduites continues pour ces déterminants, on trouvera successivement

$$A + C = 0,\quad 2A + C = 0,\quad 3A + C = 0,\quad 4A + C = 0,\quad 5A + C = 0$$

ou

$$A - B + C = 0,\quad A + C = 0,\quad 3A - 2B + 2C = 0,\quad \ldots,$$

et ces relations donneront les représentations suivantes du déterminant D,

$$A^2 + B^2,\quad 2A^2 + B^2,\quad 3A^2 + B^2,\quad 4A^2 + B^2,\quad 5A^2 + B^2$$

ou

$$B^2 - AB + A^2,\quad A^2 + B^2,\quad B^2 - AB + \tfrac{3}{2}A^2.$$

Dans la dernière, A est nécessairement un nombre pair, et, en écrivant $2A$ à la place de A, elle devient

$$B^2 - 2AB + 6A^2 \quad \text{ou} \quad (B - A)^2 + 5A^2;$$

ainsi la représentation de D, par la forme $(1, 0, +5)$, s'obtiendra par le développement de la période de $(1, 0, D)$ toutes les fois que l'équation

$$a^2 - Db^2 = -5$$

sera possible. Mais, de tous ces cas, le premier est le seul où nous puissions affirmer que la forme (A, B, C) est une réduite principale; alors, en effet, la relation $B^2 > (A + C)^2$ se réduit à $B^2 > 0$, qui est satisfaite d'elle-même. Le second a été l'objet de recherches de M. Göpel, auteur à jamais illustre du Mémoire *Adumbratio levis theoriæ functionum Abelianarum,* comme on le voit dans la Notice où M. Jacobi a rendu un digne hommage à sa mémoire.

Dans ce champ de recherches sur les fonctions abéliennes, ouvertes en même temps par un autre géomètre dont il eût été l'émule, tous ceux qui suivront ses traces trouveront, à côté de leurs méditations, le regret d'une destinée cruelle. Qu'il me soit permis, pour avoir eu quelques pensées en partage avec M. Göpel, de joindre l'expression sincère de ce regret à celle de mon admiration pour son génie.

XII.

En passant des formes quadratiques à facteurs réels aux formes de degré plus élevé, la recherche des classes distinctes pour un déterminant donné dépend en premier lieu de la détermination du minimum de la fonction que nous avons désignée par θ. On n'a plus alors cet ensemble de circonstances analytiques remarquables que nous venons de parcourir, mais que nous retrouverons dans la théorie des formes à facteurs linéaires que nous avons définies § II. Le fait le plus important à observer, en abordant la théorie des formes cubiques, biquadratiques, etc., consiste peut-être dans l'existence pour chaque degré d'un certain nombre de formes comme celles que nous avons nommées précédemment *correspondantes.* M. Eisenstein a découvert le premier une correspondante du second degré pour les formes cubiques, et l'on peut voir le rôle qu'elle joue dans ses savantes recherches sur le nombre des classes distinctes pour un déterminant donné. Nos principes, comme on va voir, conduisent directement à cette même forme.

Posons, pour employer les notations suivies,

$$f = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3;$$

on aura pour la fonction θ deux expressions bien distinctes, l'une pour le cas où les facteurs linéaires $x + \alpha y$, $x + \alpha' y$, $x + \alpha'' y$ sont réels, savoir :

$$\theta = a^2 \frac{[t^2t'^2(\alpha - \alpha')^2 + t^2t''^2(\alpha - \alpha'')^2 + t'^2t''^2(\alpha' - \alpha'')^2]^{\frac{3}{2}}}{t^2t'^2t''^2},$$

l'autre pour le cas où, $x + \alpha y$ étant réel, $x + \alpha' y$ et $x + \alpha'' y$ sont imaginaires conjugués

$$\theta = a^2 \frac{\left[2t^2 t'^2(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'') - t'^4(\alpha'-\alpha'')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{t^2 t'^4}.$$

Ces deux expressions différentes peuvent néanmoins être rapprochées l'une de l'autre de la manière suivante :

Faisons dans la première

$$t^2 = \tau^2(\alpha'-\alpha'')^2, \qquad t'^2 = \tau'^2(\alpha-\alpha'')^2, \qquad t''^2 = \tau''^2(\alpha-\alpha')^2,$$

et dans la seconde

$$t^2 = -\tau^2(\alpha'-\alpha'')^2, \qquad t'^2 = \tau'^2(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha''),$$

elles deviendront respectivement

$$\theta = a^2(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')(\alpha'-\alpha'')\left[\left(\frac{\tau\tau'}{\tau''^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\tau\tau''}{\tau'^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\tau'\tau''}{\tau^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}},$$

$$\theta = a^2(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')(\alpha'-\alpha'')\left[-2\left(\frac{\tau}{\tau'}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\tau'^2}{\tau^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Or il est visible que, au facteur $\sqrt{-1}$ près, la seconde valeur se déduit de la première en y supposant $\tau'' = \tau'$. D'un autre côté, le minimum de l'expression

$$\left(\frac{\tau\tau'}{\tau''^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\tau\tau''}{\tau'^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\tau'\tau''}{\tau^2}\right)^{\frac{2}{3}},$$

composée de trois parties dont le produit est l'unité, s'obtiendra en rendant les variables égales, et la même hypothèse donnera la même valeur pour le minimum de la seconde fonction. Posant

$$\begin{aligned} &a^4(\alpha-\alpha')^2(\alpha-\alpha'')^2(\alpha'-\alpha'')^2 \\ &\quad = 27(-a^2d^2 + 3b^2c^2 - 4ac^3 - 4db^3 + 6abcd) = 27\mathbf{D}, \end{aligned}$$

on trouvera respectivement, pour les minima des deux expressions, les valeurs

$$\sqrt{3^6.\mathbf{D}} \quad \text{et} \quad \sqrt{-3^6.\mathbf{D}},$$

et, pour les formes définies auxquelles nous avons donné le nom général de *correspondantes*,

$$\varphi = +(\alpha'-\alpha'')^2(x+\alpha y)^2 + (\alpha-\alpha'')^2(x+\alpha' y)^2 + (\alpha-\alpha')^2(x+\alpha'' y)^2,$$
$$\varphi = -(\alpha'-\alpha'')^2(x+\alpha y)^2 + 2(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')(x+\alpha' y)(x+\alpha'' y).$$

La différence analytique de ces deux formes manifeste la différence de nature entre les formes cubiques à facteurs réels et à facteurs imaginaires ; dans le premier cas, φ s'exprime rationnellement par les coefficients de f, et l'on arrive à la forme de M. Eisenstein en multipliant par le facteur a^2, savoir :

$$\varphi = (ac-b^2)x^2 + (ad-bc)xy + (bd-c^2)y^2.$$

Dans le second, il n'en est plus de même, et l'opération de la réduction exigera le calcul numérique de la racine réelle $-\alpha$. Mais les limitations des coefficients pour les transformées réduites

$$\mathrm{AX^3 + 3BX^2Y + 3CXY^2 + DY^3}$$

dépendent toujours de ces formules

$$\mathrm{AD} < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\mathbf{D}}, \qquad \mathrm{BC} < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\mathbf{D}},$$

en ayant soin de prendre la valeur absolue de $\mathbf{D}$.

La correspondante à coefficients rationnels peut être aussi rattachée à une origine différente de celle que nous venons de lui donner, en la considérant comme le déterminant du système

$$\begin{matrix} \dfrac{d^2f}{dx^2}, & \dfrac{d^2f}{dx\,dy}, \\[2ex] \dfrac{d^2f}{dx\,dy}, & \dfrac{d^2f}{dy^2}, \end{matrix}$$

et de là se déduirait une démonstration facile de sa propriété caractéristique. Mais je veux surtout faire remarquer comment cette seconde expression conduit au théorème suivant :

Qu'en multipliant φ par elle-même, le produit est toujours transformable en son opposée.

Partons à cet effet des substitutions

$$\mathrm{X} = (ax+by)x' + (bx+cy)y',$$
$$\mathrm{Y} = (bx+cy)x' + (cx+dy)y',$$

et représentons par φ, φ', Φ les déterminants des systèmes

$$\begin{vmatrix} ax+by & bx+cy \\ bx+cy & cx+dy \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} ax'+by' & bx'+cy' \\ bx'+cy' & cx'+dy' \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} c\mathrm{X}-b\mathrm{Y} & d\mathrm{X}-c\mathrm{Y} \\ b\mathrm{X}-a\mathrm{Y} & c\mathrm{X}-b\mathrm{Y} \end{vmatrix}.$$

On trouvera d'abord, en résolvant successivement par rapport à x', y' et x, y,

$$x' = \frac{X(cx+dy) - Y(bx+cy)}{\varphi}, \quad y' = \frac{-(bx+cy)X + (ax+by)Y}{\varphi},$$

$$x = \frac{X(cx'+dy') - Y(bx'+cy')}{\varphi'}, \quad y = \frac{-(bx'+cy')X + (ax'+by')Y}{\varphi'}.$$

Les deux premières formules donneront ensuite

$$x = \varphi\,\frac{x'(cX - bY) + y'(dX - cY)}{\Phi},$$

$$y = \varphi\,\frac{-y'(cX - bY) + x'(-bX + aY)}{\Phi},$$

et, en égalant entre elles les deux valeurs obtenues, par exemple pour x, on trouvera

$$\varphi\varphi' = \Phi.$$

Or on vérifie de suite que Φ est précisément l'opposée des deux correspondantes semblables φ et φ'; ce qui démontre la proposition énoncée.

Si, de plus, le coefficient moyen étant pair, ces formes sont proprement primitives, Φ, composée de nouveau avec φ, donnera la forme principale de même déterminant; toutes les classes de formes cubiques auront une correspondante quadratique, dont la triplication donnera cette forme principale. Mais il a été établi en outre, par M. Eisenstein, qu'à toute classe quadratique $\sqrt[3]{k}$ répondait effectivement une seule et unique classe cubique, lorsque le déterminant n'avait pas de diviseur carré. Ce beau théorème montre, comme on voit, un rapport digne de remarque entre deux théories qui n'offrent au premier abord aucun point de contact.

Paris, juillet 1850.

SUR LA THÉORIE DES FORMES QUADRATIQUES TERNAIRES INDÉFINIES.

Journal de Crelle, Tome 47.

M. Gauss a distingué les formes quadratiques ternaires en *définies* et *indéfinies*, suivant qu'elles sont réductibles par une substitution réelle aux formes

$$\pm(x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{et} \quad \pm(x^2 + y^2 - z^2).$$

Nous considérerons dans cette Note les formes

$$f = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy,$$

réductibles à

$$X^2 + Y^2 - Z^2;$$

et tout ce que nous en dirons s'appliquera de soi-même à l'espèce des formes indéfinies qui appartiennent à l'autre type

$$-x^2 - y^2 + z^2.$$

Il est bon cependant d'observer que ces deux types sont essentiellement distincts l'un de l'autre, c'est-à-dire qu'il est impossible de trouver aucune substitution réelle qui change

$$x^2 + y^2 - z^2 \quad \text{en} \quad -X^2 - Y^2 + Z^2.$$

Le *déterminant*, ou, d'après la nouvelle dénomination de M. Sylvester, l'*invariant* de f, sera

$$\Delta = ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - 2bb'b'' - aa'a'';$$

la forme adjointe g sera

$$g = \frac{d\Delta}{da}x^2 + \frac{d\Delta}{da'}y^2 + \frac{d\Delta}{da''}z^2 + \frac{d\Delta}{db}yz + \frac{d\Delta}{db'}xz + \frac{d\Delta}{db''}xy.$$

En même temps que la forme indéfinie f, nous considérerons la forme *définie*

$$\varphi = f + 2(\lambda x + \mu y + \nu z)^2,$$

où λ, μ, ν sont des indéterminées réelles, assujetties à vérifier la condition

$$g(\lambda, \mu, \nu) = -\Delta.$$

Cela étant, on concevra qu'on calcule la suite infinie des substitutions propres à réduire φ lorsque les indéterminées λ, μ, ν passent par tous les états possibles de grandeur. Chacune de ces substitutions faite dans f donnera une certaine transformée. Nous désignerons leur ensemble par le symbole (f), et nous aurons les propositions suivantes :

I. *Si deux formes ternaires f et* F *sont équivalentes,* (f) *et* (F) *contiendront les mêmes formes et seront identiques.*

II. *Si la forme ternaire f a pour coefficients des nombres entiers,* (f) *ne contiendra qu'un nombre* essentiellement limité *de transformées distinctes.*

Effectivement, si l'on représente par $\mathrm{F} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}, & \mathrm{A}', & \mathrm{A}'' \\ \mathrm{B}, & \mathrm{B}', & \mathrm{B}'' \end{pmatrix}$ l'une quelconque des formes contenues dans (f), on a ce théorème :

III. *Les cinq expressions*

$$\mathrm{AB}^2, \quad \mathrm{A'B'^2}, \quad \mathrm{A''B''^2}, \quad \mathrm{BB'B''}, \quad \mathrm{AA'A''}$$

sont comprises entre les limites

$$+2\Delta \quad \text{et} \quad -2\Delta.$$

De là suit que la totalité des formes pour lesquelles Δ est le même ne donneront qu'un nombre fini de symboles (f) distincts les uns des autres, c'est-à-dire que les formes ternaires indéfinies de même invariant ne donnent jamais qu'un nombre limité de classes.

IV. *Les substitutions propres à réduire φ contiendront toutes les substitutions qui peuvent changer en elles-mêmes les diverses formes de* (f).

Le calcul numérique de la réduction continuelle de la forme φ, lorsque λ, μ, ν passent par tous les états de grandeur, sous la condition

$$g(\lambda, \mu, \nu) = -\Delta,$$

m'a conduit à de longues et pénibles recherches dont le théorème suivant est le point de départ :

Lorsque φ cesse d'être réduit par une variation infiniment petite de λ, μ, ν, la substitution qu'il faut employer pour le réduire de nouveau est l'une des soixante-deux substitutions d'Eisenstein, par lesquelles une forme définie réduite se change en elle-même.

La même proposition a encore lieu à l'égard de cet autre genre de formes φ, savoir :

$$\varphi = \lambda(ax + a'y + a''z)^2 + \mu(bx + b'y + b''z)^2 + \nu(cx + c'y + c''z)^2,$$

que j'ai introduites dans l'étude des formes cubiques

$$f = (ax + a'y + a''z)(bx + b'y + b''z)(cx + c'y + c''z).$$

J'espère pouvoir donner, dans une autre occasion, le résultat de mes recherches sur cette question si difficile; mais, pour approfondir la nature des substitutions qui changent en elle-même une forme indéfinie, j'ai employé l'analyse suivante :

Étant proposé de découvrir la substitution de x, y, z en X, Y, Z qui donne identiquement

$$f(x, y, z) = f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}), \tag{1}$$

j'imagine que les trois premières variables, ainsi que les trois dernières, soient exprimées par des indéterminées auxiliaires ξ, η, ζ, et cela de manière qu'on ait

$$\left\{\begin{aligned} x + \mathrm{X} &= 2\xi, \\ y + \mathrm{Y} &= 2\eta, \\ z + \mathrm{Z} &= 2\zeta. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Sous ces conditions on va voir qu'il est facile d'obtenir les expressions de x, y, z et X, Y, Z en ξ, η, ζ. Effectivement, il viendra en premier lieu

$$f(2\xi - \mathrm{X}, 2\eta - \mathrm{Y}, 2\zeta - \mathrm{Z}) = f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}), \tag{3}$$

d'où, en développant et réduisant,

$$2f(\xi, \eta, \zeta) = \mathrm{X}\frac{df}{d\xi} + \mathrm{Y}\frac{df}{d\eta} + \mathrm{Z}\frac{df}{d\zeta}. \tag{4}$$

Or il est visible qu'on satisfera de la manière la plus générale à cette équation en prenant

$$(5)\quad \begin{cases} X = \xi + \nu \dfrac{df}{d\eta} - \mu \dfrac{df}{d\zeta}, \\ Y = \eta + \lambda \dfrac{df}{d\zeta} - \nu \dfrac{df}{d\xi}, \\ Z = \zeta + \mu \dfrac{df}{d\xi} - \lambda \dfrac{df}{d\eta}, \end{cases}$$

λ, μ, ν désignant trois quantités arbitraires. Réciproquement, si l'on a vérifié ainsi l'équation (4), on en conclura nécessairement l'équation (3). Les formules générales [1], pour la transformation en elle-même de la forme f, s'obtiendront donc en résolvant les équations (5) par rapport à ξ, η, ζ et substituant les valeurs obtenues dans les relations

$$(6)\quad \begin{cases} x = 2\xi - X, \\ y = 2\eta - Y, \\ z = 2\zeta - Z. \end{cases}$$

Mais la conclusion suivante, à laquelle je suis arrivé d'abord par une analyse plus difficile, n'exige pas qu'on fasse ce calcul. Ajoutons les équations (5); après les avoir respectivement multipliées par λ, μ, ν, il viendra

$$(7)\quad \lambda X + \mu Y + \nu Z = \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta,$$

et l'on en déduit, par les équations (6),

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = \lambda x + \mu y + \nu z.$$

Voici donc une fonction linéaire qui se change en elle-même par la substitution qui change aussi la forme f en elle-même. Cela posé, il est visible qu'au point de vue de la recherche présente des substitutions à coefficients entiers, les indéterminées λ, μ, ν doivent avoir des valeurs rationnelles; ainsi l'on peut faire ces quantités proportionnelles à trois entiers l, m, n, sans diviseur commun.

[1] L'analyse de M. Hermite ne prouve pas qu'on obtient sans aucune exception toutes les substitutions transformant la forme en elle-même; ce point essentiel a été ultérieurement complété par M. Hermite. (*Journal de Crelle*, t. 78.)
E. P.

D'après cela, choisissant six autres nombres l', m', n', l'', m'', n'', de manière que le déterminant du système

$$l,\ m,\ n;\quad l',\ m',\ n';\quad l'',\ m'',\ n''$$

soit l'unité, posons

$$(8)\quad \begin{cases} l\,x + m\,y + n\,z = u, & l\,X + m\,Y + n\,Z = U, \\ l'x + m'y + n'z = v, & l'X + m'Y + n'Z = V, \\ l''x + m''y + n''z = w; & l''X + m''Y + n''Z = W. \end{cases}$$

A la substitution proposée entre les variables x, y, z, d'une part, X, Y, Z de l'autre, succédera une nouvelle substitution entre les deux groupes u, v, w et U, V, W d'une manière toute spéciale; par ce fait, l'équation correspondante à (6) devient alors simplement

$$u = U.$$

Or cela équivaut à dire que, pour cette substitution, les indéterminées analogues à μ et ν sont nulles, l'autre restant encore arbitraire. Ainsi l'on en fera aisément le calcul en employant les relations

$$u = 2\xi - U,\qquad v = 2\eta - V,\qquad w = 2\zeta - W$$

et

$$U = \xi,\qquad V = \eta + \lambda \frac{dF}{d\zeta},\qquad W = \zeta - \lambda \frac{dF}{d\eta},$$

dans lesquelles $F(u, v, w)$ sera la transformée de $f(x, y, z)$, obtenue par la substitution (8). Mettant $\frac{1}{2}\lambda$ à la place de λ, et posant

$$F = \begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix},\qquad G\ (\text{forme adjointe de } F) = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}, & \mathfrak{A}', & \mathfrak{A}'' \\ \mathfrak{B}, & \mathfrak{B}', & \mathfrak{B}'' \end{pmatrix},$$

on trouvera

$$\begin{aligned} u &= U, \\ v &= \frac{2\lambda(-B' - \lambda\mathfrak{B}'')}{1 - \lambda^2\mathfrak{A}}\,U + \frac{(1 - 2\lambda B + \lambda^2\mathfrak{A})V - 2\lambda A''W}{1 - \lambda^2\mathfrak{A}}, \\ w &= \frac{2\lambda(B'' - \lambda\mathfrak{B}')}{1 - \lambda^2\mathfrak{A}}\,U + \frac{2\lambda A'V + (1 + 2\lambda B + \lambda^2\mathfrak{A})W}{1 - \lambda^2\mathfrak{A}}. \end{aligned}$$

Faisons encore

$$\frac{1 + \lambda^2\mathfrak{A}}{1 - \lambda^2\mathfrak{A}} = p,\qquad \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2\mathfrak{A}} = q,$$

d'où

$$p^2 - \mathfrak{A}q^2 = 1,$$

et il viendra

$$(9)\qquad \begin{cases} u = \mathrm{U}, \\ v = \left(-q\mathrm{B}' - \dfrac{q^2}{p+1}\mathfrak{B}''\right)\mathrm{U} + (p - \mathrm{B}q)\mathrm{V} - q\mathrm{A}''\mathrm{W}, \\ w = \left(q\mathrm{B}'' - \dfrac{q^2}{p+1}\mathfrak{B}'\right)\mathrm{U} + q\mathrm{A}'\mathrm{V} + (p + \mathrm{B}q)\mathrm{W}. \end{cases}$$

Ces formules sont celles auxquelles nous voulions parvenir; elles ne contiennent de fraction que la quantité $\frac{q^2}{p+1}$, qui peut ne pas se réduire à un nombre entier par la seule condition

$$p^2 - \mathfrak{A}q^2 = 1.$$

Cependant, si nous employons, au lieu des nombres p et q, les suivants

$$\mathrm{P} = p^2 + \mathfrak{A}q^2, \qquad \mathrm{Q} = 2pq,$$

qui donnent aussi

$$\mathrm{P}^2 - \mathfrak{A}\mathrm{Q}^2 = 1,$$

on trouvera alors

$$\frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{P}+1} = \frac{4p^2q^2}{p^2 + \mathfrak{A}q^2 + 1} = 2q^2,$$

et la formule de substitution ne renfermera plus que des nombres entiers. Le nombre $\mathfrak{A}$, qui joue ici un rôle essentiel, a pour valeur $g(l, m, n)$; il doit être évidemment positif pour que la substitution ne soit pas identique. Ce sont donc *les entiers pour lesquels la forme adjointe est positive* qui sont les éléments essentiels de notre solution.

En résumé : si nous désignons par S la substitution (8), par Σ la substitution (9), la formule abrégée $\mathrm{S}^{-1}\Sigma\mathrm{S}$ donnera en nombres entiers la relation entre les deux groupes de variables x, y, z et X, Y, Z, par laquelle $f(x, y, z)$ se change en $f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$.

Comme conséquence de la méthode précédente, on obtient aisément les théorèmes suivants, que je me bornerai à énoncer :

I. *Soit*

$$\begin{aligned} x &= a\mathrm{X} + a'\mathrm{Y} + a''\mathrm{Z}, \\ y &= b\mathrm{X} + b'\mathrm{Y} + b''\mathrm{Z}, \\ z &= c\mathrm{X} + c'\mathrm{Y} + c''\mathrm{Z} \end{aligned}$$

une substitution S *de déterminant* un, *qui change en elle-même une forme quadratique, l'équation du troisième degré qu'on*

formera en égalant à zéro le déterminant du système

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & a' & a'' \\ b & b'-\lambda & b'' \\ c & c' & c''-\lambda \end{vmatrix}$$

*admettra pour une de ses racines l'*unité, *et pour les autres deux valeurs réciproques.*

II. *Si l'on représente ces deux racines réciproques par* $\lambda = e^{\omega\sqrt{-1}}$ *et* $\frac{1}{\lambda} = e^{-\omega\sqrt{-1}}$, *la condition pour que la substitution* S, *prise n fois de suite, donne en dernier lieu une substitution identique, est donnée par l'équation* $n\omega = 2\pi$; *et les seules valeurs possibles du nombre n, si les coefficients sont entiers, sont* $n = 2, 3, 4, 6$.

III. *Il existe un nombre infini de formes quadratiques ternaires qu'une même substitution change en elles-mêmes; et l'on peut les représenter ainsi*

$$f = k\mathrm{A}^2 + l\mathrm{BC},$$

A, B, C *désignant trois fonctions linéaires déterminées, et k, l deux coefficients arbitraires. Toutes les substitutions qui changent en elles-mêmes ces diverses formes s'obtiendront en faisant*

$$\mathrm{A} = \pm\mathfrak{A}, \qquad \mathrm{B} = \lambda\mathfrak{B}, \qquad \mathrm{C} = \frac{1}{\lambda}\mathfrak{C},$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ *désignant trois fonctions de même forme que* A, B, C, *mais relatives à d'autres variables, et λ une constante arbitraire.*

Paris, mai 1853.