SUR LA THÉORIE

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,
Tome XXIX, 1849.

La théorie des fonctions elliptiques que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie repose principalement sur quelques propositions que M. Cauchy a déduites de la considération des intégrales prises entre des limites imaginaires. Le véritable sens analytique de ces expressions a été donné, comme on le sait, pour la première fois, par le grand géomètre. Ses découvertes, à ce sujet, ont été l'origine du calcul des résidus, qui renferme les principes les plus étendus qu'on possède pour l'étude des fonctions d'une variable. Les recherches présentes montreront une nouvelle application de ces principes, et il ne sera peut-être pas sans intérêt de rapprocher les méthodes dues aux illustres fondateurs de la théorie des fonctions elliptiques, de celles dont j'ai trouvé l'origine dans les travaux de M. Cauchy.

RAPPORT SUR UN MÉMOIRE PRÉSENTÉ PAR M. HERMITE
ET RELATIF AUX

FONCTIONS A DOUBLE PÉRIODE [1],

Par A. Cauchy.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,
Tome XXXII, 1851.

Le Mémoire dont nous allons rendre compte a pour objet principal la détermination générale de celles des fonctions à double période qui ne cessent jamais d'être continues tant qu'elles restent finies. Pour faire mieux saisir la pensée de l'Auteur, il convient de jeter d'abord un coup d'œil rapide sur la nature et les propriétés caractéristiques des fonctions à double période.

Supposons que, x, y étant les coordonnées rectangulaires ou obliques d'un point mobile Z, on trace dans le plan des x, y un parallélogramme ABCD, dont les côtés a, b soient parallèles, le premier à l'axe des x, le second à l'axe des y. Divisons d'ailleurs le plan des x, y par deux systèmes de droites équidistantes et parallèles aux axes en une infinité d'éléments tous pareils au parallélogramme ABCD. Enfin soit v une fonction de x, y, qui offre une valeur déterminée pour chacun des systèmes de valeurs de x, y propres à représenter les coordonnées de points situés dans l'intérieur de ce parallélogramme. Une autre fonction u, qui, pour chacun des systèmes dont il s'agit, coïnciderait avec la fonction v, sera ce qu'on doit naturellement appeler une *fonction à double période,* si elle ne varie pas, quand on fait croître ou décroître l'abscisse x d'un multiple de a, ou l'ordonnée y d'un multiple de b; et il est clair que, dans ce cas, u reprendra la même valeur quand on substituera aux coordonnées d'un point situé dans le parallélogramme ABCD les coordonnées d'un point homologue situé de la même manière dans l'un des autres parallélogrammes

[1] Le Mémoire d'Hermite annoncé par la Note précédente n'ayant jamais été publié et ayant disparu des archives de l'Académie, nous croyons devoir réimprimer le Rapport de Cauchy sur ce travail. E. P.

élémentaires. Si d'ailleurs on veut que la fonction u satisfasse à la condition de rester toujours continue, tant qu'elle ne deviendra pas infinie, il ne suffira pas que cette condition se trouve remplie, quand le point Z sera intérieur au parallélogramme; il sera encore nécessaire que u reprenne la même valeur quand, après avoir placé le point Z sur l'un des côtés du parallélogramme, on le transportera sur le côté opposé, en lui faisant décrire une droite parallèle à l'un des axes coordonnés.

Ajoutons que, si la fonction u, supposée doublement périodique, est assujettie à la seule condition de rester finie et continue tant que le point Z est renfermé dans l'intérieur du parallélogramme ABCD, on pourra généralement la développer en une série double ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes des exponentielles

$$e^{\alpha x i}, \quad e^{\beta y i},$$

les valeurs de α, β étant

$$\alpha = \frac{2\pi}{a}, \qquad \beta = \frac{2\pi}{b}.$$

Supposons maintenant que, les coordonnées x, y étant rectangulaires, on nomme z une variable imaginaire liée aux variables x, y par la formule

$$z = x + yi.$$

La position du point mobile Z sera complètement déterminée par la *coordonnée imaginaire* z, et, pour que u soit fonction de x, y, il suffira que u soit fonction de z. D'ailleurs, pour que la fonction de z, désignée par u, soit doublement périodique, il suffira qu'elle reprenne la même valeur quand le point Z, supposé d'abord intérieur au rectangle ABCD, ira prendre la place de l'un quelconque des points homologues situés dans les autres rectangles élémentaires; en d'autres termes, il suffira que u reprenne la même valeur quand on fera croître ou décroître z d'un multiple de a, ou d'un multiple de bi; et cette condition pourra toujours être remplie, quelle que soit la forme de la fonction u pour les points intérieurs au rectangle ABCD.

Ce n'est pas tout : on pourra, aux deux périodes a et bi, supposées l'une réelle, l'autre imaginaire, substituer deux périodes imaginaires assujetties à la seule condition que leur rapport ne soit pas réel. Cela posé, concevons que l'on désigne par a, b, non

plus deux quantités réelles, mais deux expressions imaginaires, dont le rapport ne soit pas réel. Pour que u soit une fonction de z doublement périodique, il suffira que u ne varie pas, quand on fera croître ou décroître z d'un multiple de a ou d'un multiple de b. Alors aussi a, b pourront être censés représenter en grandeur et en direction les côtés d'un parallélogramme élémentaire ABCD, et la fonction u sera entièrement connue, quand on la connaîtra pour chacune des valeurs de z correspondantes aux points situés dans l'intérieur de ce parallélogramme.

D'après ce qu'on vient de dire, il est clair que, si a et b représentent les deux périodes de la variable z dans une fonction doublement périodique u, la valeur de u correspondante au cas où le point mobile Z reste compris dans l'intérieur d'un parallélogramme élémentaire ABCD pourra être choisie arbitrairement. Si d'ailleurs cette valeur, arbitrairement attribuée à u, est toujours finie et continue dans l'intérieur du parallélogramme, on pourra, de formules déjà connues, déduire l'expression analytique générale, propre à représenter la valeur de la fonction u supposée doublement périodique, quelle que soit la valeur attribuée à la variable z.

La fonction u, supposée doublement périodique, ne pourra plus être choisie arbitrairement pour les valeurs de z correspondantes aux divers points d'un parallélogramme élémentaire, si elle est assujettie à la condition de rester continue *avec sa dérivée*, pour des valeurs quelconques de z, tant qu'elle ne devient pas infinie. Cette condition sera remplie, par exemple si u est l'une des fonctions elliptiques, ou même une fonction rationnelle de ces fonctions. Mais il importait de savoir quelle est la forme la plus générale que puisse prendre une fonction doublement périodique, quand on l'assujettit à la condition énoncée. Telle est l'importante question que M. Hermite s'est proposé de résoudre. La solution qu'il en a donnée s'appuie sur des propositions remarquables, déduites en grande partie des principes établis par l'un de nous dans divers Mémoires, et spécialement dans le Tome II des *Exercices de Mathématiques*. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

La variable imaginaire z étant censée représenter les coordonnées imaginaires d'un point mobile Z, désignons par $F(z)$ une fonction doublement périodique de z, qui reste continue avec sa dérivée, tant qu'elle ne devient pas infinie; et soient a, b les deux périodes de z assujetties à la seule condition que leur rapport $\frac{a}{b}$ ne soit pas réel. Les quatre points

$$A, \quad B, \quad C, \quad D,$$

dont les coordonnées imaginaires seront

$$z, \quad z+a, \quad z+b, \quad z+a+b,$$

coïncideront avec les quatre sommets d'un parallélogramme élémentaire ABCD, dont les côtés seront représentés, non seulement en grandeur, mais encore en direction, par les deux constantes a, b; et, si l'on pose

$$\zeta = z + at + bt',$$

t, t' étant deux variables réelles, les valeurs de ζ, correspondantes à des valeurs de t, t' comprises entre les limites o, 1, représenteront les coordonnées imaginaires de points renfermés dans le parallélogramme élémentaire ABCD. Le binome $z + at$, en particulier, représentera les coordonnées imaginaires d'un point situé sur la droite AB; et si, pour tous les points de cette droite, la fonction de z et de t représentée par $F(z+at)$ conserve une valeur finie, cette fonction, qui ne varie pas quand on y fait croître ou décroître t d'un nombre entier quelconque, pourra être développée suivant les puissances ascendantes et descendantes de l'exponentielle

$$e^{2\pi t i}.$$

Soit A_m le coefficient de la $m^{\text{ième}}$ puissance de cette exponentielle dans le développement de $F(z+at)$, m étant positif ou négatif, mais entier. On aura

$$A_m = \int_0^1 e^{-2m\pi t i}\, F(z+at)\, dt$$

ou, ce qui revient au même,

$$A_m = \int_0^1 \Pi(z+at)\, dt,$$

la valeur de $\Pi(\zeta)$ étant

$$\Pi(\zeta) = e^{\frac{2m\pi(z-\zeta)}{a} i}\, F(\zeta)$$

et

$$F(z+at) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m e^{2m\pi t i};$$

par conséquent

$$(2) \qquad F(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m.$$

D'ailleurs, la nouvelle fonction, désignée ici par $\Pi(\zeta)$, ne variera pas quand on y fera croître ζ de a, et vérifiera évidemment la condition

$$(3) \qquad \Pi(\zeta+b) = q^{-2m}\, \Pi(\zeta),$$

la valeur de q étant

$$q = e^{\frac{\pi b}{a} i}.$$

Enfin, si l'on suppose que la sommation indiquée par le signe $\sum$ s'étende seulement aux diverses valeurs positives ou négatives de m, la valeur $m = 0$ étant exclue, alors, à la place de la formule (2), on obtiendra la suivante

$$(4) \qquad F(z) = A_0 + \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m,$$

la valeur de A_0 étant

$$(5) \qquad A_0 = \int_0^1 F(z+at)\, dt.$$

D'autre part, si l'on désigne par $f(z)$ une fonction de z qui demeure continue avec sa dérivée, tant qu'elle reste finie; par (P, Q) la valeur de l'intégrale rectiligne

$$\int f(z)\, dz,$$

étendue à tous les points de la droite qui a pour origine le point P et pour extrémité le point Q; par S l'aire du parallélogramme élémentaire ABCD; enfin, par (S) l'intégrale $\int f(\zeta)\, d\zeta$, étendue à tous les points situés sur le contour de ce parallélogramme, on aura, non seulement

$$(Q, P) = -(P, Q)$$

et, par suite,

$$(6) \qquad (S) = (A, B) + (B, D) - (C, D) - (A, C),$$

mais encore

$$(7) \qquad (S) = 2\pi i\, \mathcal{E}[f(\zeta)],$$

le signe $\mathcal{E}$ étant relatif aux seules valeurs de ζ qui représenteront les coordonnées de points renfermés dans le parallélogramme élémentaire ABCD. Cela posé, comme, en réduisant $f(z)$ à la fonction doublement périodique $\mathrm{F}(z)$, on aura évidemment

$$(\mathrm{B}, \mathrm{D}) = (\mathrm{A}, \mathrm{C})$$

et, par suite,

$$(\mathrm{S}) = 0.$$

la formule (7) donnera

$$\mathcal{E}[\mathrm{F}(\zeta)] = 0. \tag{8}$$

Si, au contraire, on remplace $f(z)$ par $\Pi(z)$, alors, en ayant égard à la formule (3), on trouvera

$$(\mathrm{B}, \mathrm{D}) = (\mathrm{A}, \mathrm{C}), \qquad (\mathrm{C}, \mathrm{D}) = q^{-2m}(\mathrm{A}, \mathrm{B}),$$

et, comme on aura

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \int_z^{z+a} \Pi(\zeta)\, d\zeta = a\mathrm{A}_m,$$

on tirera des formules (6) et (7)

$$(\mathrm{S}) = a(1 - q^{-2m})\mathrm{A}_m = 2\pi i\, \mathcal{E}\,\Pi(\zeta);$$

par conséquent,

$$\mathrm{A}_m = \frac{2\pi i}{a}\, \frac{\mathcal{E}\,\Pi(\zeta)}{1 - q^{-2m}}. \tag{9}$$

Il résulte immédiatement de cette formule, jointe à l'équation (4), que, si, en attribuant à z une valeur de la forme $at + bt'$, et à t, t' des valeurs réelles dont la seconde reste comprise entre les limites 0, 1, on pose

$$\theta(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{e^{\frac{2m\pi(z-b)}{a}i}}{1 - q^{-2m}}, \tag{10}$$

on aura

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{A}_0 + \frac{2\pi i}{a}\, \mathcal{E}\,\theta(z + b - \zeta)[\mathrm{F}(\zeta)], \tag{11}$$

le signe $\mathcal{E}$ étant relatif aux seules valeurs $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\mu$ de la variable ζ qui vérifieront l'équation

$$\frac{1}{\mathrm{F}(\zeta)} = 0, \tag{12}$$

et représenteront les coordonnées de points renfermés dans l'intérieur du parallélogramme élémentaire ABCD. D'ailleurs, on tirera de l'équation (10), en y remplaçant m par $-m$,

$$\theta(z) = -\theta(b - z). \tag{13}$$

Supposons maintenant que les valeurs de

$$\zeta = z + at + bt',$$

désignées par $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\mu$, se trouvent rangées d'après l'ordre de grandeur des valeurs correspondantes de t'. Soient, d'ailleurs,

$$\mathrm{Z}_1, \quad \mathrm{Z}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{Z}_\mu$$

les points dont $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\mu$ représentent les coordonnées imaginaires. Si, dans le second membre de la formule (11), on attribue à z un accroissement Δz tellement choisi, que le point A' correspondant à la coordonnée imaginaire $z + \Delta z$ soit renfermé dans l'intérieur de la bande comprise entre la droite AB et la parallèle menée à cette droite par le point Z_1, le terme

$$\mathrm{A}_0 = \int_0^1 \mathrm{F}(z + at)\, dt$$

ne variera pas; mais, si le point A' vient à franchir cette parallèle, le terme A_0 prendra un accroissement qui se déduira sans peine des formules (6), (7), et dont la valeur sera

$$-\frac{2\pi i}{a}\, \mathcal{E}[\mathrm{F}(\zeta)],$$

le signe $\mathcal{E}$ se rapportant à la seule valeur ζ_1 de la variable ζ. Dans la même hypothèse, l'expression

$$\frac{2\pi i}{a}\, \mathcal{E}\,\theta(z + b - \zeta)[\mathrm{F}(\zeta)],$$

que renferme le second membre de la formule (11), se trouvera évidemment diminuée du terme correspondant à la valeur ζ_1 de ζ, et augmentée du terme correspondant à la valeur $\zeta_1 + b$. Cela posé, il est clair que, si l'on assujettit $\theta(z)$ à vérifier généralement la condition

$$\theta(z + b) = \theta(z) - 1, \tag{14}$$

la formule (11) pourra être étendue au cas où le signe $\mathcal{E}$ serait relatif aux valeurs de ζ qui représenteraient les coordonnées de points renfermés, non plus dans le parallélogramme élémentaire ABCD, mais dans le parallélogramme semblable A′B′C′D′ avec lequel on peut faire coïncider le premier en transportant les côtés parallèlement à eux-mêmes, et substituant au sommet A le sommet A′. Par suite aussi, on pourra, en supposant le terme A_0 réduit à une constante dans la formule (11), admettre que, dans cette formule, le signe $\mathcal{E}$ se rapporte aux seules valeurs de ζ qui vérifient l'équation (12), et sont de la forme

$$\zeta = at + bt', \tag{15}$$

t, t' étant des variables réelles comprises entre les limites 0, 1.

En vertu de la formule (11), considérée sous ce point de vue, toute fonction de z qui, étant doublement périodique, reste continue avec sa dérivée tant qu'elle ne devient pas infinie, se réduit à la somme d'un certain nombre de termes, dont chacun est proportionnel à une fonction de la forme

$$\theta(z - z_1),$$

z_1 étant une valeur particulière de z, ou bien encore à l'une des dérivées de cette même fonction différentiée par rapport à z. Tel est le théorème fondamental obtenu par M. Hermite. Ajoutons que la fonction désignée ici par $\theta(z)$ a évidemment pour dérivée une fonction doublement périodique de z. Si l'on désigne par $\varphi(z)$ cette dérivée, la fonction $\varphi(z)$ restera continue, aussi bien que $\theta(z)$, tant qu'elle ne deviendra pas infinie, et, par suite, rien n'empêchera de prendre pour $F(z)$, dans la formule (11), ou la fonction $\varphi(z)$, ou une fonction rationnelle de $\varphi(z)$. En réduisant effectivement $F(z)$ au carré de $\varphi(z)$, M. Hermite obtient une équation qui sert à exprimer ce carré en fonction linéaire de $\varphi(z)$ et de $\varphi''(z)$; il en conclut aisément que le carré de $\varphi'(z)$ est proportionnel au produit des trois facteurs

$$\varphi(z) - \varphi\left(\frac{a}{2}\right), \quad \varphi(z) - \varphi\left(\frac{b}{2}\right), \quad \varphi(z) - \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

et la transcendante $\theta(z)$ se trouve ainsi ramenée aux fonctions elliptiques. Par suite aussi l'on peut réduire à une fonction rationnelle

de fonctions elliptiques toute fonction doublement périodique qui reste toujours continue avec sa dérivée, tant qu'elle ne devient pas infinie [1].

En partant des formules que nous avons rappelées, et substituant aux périodes a, b les autres périodes qu'on peut introduire dans le calcul, en déplaçant les sommets du parallélogramme élémentaire ABCD, M. Hermite obtient successivement sous diverses formes la valeur de la transcendante $\theta(z)$. D'ailleurs, la comparaison des diverses formes sous lesquelles se présente $\theta(z)$, et de ses divers développements, permet à l'auteur d'établir un grand nombre de propositions nouvelles. L'une de ces propositions, très digne de remarque, est relative à l'intervalle dans lequel reste convergente la série qui représente le développement de la fonction $\theta(z)$ [2].

En résumé, les Commissaires pensent que, dans le travail soumis à leur examen, M. Hermite a donné de nouvelles preuves de la sagacité qu'il avait déjà montrée dans de précédentes recherches. Ils pensent que ce travail est très digne d'être approuvé par l'Académie, et inséré dans le recueil des *Mémoires des Savants étrangers*.

---

[1] Déjà, en 1844, M. Liouville avait obtenu, par une méthode très différente de celle qu'a suivie M. Hermite, et avait énoncé, en présence de ce dernier, la réduction ici indiquée.

[2] M. Hermite, après avoir fixé l'intervalle dans lequel le développement de la transcendante $\theta(z)$ demeure convergent, prouve que, dans le cas où cet intervalle atteint sa valeur maximum, le rapport entre cet intervalle et le plus petit côté d'un parallélogramme élémentaire ne peut s'abaisser au-dessous de $\sqrt{\frac{3}{4}}$. M. Jacobi, dans une Lettre adressée à M. Hermite, avait énoncé une proposition qui coïncide avec ce théorème, et qui s'appliquait à la transcendante $\Theta(z)$.

NOTE

SUR

LA RÉDUCTION DES FONCTIONS HOMOGÈNES

A COEFFICIENTS ENTIERS ET A DEUX INDÉTERMINÉES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik,
Tome XXXVI; 1848.

Soit

$$f(y, x) = \mathrm{A}y^n + \mathrm{B}xy^{n-1} + \mathrm{C}x^2y^{n-2} + \ldots + \mathrm{K}x^{n-1}y + \mathrm{L}x^n$$

la forme proposée; nommons

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n$$

les racines, supposées d'abord toutes réelles, de l'équation

$$\mathrm{A}z^n + \mathrm{B}z^{n-1} + \mathrm{C}z^{n-2} + \ldots + \mathrm{K}z + \mathrm{L} = 0;$$

je définirai le déterminant de $f(y, x)$ la plus petite des valeurs que peut prendre l'expression

$$\mathbf{D} = \mathrm{A}\,\frac{\left[\frac{1}{2}\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_j \Delta_i\Delta_j(\alpha_i - \alpha_j)^2\right]^{\frac{1}{4}n}}{(\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_n)^{\frac{1}{2}}},$$

lorsque les quantités $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ prennent toutes les valeurs réelles et positives depuis zéro jusqu'à l'infini. Et d'abord un tel minimum existe toujours, comme on le reconnaît aisément; posant donc les équations

$$\frac{d\mathbf{D}}{d\Delta_1} = 0, \qquad \frac{d\mathbf{D}}{d\Delta_2} = 0 \qquad \ldots, \qquad \frac{d\mathbf{D}}{d\Delta_n} = 0,$$

on est assuré d'avance qu'elles seront satisfaites, au moins par un système de déterminations réelles et positives de $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Ces équations deviennent, en prenant

$$2\Delta = \sum_1^n{}_j \sum_1^n{}_i \Delta_i\Delta_j(\alpha_i - \alpha_j)^2,$$

$$(1) \quad 2\Delta = n\Delta_1\frac{d\Delta}{d\Delta_1}, \qquad 2\Delta = n\Delta_2\frac{d\Delta}{d\Delta_2}, \qquad \ldots, \qquad 2\Delta = n\Delta_n\frac{d\Delta}{d\Delta_n},$$

et, à proprement parler, elles ne contiennent que les rapports $\frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_1}$, etc. Leur somme d'ailleurs donne l'identité

$$2\Delta = \Delta_1\frac{d\Delta}{d\Delta_1} + \Delta_2\frac{d\Delta}{d\Delta_2} + \ldots + \Delta_n\frac{d\Delta}{d\Delta_n}.$$

Cette définition du déterminant pour une forme $f(y, x)$ de degré quelconque comprend, comme il est aisé de le voir, le cas particulier des formes quadratiques; mais, en passant aux valeurs suivantes de n, la détermination de $\mathbf{D}$, en fonction des coefficients A, B, ..., L, exige la résolution d'équations algébriques de degré de plus en plus élevé, et dont voici le caractère essentiel. Représentons en général leur premier membre par

$$\mathrm{F}(\mathbf{D}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots, \mathrm{K}, \mathrm{L}),$$

le coefficient de la plus haute puissance de $\mathbf{D}$ étant l'unité, je dis qu'il ne changera pas de valeur, si l'on y remplace respectivement

$$\mathrm{A}, \quad \mathrm{B}, \quad \mathrm{C}, \quad \ldots, \quad \mathrm{K}, \quad \mathrm{L}$$

par les coefficients

$$\mathrm{A}', \quad \mathrm{B}', \quad \mathrm{C}', \quad \ldots, \quad \mathrm{K}', \quad \mathrm{L}'$$

de la transformée

$$\begin{aligned} f(my' + m^0x', ny' + n^0x') &= f_1(y', x') \\ &= \mathrm{A}'y'^n + \mathrm{B}'x'y'^{n-1} + \ldots + \mathrm{K}'x'^{n-1}y' + \mathrm{L}'y'^n, \end{aligned}$$

les entiers m, m^0; n, n^0 étant soumis à la condition

$$mn^0 - nm^0 = \pm 1.$$

Pour le faire voir, soit

$$f(y, x) = \mathrm{A}(y - \alpha_1 x)(y - \alpha_2 x)\ldots(y - \alpha_n x)$$

en posant

$$\alpha'_i = \frac{n_0\alpha_i - m_0}{m - n\alpha_i},$$

on aura

$$f_1(y', x') = \mathrm{A}'(y' - \alpha'_1 x')(y' - \alpha'_2 x')\ldots(y' - \alpha'_n x')$$

et

$$\mathrm{A}' = \mathrm{A}(m - n\alpha_1)(m - n\alpha_2)\ldots(m - n\alpha_n).$$

Or si l'on substitue, dans les équations (1), α'_i à α_i pour obtenir les valeurs des quantités Δ relatives au déterminant de la nouvelle forme $f_1(y', x')$, comme les différences $\alpha'_i - \alpha'_j$ deviennent

$$\frac{\alpha_i - \alpha_j}{(m - n\alpha_i)(m - n\alpha_j)},$$

on voit immédiatement que cela revient à prendre pour inconnue, en général, $\dfrac{\Delta_i}{(m - n\alpha_i)^2}$ au lieu de Δ_i; donc, par cette substitution, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ deviennent simplement, à un facteur constant près,

$$(m - n\alpha_1)^2\Delta_1, \qquad (m - n\alpha_2)^2\Delta_2, \qquad \ldots.$$

Soit λ ce facteur indéterminé; il en résulte que, par la substitution de α'_i à α_i, $\Delta = \frac{1}{2}\Sigma\Sigma\Delta_i\Delta_j(\alpha_i - \alpha_j)^2$ se change en $\lambda^2\Delta$, mais la valeur de $\mathbf{D}$ reste absolument la même, le produit

$$\lambda^{\frac{1}{2}n}(m - n\alpha_1)(m - n\alpha_2)\ldots(m - n\alpha_n)$$

disparaissant comme facteur commun au numérateur et au dénominateur, d'après la valeur ci-dessus de A'. Ainsi, les deux équations en $\mathbf{D}$, qui sont relatives à la forme proposée et à sa transformée, ont les mêmes racines, et sont par conséquent identiques.

Voici maintenant quelques exemples du calcul de $\mathbf{D}$:

1° $n = 3$,

$$f(y, x) = \mathrm{A}y^3 + \mathrm{B}y^2x + \mathrm{C}yx^2 + \mathrm{D}x^3.$$

On trouve

$$\Delta = \Delta_1\Delta_2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \Delta_1\Delta_3(\alpha_1 - \alpha_3)^2 + \Delta_2\Delta_3(\alpha_2 - \alpha_3)^2,$$

et les équations (1) deviennent

$$2\Delta = 3\Delta_1[\Delta_2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \Delta_3(\alpha_1 - \alpha_3)^2],$$
$$2\Delta = 3\Delta_2[\Delta_1(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + \Delta_3(\alpha_2 - \alpha_3)^2],$$
$$2\Delta = 3\Delta_3[\Delta_1(\alpha_3 - \alpha_1)^2 + \Delta_2(\alpha_3 - \alpha_2)^2],$$

d'où l'on tire

$$\Delta_1\Delta_3(\alpha_1 - \alpha_3)^2 = \Delta_2\Delta_3(\alpha_2 - \alpha_3)^2, \qquad \Delta_2\Delta_1(\alpha_2 - \alpha_1)^2 = \Delta_3\Delta_1(\alpha_3 - \alpha_1)^2,$$

ou bien

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)^2}{(\alpha_2 - \alpha_3)^2}, \qquad \frac{\Delta_3}{\Delta_1} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{(\alpha_2 - \alpha_3)^2}.$$

Soit donc

$$\Delta_1 = (\alpha_2 - \alpha_3)^2, \qquad \Delta_2 = (\alpha_1 - \alpha_3)^2; \qquad \Delta_3 = (\alpha_1 - \alpha_2)^2;$$

on obtiendra successivement

$$\Delta = 3(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_3 - \alpha_1)^2,$$
$$\Delta_1\Delta_2\Delta_3 = (\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_3 - \alpha_1)^2,$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\mathbf{D} = \mathrm{A}\frac{\Delta^{\frac{3}{4}}}{(\Delta_1\Delta_2\Delta_3)^{\frac{1}{2}}} &= \{[27\mathrm{A}^4(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_3 - \alpha_1)^2]\}^{\frac{1}{4}} \\ &= \{27[\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2 - 4\mathrm{B}^3\mathrm{D} - 4\mathrm{C}^3\mathrm{A} - 27\mathrm{A}^2\mathrm{D}^2 + 18\mathrm{ABCD}]\}^{\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

2° $n = 4$,

$$f(y, x) = \mathrm{A}y^4 + \mathrm{B}y^3x + \mathrm{C}y^2x^2 + \mathrm{D}yx^3 + \mathrm{E}x^4.$$

Il vient alors

$$\Delta = 2\Delta_1[\Delta_2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \Delta_3(\alpha_1 - \alpha_3)^2 + \Delta_4(\alpha_1 - \alpha_4)^2],$$
$$\Delta = 2\Delta_2[\Delta_1(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + \Delta_3(\alpha_2 - \alpha_3)^2 + \Delta_4(\alpha_2 - \alpha_4)^2],$$
$$\Delta = 2\Delta_3[\Delta_1(\alpha_3 - \alpha_1)^2 + \Delta_2(\alpha_3 - \alpha_2)^2 + \Delta_4(\alpha_3 - \alpha_4)^2],$$
$$\Delta = 2\Delta_4[\Delta_1(\alpha_4 - \alpha_1)^2 + \Delta_2(\alpha_4 - \alpha_2)^2 + \Delta_3(\alpha_4 - \alpha_3)^2];$$

on en déduit, par une combinaison facile,

$$\Delta_1\Delta_2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = \Delta_3\Delta_4(\alpha_3 - \alpha_4)^2,$$
$$\Delta_2\Delta_3(\alpha_2 - \alpha_3)^2 = \Delta_4\Delta_1(\alpha_4 - \alpha_1)^2,$$
$$\Delta_1\Delta_3(\alpha_1 - \alpha_3)^2 = \Delta_2\Delta_4(\alpha_2 - \alpha_4)^2,$$

ou bien encore

$$\Delta_1^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_1 - \alpha_4)^2 = \Delta_3^2(\alpha_3 - \alpha_2)^2(\alpha_3 - \alpha_4)^2,$$
$$\Delta_2^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_2 - \alpha_4)^2 = \Delta_1^2(\alpha_1 - \alpha_4)^2(\alpha_1 - \alpha_3)^2,$$
$$\Delta_4^2(\alpha_4 - \alpha_2)^2(\alpha_4 - \alpha_3)^2 = \Delta_1^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_1 - \alpha_3)^2.$$

Ainsi, nous prendrons

$$\begin{aligned}
\Delta_1^2 &= (\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_4)^2(\alpha_4-\alpha_2)^2,\\
\Delta_2^2 &= (\alpha_3-\alpha_4)^2(\alpha_4-\alpha_1)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2,\\
\Delta_3^2 &= (\alpha_4-\alpha_1)^2(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_4)^2,\\
\Delta_4^2 &= (\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2,
\end{aligned}$$

et pour avoir, comme la question l'exige, des déterminations positives, nous supposons

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4,$$

ce qui donnera

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= -(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_2),\\
\Delta_2 &= -(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_3),\\
\Delta_3 &= -(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_4),\\
\Delta_4 &= -(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1).
\end{aligned}$$

Soit, pour abréger l'écriture, Ω le carré du produit des six différences des racines prises deux à deux; on conclura de ce qui précède [1] :

$$\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4 = \Omega,$$

$$\Delta = 4\,\Omega^{\frac{1}{2}}(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4),$$

$$\mathbf{D} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{(\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4)^{\frac{1}{2}}} = 4\mathrm{A}(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4).$$

La détermination de $\mathbf{D}$, en fonction des coefficients de $f(y, x)$, se ramène aisément à la résolution d'une équation du troisième degré : en représentant par $\Phi(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E})$ la fonction rationnelle et entière de ces coefficients qu'on obtient pour le produit symétrique $\mathrm{A}^6\Omega$, cette équation sera

$$\mathbf{D}^3 - 4^2\mathbf{D}(\mathrm{C}^2 - 3\mathrm{BD} + 12\mathrm{AE}) - 4^3\,\Phi^{\frac{1}{2}} = 0,$$

et ses trois racines

$$\begin{aligned}
&4\mathrm{A}(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4),\\
&4\mathrm{A}(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_4),\\
&4\mathrm{A}(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_4).
\end{aligned}$$

Voici maintenant la méthode générale de réduction; ayant déter-

(1) Nous corrigeons dans les lignes qui suivent quelques légères erreurs de calcul sans aucune importance pour la théorie générale. E. P.

miné par la théorie précédente les quantités $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, soit

$$\begin{aligned}
y &= my' + m^0x',\\
x &= ny' + n^0x',
\end{aligned}$$

la substitution propre à réduire la forme binaire

$$\Delta_1(y-\alpha_1x)^2 + \Delta_2(y-\alpha_2x)^2 + \ldots + \Delta_n(y-\alpha_nx)^2,$$

dont le déterminant changé de signe est la quantité désignée ci-dessus par Δ, je dis que cette même substitution effectuée dans la forme proposée $f(y, x)$ conduira à une transformée $f_1(y', x')$, dont tous les coefficients auront des valeurs limitées qui dépendront seulement du déterminant $\mathbf{D}$ et de l'exposant n.

Soit

$$\begin{aligned}
\mathrm{a} &= \Delta_1(m - n\alpha_1)^2 + \Delta_2(m - n\alpha_2)^2 + \ldots + \Delta_n(m - n\alpha_n)^2,\\
\mathrm{a}_0 &= \Delta_1(m^0 - n^0\alpha_1)^2 + \Delta_2(m^0 - n^0\alpha_2)^2 + \ldots + \Delta_n(m^0 - n^0\alpha_n)^2;
\end{aligned}$$

d'après le caractère principal des formes binaires réduites, on aura

$$\mathrm{a}\mathrm{a}_0 < \tfrac{4}{3}\Delta,$$

ce qui donne, en supposant $\mathrm{a} < \mathrm{a}_0$, la limite $\mathrm{a}^2 < \frac{4}{3}\Delta$; or voici les conséquences qui s'en déduisent : En premier lieu, le produit des quantités positives

$$\Delta_1(m-n\alpha_1)^2, \qquad \Delta_2(m-n\alpha_2)^2, \qquad \ldots,$$

ne pouvant dépasser son maximum $\left(\frac{\mathrm{a}}{n}\right)^n$, on aura

$$\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_n(m-n\alpha_1)^2(m-n\alpha_2)^2\ldots(m-n\alpha_n)^2 < \left(\frac{\mathrm{a}}{n}\right)^n,$$

d'où l'on tire aisément

$$\mathrm{A}(m-n\alpha_1)(m-n\alpha_2)\ldots(m-n\alpha_n) < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}n}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}n}\mathbf{D}.$$

Secondement, si l'on omet, dans a le terme $\Delta_i(m-n\alpha_i)^2$, en raisonnant comme tout à l'heure, on trouvera

$$\begin{aligned}
&\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_{i-1}\Delta_{i+1}\Delta_{i+2}\ldots\Delta_n(m-n\alpha_1)^2\ldots(m-n\alpha_{i-1})^2\\
&\qquad\times(m-n\alpha_{i+1})^2\ldots(m-n\alpha_n)^2 < \left(\frac{\mathrm{a}}{n-1}\right)^{n-1};
\end{aligned}$$

multipliant membre avec l'inégalité $\Delta_i(m^0 - n^0\alpha_i)^2 < a_0$ et posant, pour abréger,

$$(\alpha_i) = (m - n\alpha_1)(m - n\alpha_2)\ldots(m^0 - n^0\alpha_i)\ldots(m - n\alpha_n),$$

on obtiendra facilement

$$\mathrm{A}(\alpha_i) < \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}n} \mathbf{D}.$$

Ces deux conclusions auxquelles nous sommes arrivé démontrent immédiatement la proposition annoncée ; en effet, soit comme précédemment

$$f_1(y', x') = \mathrm{A}'(y' - \alpha'_1 x')(y' - \alpha'_2 x')\ldots(y' - \alpha'_n x'),$$

on aura

$$\mathrm{A}' = \mathrm{A}(m - n\alpha_1)(m - n\alpha_2)\ldots(m - n\alpha_n) < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}n} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}n} \mathbf{D}$$

et

$$\alpha'_i = \frac{n^0\alpha_i - m^0}{m - n\alpha_i} = -\frac{\mathrm{A}(\alpha_i)}{\mathrm{A}'} < \frac{1}{\mathrm{A}'}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}n} \mathbf{D};$$

ainsi, le nombre entier A', d'une part, et toutes les quantités α'_1, α'_2, ..., de l'autre, sont limitées ; donc il en est de même encore de tous les autres coefficients B', C', ..., L'. Entre autres relations qu'on peut établir à cet égard, on doit remarquer la suivante, qui fournit une limite du produit des coefficients extrêmes, savoir

$$\mathrm{A}'\mathrm{L}' < \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}n} \mathbf{D}^2.$$

Je vais maintenant considérer les formes $f(y, x)$, où les racines de l'équation $f(z, 1)$ sont en partie réelles et en partie imaginaires ; nommons donc

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_\mu$$

les racines réelles, et

$$\beta_1, \; \gamma_1; \quad \beta_2, \; \gamma_2; \quad \ldots, \quad \beta_\nu, \; \gamma_\nu$$

les divers couples de racines imaginaires conjuguées, de sorte que

$$\mu + 2\nu = n;$$

posons

$$\begin{aligned}\Delta = \frac{1}{2}\sum_1^\mu{}_j \sum_1^\mu{}_i \Delta_i\Delta_j(\alpha_i - \alpha_j)^2 \\ + \frac{1}{4}\sum_1^\nu{}_j \sum_1^\nu{}_i \Delta'_i\Delta'_j[(\beta_i - \beta_j)(\gamma_i - \gamma_j) - (\beta_i - \gamma_j)(\beta_j - \gamma_i)] \\ + \sum_1^\nu{}_j \sum_1^\mu{}_i \Delta_i\Delta'_j(\alpha_i - \beta_j)(\alpha_i - \gamma_j);\end{aligned}$$

je définirai le déterminant de $f(y, x)$ la plus petite des valeurs que peut prendre l'expression

$$\mathbf{D} = \frac{\mathrm{A}\,\Delta^{\frac{1}{4}n}}{(\Delta_1\ldots\Delta_\mu)^{\frac{1}{2}}(\Delta'_1\,\Delta'_2\ldots\Delta'_\nu)},$$

lorsque les quantités Δ_1, Δ_2, ..., Δ_μ; Δ'_1, Δ'_2, Δ'_ν passent par toutes les valeurs réelles et positives, depuis zéro jusqu'à l'infini. On obtiendra alors, pour le minimum cherché, les équations

$$2\Delta = n\Delta_1\frac{d\Delta}{d\Delta_1}, \qquad 2\Delta = n\Delta_2\frac{d\Delta}{d\Delta_2}, \qquad \ldots, \qquad 2\Delta = n\Delta_\mu\frac{d\Delta}{d\Delta_\mu},$$

$$4\Delta = n\Delta'_1\frac{d\Delta}{d\Delta'_1}, \qquad 4\Delta = n\Delta_2\frac{d\Delta}{d\Delta'_2}, \qquad \ldots, \qquad 4\Delta = n\Delta'_\nu\frac{d\Delta}{d\Delta'_\nu},$$

et un raisonnement semblable à celui qui a été employé ci-dessus prouve que toutes les transformées $f_1(y', x')$, équivalentes à la forme proposée, conduiront à la même équation pour déterminer $\mathbf{D}$ en fonction de leurs coefficients.

D'après cela, je fais dans $f(y, x)$ la substitution

$$\begin{aligned} y &= my' + m^0 x', \\ x &= ny' + n^0 x' \end{aligned}$$

propre à réduire la forme binaire quadratique

$$\begin{aligned}\Delta_1(y - \alpha_1 x)^2 + \Delta_2(y - \alpha_2 x)^2 + \ldots + \Delta_\mu(y - \alpha_\mu x)^2 \\ + \Delta'_1(y - \beta_1 x)(y - \gamma_1 x) + \Delta'_2(y - \beta_2 x)(y - \gamma_2 x) + \ldots \\ + \Delta'_\nu(y - \beta_\nu x)(y - \gamma_\nu x)\end{aligned}$$

de déterminant $-\Delta$, et je dis que tous les coefficients de la transformée $f_1(y', x')$ auront des valeurs finies, limitées seulement au moyen de **D** et des nombres μ, ν. Soit

$$\begin{aligned} f_1(y', x') = \mathrm{A}\,(y' - \alpha'_1 x')(y' - \alpha'_2 x')\ldots(y' - \alpha'_\mu x') \\ \times (y' - \beta'_1 x')(y' - \beta'_2 x')\ldots(y' - \beta'_\nu x') \\ \times (y' - \gamma'_1 x')(y' - \gamma'_2 x')\ldots(y' - \gamma'_\nu x') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{A}' = \mathrm{A}\,(m - n\alpha_1)(m - n\alpha_2)\ldots(m - n\alpha_\mu) \\ \times (m - n\beta_1)(m - n\beta_2)\ldots(m - n\beta_\nu) \\ \times (m - n\gamma_1)(m - n\gamma_2)\ldots(m - n\gamma_\nu). \end{aligned}$$

On pourra comme précédemment faire

$$\alpha'_i = -\frac{\mathrm{A}(\alpha_i)}{\mathrm{A}'}, \qquad \beta'_i = -\frac{\mathrm{A}(\beta_i)}{\mathrm{A}'}, \qquad \gamma'_i = -\frac{\mathrm{A}(\gamma_i)}{\mathrm{A}'},$$

et l'on obtiendra, par des raisonnements analogues,

$$\mathrm{A}' < 2^\nu \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}n} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}n} \mathbf{D},$$

en partant de la relation

$$\begin{aligned} \Delta_1(m - n\alpha_1)^2 + \Delta_2(m - n\alpha_2)^2 + \ldots + \Delta_\mu(m - n\alpha_\mu)^2 \\ + \Delta'_1(m - n\beta_1)(m - n\gamma_1) + \Delta'_2(m - n\beta_2)(m - n\gamma_2) + \ldots \\ + \Delta'_\nu(m - n\beta_\nu)(m - n\gamma_\nu) < \sqrt{\frac{4}{3}\Delta}. \end{aligned}$$

On aura encore les deux limites suivantes

$$\mathrm{A}(\alpha_i) < 2^\nu \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}n} \mathbf{D},$$

$$\mathrm{A}^2(\beta_i)(\gamma_i) < \left(\frac{1}{n-\nu}\right)^{n-\nu} \left(\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu-1} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}n} \mathbf{D}^2.$$

Ainsi le coefficient A′, les racines réelles et les modules des racines imaginaires sont limités comme je l'ai annoncé ; donc il en est de même de tous les nombres entiers qui forment les coefficients de la transformée $f_1(y', x')$.

Les principes précédents s'appliquent avec beaucoup de facilité aux formes cubiques et biquadratiques ; on observe alors cette circonstance remarquable que, pour chaque degré, c'est toujours la

même équation en **D** qui vient s'offrir, bien que les calculs par lesquels on y arrive diffèrent beaucoup, suivant le nombre des racines réelles et imaginaires, mais je n'ai pu jusqu'à présent découvrir la raison générale de ce fait important.

Le cas des formes binaires du second degré à facteurs réels, si distinct des autres, se rattache à une théorie très étendue fondée sur la réduction des formes quadratiques à un nombre quelconque d'indéterminées, et qui embrasse toutes les irrationnelles algébriques ; je la soumettrai dans un prochain Mémoire au jugement des Géomètres.

Paris, mars 1848.

SUR LA THÉORIE

DES

FORMES QUADRATIQUES TERNAIRES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, tome XL; 1850.

Un des principaux caractères des formes ternaires réduites, lorsqu'elles sont définies, consiste en ce que le produit des coefficients des trois carrés des variables est toujours inférieur au double du déterminant. C'est là, comme on sait, une limite précise, découverte d'abord par induction, puis démontrée par M. Gauss dans l'écrit si remarquable sur l'Ouvrage de M. Seeber. Mais les transformations analytiques de l'expression

$$D = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2$$

données par l'illustre géomètre, et desquelles résulte avec tant d'élégance la limite indiquée, me semblent tenir à des principes singulièrement cachés, et qu'il m'a été impossible de retrouver malgré tous mes efforts. Après de longues recherches, j'ai découvert enfin une méthode nouvelle pour obtenir la limite de M. Gauss, et je vais la développer dans cette Note, après avoir d'abord donné une démonstration simple de l'existence des caractères attribués par M. Seeber aux formes réduites.

Soit, en suivant la notation des *Disquisitiones arithmeticæ,*

$$f = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy$$

une forme définie positive à coefficients quelconques, car il n'y a aucunement lieu de les supposer entiers dans la théorie de la réduction. Considérons la série entière des transformées distinctes

équivalentes à f, et formons un groupe particulier de celles où le coefficient de l'un des carrés a la plus petite valeur possible.

Réunissons ensuite dans un second groupe toutes les formes du premier, où un autre coefficient des carrés est encore le plus petit possible. Enfin, formons un dernier groupe des formes précédentes, où le troisième coefficient des carrés est un minimum : je dis que les formes, ou la forme unique obtenue ainsi, offriront tous les caractères des réduites de M. Seeber.

Qu'on les représente, en effet, par

$$F = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = \begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix},$$

les diverses formes binaires

$$(A,\ B'',\ A'),\quad (A,\ B',\ A''),\quad (A',\ B,\ A'')$$

seront nécessairement réduites. Si, par exemple, (A', B, A'') ne l'était pas, en effectuant dans F la substitution propre à la réduire, on arriverait à une transformée équivalente, où l'un au moins des coefficients de y^2 et z^2 serait diminué, A restant le même; c'est donc à cette transformée que la méthode employée aurait conduit, et non à la proposée. Dans le cas où B, B', B'' sont négatifs, il faut encore arriver à la condition

$$A + A' > -2(B + B' + B''),$$

ou bien

$$A + A' + A'' + 2B + 2B' + 2B'' > A'',$$

A'' désignant le plus grand des coefficients des carrés. Pour cela, considérons la transformée équivalente à la proposée, obtenue par la substitution

$$x = X + Z,$$
$$y = Y + Z,$$
$$z = Z,$$

où les coefficients de X^2, Y^2, Z^2 seront respectivement, A, A', et $A + A' + A'' + 2B + 2B' + 2B''$; cette dernière quantité ne peut donc être inférieure à A'', car c'est encore à cette transformée et non à la proposée que la méthode eût conduit.

J'omettrai, pour abréger, l'algorithme de réduction auquel les caractères des formes réduites conduisent tout naturellement, car il ne me semble pas très important au point de vue de la théorie, et j'arrive à mon principal objet, à la condition

$$AA'A'' < 2D.$$

Tout repose sur le question suivante : $f(x, y, z)$ étant une forme définie quelconque, déterminer la limite précise du minimum de $f(x, y, 1)$, pour des valeurs entières de x et y.

Réduisons la forme binaire qui résulte des termes du second degré de $f(x, y, 1)$, par une substitution propre ou impropre

$$x = mX + nY,$$
$$y = \mu X + \nu Y,$$

de manière que le coefficient moyen de la transformée soit positif (c'est là une condition essentielle, pour les considérations géométriques que nous aurons à développer tout à l'heure), et posons

$$\begin{aligned} & f(mX + nY,\ \mu X + \nu Y,\ 1) \\ &= AX^2 + 2B''XY + A'Y^2 + 2BY + 2B'X + A'' = F. \end{aligned}$$

En désignant par α et β deux constantes convenablement choisies, on pourra faire

$$F = A(X+\alpha)^2 + 2B''(X+\alpha)(Y+\beta) + A'(Y+\beta)^2 + \frac{D}{\Delta},$$

D étant le déterminant de $f(x, y, z)$ et Δ celui de la forme binaire (A, B'', A') qui est réduite et où B'' est positif. Soient, enfin, ξ et η deux nombres entiers tels que $\xi + \alpha$ et $\eta + \beta$ soient positifs et moindres que l'unité ; je dis que le minimum de F correspondra à l'un des quatre systèmes de valeurs

$$\begin{array}{ll} X = \xi, & Y = \eta, \\ X = \xi - 1, & Y = \eta, \\ X = \xi, & Y = \eta - 1, \\ X = \xi - 1, & Y = \eta - 1. \end{array}$$

On sait, en effet, qu'une propriété essentielle des formes binaires réduites $\varphi(x, y)$ consiste dans la relation

$$\varphi(x-1, y) < \varphi(x, y),$$

si l'on a à la fois

$$x > y \quad \text{et} \quad x > 1,$$

ou bien encore

$$\varphi(x, y-1) < \varphi(x, y),$$

avec les conditions

$$y > x \quad \text{et} \quad y > 1.$$

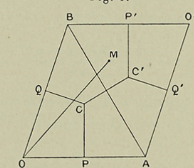
Les quatre systèmes de valeurs considérées sont d'ailleurs évidemment les seuls pour lesquels les valeurs absolues de $X + \alpha$, $Y + \beta$ soient inférieures à l'unité, et il nous reste à déterminer auquel de ces systèmes correspond le minimum absolu de F, ainsi qu'à trouver une limite précise de ce minimum.

Pour cela, j'aurai recours aux considérations géométriques suivantes :

Soit OAB un triangle tel qu'on ait

$$\overline{OA}^2 = A, \qquad \overline{OB}^2 = A', \qquad OA.OB \cos AOB = B'';$$

Fig. 1.



le carré de la distance à l'origine O, d'un point M dont les coordonnées obliques parallèles à OA et OB sont $OA.t$ et $OB.u$, sera précisément la valeur de la forme binaire $At^2 + 2B''tu + A'u^2$; et si on la désigne un instant pour abréger par $\varphi(t, u)$, on voit facilement qu'on aura les relations

$$\begin{array}{ll} \overline{MO}^2 = \varphi(t, u), & \overline{MA}^2 = \varphi(t-1, u), \\ \overline{MB}^2 = \varphi(t, u-1), & \overline{MO'}^2 = \varphi(t-1, u-1), \end{array}$$

en achevant le parallélogramme OABO'. Cela posé, il est maintenant facile de reconnaître quelle est la plus petite de ces quatre distances.

Soient C et C' les centres des cercles circonscrits aux triangles OAB, O'AB ; menons d'une part les perpendiculaires CP, CQ, sur les milieux de OA et OB, de l'autre les perpendiculaires C'Q', C'P', sur les milieux de O'A, O'B, et joignons CC'; selon que le point M tombera dans l'intérieur des figures

$$\mathrm{OPCQ},\quad \mathrm{PAQ'C'C},\quad \mathrm{C'Q'O'P'},\quad \mathrm{P'BQCC'},$$

le sommet le plus voisin sera

$$\mathrm{O},\quad \mathrm{A},\quad \mathrm{O'},\quad \mathrm{B}.$$

Mais, dans ces divers cas, la distance la plus grande au sommet correspondant ne surpassera jamais $\mathrm{CO} = \mathrm{CA} = \mathrm{AC'} = \mathrm{C'O'}, \ldots$, c'est-à-dire le rayon du cercle circonscrit au triangle OAB. Or un calcul bien simple donne

$$\overline{\mathrm{CO}}^2 = \frac{\mathrm{AA'}(\mathrm{A} + \mathrm{A'} - 2\mathrm{B''})}{4(\mathrm{AA'} - \mathrm{B''^2})}.$$

Nous voici donc conduits à cette limite précise du minimum de F ou de l'expression proposée $f(x, y, 1)$, savoir

$$f(x, y, 1) < \frac{\mathrm{AA'}(\mathrm{A} + \mathrm{A'} - 2\mathrm{B''})}{4\Delta} + \frac{\mathrm{D}}{\Delta}.$$

De là, comme on va voir, se déduit immédiatement la proposition que nous avions en vue. Désignons par

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$$

une forme définie réduite, où les coefficients a, a', a'' sont rangés par ordre croissant de grandeur; (a, b'', a') sera, comme on l'a vu, une forme binaire réduite, et nous pourrons toujours y supposer b'' positif. J'ajoute que a'' est le minimum de $f(x, y, 1)$ pour des valeurs entières de x et y, savoir pour $x = 0$, $y = 0$; s'il existait, en effet, deux entiers, m et n, pour lesquels on eût

$$f(m, n, 1) < a''$$

la substitution

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{X} + m\mathrm{Z}, \\ y &= \mathrm{Y} + n\,\mathrm{Z}, \\ z &= \phantom{\mathrm{X} + m}\mathrm{Z} \end{aligned}$$

donnerait une transformée équivalente, où a et a' seraient conservés, tandis que a'' serait remplacé par la valeur moindre

$f(m, n, 1)$; c'est donc cette transformée qui serait la réduite et non la proposée.

Nous pouvons ainsi, entre les coefficients de f, établir la relation obtenue plus haut, savoir

$$a'' < \frac{aa'(a - 2b'' + a')}{4(aa' - b''^2)} + \frac{\mathrm{D}}{aa' - b''^2}.$$

On en déduit

$$\mathrm{D} > a''(aa' - b''^2) - \tfrac{1}{4}aa'(a - 2b'' + a'),$$

d'où

$$2\mathrm{D} - aa'a'' > aa'a'' - 2a''b''^2 - \tfrac{1}{2}aa'(a - 2b'' + a').$$

Or le second membre de cette inégalité est essentiellement positif; en effet, pour la plus petite et la plus grande valeur de b'', savoir

$$b'' = 0 \quad \text{et} \quad b'' = \tfrac{1}{2}a,$$

il se réduit à

$$aa'a'' - \tfrac{1}{2}aa'(a + a') = aa'\left[\tfrac{1}{2}(a'' - a) + \tfrac{1}{2}(a'' - a')\right],$$

et à

$$aa'a'' - \tfrac{1}{2}a^2a'' - \tfrac{1}{2}aa'^2 = \tfrac{1}{2}aa''(a' - a) + \tfrac{1}{2}aa'(a'' - a');$$

quantités positives. Si donc pour des valeurs intermédiaires de b'' il pouvait devenir négatif, ce ne serait qu'à la condition de s'évanouir deux fois dans l'intervalle compris entre les limites $b'' = 0$, $b'' = \frac{1}{2}a$; mais cela est impossible, l'équation

$$aa'a'' - 2a''b''^2 - \tfrac{1}{2}aa'(a + a' - 2b'') = 0$$

ayant nécessairement ses racines de signes contraires.

On a donc toujours, comme nous voulions l'établir,

$$aa'a'' < 2\mathrm{D}.$$

Paris, avril 1850.