# SUR LA DIVISION

DES

# FONCTIONS ABÉLIENNES

## OU ULTRA-ELLIPTIQUES [1].

*Mémoires présentés par divers Savants étrangers*
*à l'Académie des Sciences,* Tome X.

L'objet principal du premier Mémoire d'Abel sur la théorie des fonctions elliptiques est la résolution des équations relatives à leur division en parties égales. Le beau résultat auquel il est parvenu, savoir, que cette résolution est toujours possible à l'aide de radicaux, en supposant connue la division de la fonction complète, peut être étendu aux transcendantes d'ordre plus élevé nommées par Legendre *fonctions ultra-elliptiques,* au moyen des nouveaux principes sur lesquels M. Jacobi a fondé leur théorie.

C'est ce qu'on va essayer de faire voir, en considérant d'abord les transcendantes qui sont l'objet du Mémoire intitulé : *De functionibus quadrupliciter periodicis quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur* (*Journal de Crelle,* t. 13, p. 55).

### I.

Soit

$$\Delta(x) = \sqrt{x(1-x)(1-p_1^2 x)(1-p_2^2 x)(1-p_3^2 x)}:$$

considérez les fonctions $x$ et $y$ déterminées par les deux équations

$$\int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\Delta(x)} + \int_0^y \frac{(\alpha+\beta y)\,dy}{\Delta(y)} = u,$$

$$\int_0^x \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\Delta(x)} + \int_0^y \frac{(\alpha'+\beta' y)\,dy}{\Delta(y)} = u',$$

(1) Ce Mémoire est signé de M. Hermite, élève de l'École Polytechnique.
E. P.



et soit

$$x = \lambda_0(u, u'), \qquad y = \lambda_1(u, u').$$

La propriété fondamentale de ces fonctions de deux variables consiste en ce que les quantités

$$\lambda_0(u+v, u'+v'), \quad \lambda_1(u+v, u'+v')$$

sont les racines d'une équation du second degré, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de

$$\begin{gathered}\lambda_0(u, u'), \quad \lambda_1(u, u'), \quad \Delta[\lambda_0(u, u')], \quad \Delta[\lambda_1(u, u')],\\ \lambda_0(v, v'), \quad \lambda_1(v, v'), \quad \Delta[\lambda_0(v, v')], \quad \Delta[\lambda_1(v, v')].\end{gathered}$$

Il en résulte que, quel que soit le nombre entier $n$, les deux fonctions

$$\lambda_0(nu, nu'), \quad \lambda_1(nu, nu')$$

seront pareillement les racines d'une équation du second degré à coefficients rationnels en

$$\lambda_0(u, u'), \quad \lambda_1(u, u'), \quad \Delta[\lambda_0(u, u')], \quad \Delta[\lambda_1(u, u')].$$

Cela fait voir que, par la résolution de deux équations algébriques, on pourra déterminer inversement

$$\lambda_0(u, u') \quad \text{et} \quad \lambda_1(u, u')$$

par

$$\lambda_0(nu, nu') \quad \text{et} \quad \lambda_1(nu, nu').$$

Représentons, pour abréger, par $x_n$ et $y_n$ les fonctions relatives aux arguments multiples $nu$, $nu'$, et soit

$$Ux_n^2 + U'x_n + U'' = 0$$

l'équation qui sert à les déterminer, au moyen de $x$ et $y$; j'ai trouvé qu'on pouvait mettre les coefficients sous la forme

$$P + Q\,\Delta(x)\,\Delta(y),$$

en désignant par P et Q des fonctions rationnelles de $x$ et $y$; mais cette remarque n'est pas essentielle pour ce qui va suivre. Je partirai de ce que les racines simultanées des équations

$$(1) \qquad \begin{cases} Ux_n^2 + U'x_n + U'' = 0, \\ Uy_n^2 + U'y_n + U'' = 0 \end{cases}$$

sont données, d'après M. Jacobi, par les formules suivantes, où l'on a

$$i_1 = 2\int_{-\infty}^{0} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{-1}\,\Delta(x)}, \qquad i_2 = 2\int_{0}^{1} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\Delta(x)},$$

$$i_3 = 2\int_{\frac{1}{p_2^2}}^{\frac{1}{p_3^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{-1}\,\Delta(x)}, \qquad i_4 = 2\int_{\frac{1}{p_3^2}}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\Delta(x)},$$

$$i'_1 = 2\int_{-\infty}^{0} \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{-1}\,\Delta(x)}, \qquad i'_2 = 2\int_{0}^{1} \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\Delta(x)},$$

$$i'_3 = 2\int_{\frac{1}{p_2^2}}^{\frac{1}{p_3^2}} \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{-1}\,\Delta(x)}, \qquad i'_4 = 2\int_{\frac{1}{p_3^2}}^{\infty} \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\Delta(x)};$$

savoir

$$= \lambda_0\left(u + \frac{mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4}{n},\ u' + \frac{mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4}{n}\right)$$

$$y = \lambda_1\left(u + \frac{mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4}{n},\ u' + \frac{mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4}{n}\right)$$

en attribuant aux nombres entiers $m$, $m'$, $m''$, $m'''$, les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Voici maintenant le théorème sur lequel repose leur résolution. Soit $f(x, y)$ une fonction rationnelle et symétrique de $x$ et $y$. $p, q, r, s$ quatre racines de l'équation binome $t^n = 1$. Faisons, pour abréger,

$$\mathrm{I} = mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4,$$

$$\mathrm{I}' = mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4,$$

on aura

$$\sum_0^{n-1}{}_{m'''}\sum_0^{n-1}{}_{m''}\sum_0^{n-1}{}_{m'}\sum_0^{n-1}{}_{m}\left\{f\left[\lambda_0\left(u+\frac{\mathrm{I}}{n},\ u'+\frac{\mathrm{I}'}{n}\right),\ \lambda_1\left(u+\frac{\mathrm{I}}{n},\ u'+\frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right]p^m q^{m'} r^{m''} s^{m'''}\right\}$$
$$= \sqrt[n]{\mathrm{A} + \mathrm{B}\,\Delta[\lambda_0(nu, nu')] + \mathrm{C}\,\Delta[\lambda_1(nu, nu')] + \mathrm{D}\,\Delta[\lambda_0(nu, nu')]\,\Delta[\lambda_1(nu, nu')]},$$

A, B, C, D, étant des fonctions rationnelles de $\lambda_0(nu, nu')$, $\lambda_1(nu, nu')$.

Le premier membre peut d'abord être ramené à une fonction rationnelle de $\lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(u, u')$, contenant d'ailleurs des quantités relatives aux arguments multiples. En effet, d'après la pro-



priété fondamentale des fonctions $\lambda$, le terme général

$$f\left[\lambda_0\left(u+\frac{\mathrm{I}}{n},\ u'+\frac{\mathrm{I}'}{n}\right),\ \lambda_1\left(u+\frac{\mathrm{I}}{n},\ u'+\frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right]$$

pourra être exprimé rationnellement en fonction de

$$\lambda_0(u, u'), \qquad \lambda_1(u, u'), \qquad \Delta[\lambda_0(u, u')], \qquad \Delta[\lambda_1(u, u')]$$

et des quantités analogues relatives à la division des indices : or, on trouve aisément les formules

$$\Delta(x) = (\alpha + \beta x)\frac{dx}{du} + (\alpha' + \beta' x)\frac{dx}{du'},$$

$$\Delta(y) = (\alpha + \beta y)\frac{dy}{du} + (\alpha' + \beta' y)\frac{dy}{du'},$$

desquelles il résulte que les radicaux

$$\Delta[\lambda_0(u, u')], \qquad \Delta[\lambda_1(u, u')]$$

s'exprimeront eux-mêmes rationnellement en $\lambda_0(u, u')$ et $\lambda_1(u, u')$, car, en faisant disparaître les irrationnelles des équations, puis les différentiant successivement par rapport à $u$ et $u'$, on obtiendra les dérivées partielles en fonction rationnelle de $\lambda_0(u, u')$ et $\lambda_1(u, u')$.

Représentons pour un instant ce premier nombre par $\varphi(u, u')$; on démontrera aisément, au moyen des propriétés relatives à la périodicité des fonctions $\lambda$, l'égalité suivante

$$\varphi\left(u + \frac{ki_1\sqrt{-1} + k'i_2 + k''i_3\sqrt{-1} + k'''i_4}{n},\ u' + \frac{ki'_1\sqrt{-1} + k'i'_2 + k''i'_3\sqrt{-1} + k'''i'_4}{n}\right)$$
$$= p^{-k}q^{-k'}r^{-k''}s^{-k'''}\varphi(u, u'),$$

quels que soient les entiers $k$, $k'$, $k''$, $k'''$.

En l'élevant à la puissance $n$, on obtient donc une fonction rationnelle de $\lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(u, u')$, qui ne change point en substituant à ces quantités deux autres quelconques des racines simultanées des équations proposées. Il résulte de là, et de la théorie des fonctions symétriques des racines d'un système d'équations à plusieurs inconnues, que cette fonction pourra être déterminée rationnellement par les coefficients des équations proposées.

Mais comme il a été introduit précédemment les dérivées partielles de $\lambda_0(nu, nu')$, $\lambda_1(nu, nu')$, on pourra les éliminer par les formules suivantes

$$(\alpha\beta' - \beta\alpha')\frac{dx}{du} = \frac{\Delta(x)}{y-x}(\alpha' + \beta' y), \qquad (\alpha'\beta - \beta'\alpha)\frac{dx}{du'} = \frac{\Delta(x)}{y-x}(\alpha + \beta y),$$

$$(\alpha\beta' - \beta\alpha')\frac{dy}{du} = \frac{\Delta(y)}{x-y}(\alpha' + \beta' x), \qquad (\alpha'\beta - \beta'\alpha)\frac{dy}{du'} = \frac{\Delta(y)}{x-y}(\alpha + \beta x),$$

appliquées, bien entendu, aux quantités $x_n$, $y_n$.

Il suffit maintenant, pour achever la démonstration du théorème énoncé, d'observer que toute fonction rationnelle des deux radicaux

$$\Delta[\lambda_0(nu, nu')], \qquad \Delta[\lambda_1(nu, nu')]$$

peut être mise sous la forme

$$A + B\Delta[\lambda_0(nu, nu')] + C\Delta[\lambda_1(nu, nu')] + D\Delta[\lambda_0(nu, nu')]\Delta[\lambda_1(nu, nu')].$$

En supposant successivement

$$f(x, y) = x + y \quad \text{et} \quad f(x, y) = xy,$$

le théorème précédent donnera, exprimés par une somme de $n^4 - 1$ radicaux $n^{\text{ièmes}}$, les coefficients d'une équation du second degré, dont les racines détermineront, en dernière analyse, celles des équations proposées. On le verra facilement, en considérant le système des équations linéaires qu'on obtiendrait en attribuant à $p$, $q$, $r$, $s$, leurs diverses valeurs. J'ajouterai ici, mais sans m'arrêter à le démontrer, que les $n^4 - 1$ radicaux dont je viens de parler peuvent s'exprimer rationnellement par quatre d'entre eux.

## II.

Pour obtenir la division des indices, faisons

$$nu = ki_1\sqrt{-1} + k'i_2 + k''i_3\sqrt{-1} + k'''i_4,$$
$$nu' = ki'_1\sqrt{-1} + k'i'_2 + k''i'_3\sqrt{-1} + k'''i'_4;$$

on aura

$$x_n = 0, \qquad y_n = 0,$$

et les équations à résoudre seront

$$U' = 0, \qquad U'' = 0. \tag{2}$$



Leurs racines seront données par les formules

$$x = \lambda_0\left(\frac{mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4}{n}, \frac{mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4}{n}\right),$$

$$y = \lambda_1\left(\frac{mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4}{n}, \frac{mi_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4}{n}\right),$$

en attribuant aux nombres $m$, $m'$, $m''$, $m'''$, les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$; mais si l'on suppose le nombre $n$ premier et si l'on fait

$$\left\{\begin{aligned}
I_1 &= i_1\sqrt{-1},\\
I_2 &= mi_1\sqrt{-1} + i_2,\\
I_3 &= mi_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + i_3\sqrt{-1},\\
I_4 &= mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + i_4,\\
I'_1 &= i'_1\sqrt{-1},\\
I'_2 &= mi'_1\sqrt{-1} + i'_2,\\
I'_3 &= mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + i'_3\sqrt{-1},\\
I'_4 &= mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + i'_4,
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

il est aisé de voir qu'on peut les remplacer par les suivantes

$$x = \lambda_0\left(\mu\frac{I_1}{n}, \mu\frac{I'_1}{n}\right), \qquad y = \lambda_1\left(\mu\frac{I_1}{n}, \mu\frac{I'_1}{n}\right),$$
$$x = \lambda_0\left(\mu\frac{I_2}{n}, \mu\frac{I'_2}{n}\right), \qquad y = \lambda_1\left(\mu\frac{I_2}{n}, \mu\frac{I'_2}{n}\right),$$
$$x = \lambda_0\left(\mu\frac{I_3}{n}, \mu\frac{I'_3}{n}\right), \qquad y = \lambda_1\left(\mu\frac{I_3}{n}, \mu\frac{I'_3}{n}\right),$$
$$x = \lambda_0\left(\mu\frac{I_4}{n}, \mu\frac{I'_4}{n}\right), \qquad y = \lambda_1\left(\mu\frac{I_4}{n}, \mu\frac{I'_4}{n}\right),$$

en supposant à $m$, $m'$, $m''$, les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$ et à $\mu$, les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Cependant, si l'on observe que

$$\lambda_0(-u, -u') = \lambda_0(u, u'),$$
$$\lambda_1(-u, -u') = \lambda_1(u, u'),$$

comme on peut aisément le démontrer, on verra qu'il suffit de faire

$$\mu = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2},$$

conjointement avec les autres valeurs de $m$, $m'$, $m''$; car, passé le terme $\frac{n-1}{2}$, on ne ferait plus que reproduire les valeurs déjà obtenues.

Cela posé, soient $\rho$ une racine primitive, par rapport au nombre premier $n$, I, l'une quelconque des quantités comprises dans la formule $mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4$, I' la quantité correspondante relative à l'argument $u'$, et $f(x, y)$ une fonction rationnelle et symétrique de $x$ et $y$; considérez l'expression

$$(4)\qquad \sum_{0}^{\frac{1}{2}(n-1)-1}{}_k\, f\left[\lambda_0\left(\rho^k\frac{\mathrm{I}}{n},\ \rho^k\frac{\mathrm{I}'}{n}\right),\quad \lambda_1\left(\rho^k\frac{\mathrm{I}}{n},\ \rho^k\frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right]\theta^k,$$

où $\theta$ est une racine de $t^{n-1}=1$; le terme général pourra s'exprimer rationnellement en

$$\lambda_0\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right),\quad \lambda_1\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$$

et

$$\Delta\left[\lambda_0\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right],\quad \Delta\left[\lambda_1\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right].$$

Or, on a vu précédemment que, pour toute valeur des arguments $u$ et $u'$, les radicaux

$$\Delta[\lambda_0(u, u')],\quad \Delta[\lambda_1(u, u')]$$

s'expriment rationnellement au moyen de

$$\lambda_0(u, u'),\quad \lambda_1(u, u')$$

et des quantités relatives aux arguments multiples; ainsi, on pourra transformer l'expression (4) en une fonction rationnelle et symétrique de $\lambda_0\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$, que je représenterai, pour abréger, par $\varphi\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$.

Or, si dans l'égalité

$$\varphi\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)=\sum_{0}^{\frac{1}{2}(n-1)-1}{}_k\, f\left[\lambda_0\left(\rho^k\frac{\mathrm{I}}{n},\ \rho^k\frac{\mathrm{I}'}{n}\right),\quad \lambda_1\left(\rho^k\frac{\mathrm{I}}{n},\ \rho^k\frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right]\theta^k,$$

on remplace I et I' par $\rho^h$I et $\rho^h$I', on trouvera aisément

$$\varphi\left(\rho^h\frac{\mathrm{I}}{n},\ \rho^h\frac{\mathrm{I}'}{n}\right)=\theta^{-h}\varphi\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right).$$



Cela posé, comme le nombre $\rho^h$ équivaut, suivant le module $n$, à un nombre quelconque $\mu$ pour une valeur convenable de $h$, en faisant

$$\psi\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)=\varphi^{\frac{1}{2}(n-1)}\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right),$$

on aura

$$\psi\left(\mu\frac{\mathrm{I}}{n},\ \mu\frac{\mathrm{I}'}{n}\right)=\psi\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right).$$

Si donc on donne à I et I' toutes les valeurs correspondantes comprises dans les formules (3), en attribuant à $m$, $m'$, $m''$ les valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

on pourra former une équation dont les racines seront les valeurs correspondantes de la fonction $\psi$, et dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de ceux des équations proposées. Il est bien facile de voir, d'après les expressions (3), que son degré sera $1+n+n^2+n^3$; or, il suffira d'en connaître une seule racine pour résoudre les équations (2).

En effet, si nous considérons une de ces racines, et si nous la désignons par $(\theta)$ pour rappeler qu'elle dépend de la quantité $\theta$ qui entre dans l'expression (4), on aura

$$(\theta)^{\frac{1}{\frac{1}{2}(n-1)}}=\sum f\left[\lambda_0\left(\rho^k\frac{\mathrm{I}}{n},\ \rho^k\frac{\mathrm{I}'}{n}\right),\quad \lambda_1\left(\rho^k\frac{\mathrm{I}}{n},\ \rho^k\frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right]\theta^k,$$

d'où, en substituant successivement à $\theta$ toutes les racines de $x^{\frac{1}{2}(n-1)}=1$, $\theta$, $\theta'$, $\theta''$, $\ldots$, $\theta^{\left[\frac{1}{2}(n-5)\right]}$, $1$, et ajoutant membre à membre les équations résultantes

$$f\left[\lambda_0\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right),\quad \lambda_1\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right]$$
$$=(\theta)^{\frac{1}{\frac{1}{2}(n-1)}}+(\theta')^{\frac{1}{\frac{1}{2}(n-1)}}+(\theta'')^{\frac{1}{\frac{1}{2}(n-1)}}+\ldots+(1)^{\frac{1}{\frac{1}{2}(n-1)}};$$

donc, en faisant $f(x, y)=x+y$, puis $f(x, y)=xy$, on connaîtra par là les coefficients d'une équation du second degré dont les racines déterminent, en dernière analyse, celle des équations proposées.

## III.

Des considérations toutes semblables aux précédentes s'appliquent aux autres classes des fonctions ultra-elliptiques, et il suffira, pour le faire voir, d'établir les formules suivantes.

Soit

$$\Delta(x)=\sqrt{x(1-x)(1-p_1^2x)\ldots(1-p_{2n+1}^2x)},$$
$$\theta_k(x)=\alpha_k+\beta_kx+\gamma_kx^2+\ldots+\eta_kx^n.$$

Posons

$$u_0=\sum_0^n{}_h\int_0^{x_h}\frac{\theta_0(x)\,dx}{\Delta(x)},\qquad u_1=\sum_0^n{}_h\int_0^{x_h}\frac{\theta_1(x)dx}{\Delta(x)},\qquad\ldots,$$
$$u_n=\sum_0^n{}_h\int_0^{x_h}\frac{\theta_n(x)\,dx}{\Delta(x)},$$

et considérons, d'après M. Jacobi, $x_0, x_1, \ldots, x_n$, comme déterminés par ces équations en fonction de $u_0, u_1, \ldots, u_n$, de sorte qu'on ait

$$x_0=\lambda_0(u_0,u_1,\ldots,u_n),\qquad x_1=\lambda_1(u_0,u_1,\ldots,u_n),\qquad\ldots,$$
$$x_n=\lambda_n(u_0,u_1,\ldots,u_n).$$

En les différentiant, par rapport à $u_0$, il viendra

$$1=\sum_1^n{}_h\frac{dx_h}{du_0}\frac{\theta_0(x_h)}{\Delta(x_h)},\quad 0=\sum_0^n{}_h\frac{dx_h}{du_0}\frac{\theta_1(x_h)}{\Delta(x_h)},\quad\ldots,\quad 0=\sum_0^n{}_h\frac{dx_h}{du_0}\frac{\theta_h(x_h)}{\Delta(x_h)},$$

et si on les ajoute après les avoir respectivement multipliées, à partir de la seconde, par des quantités $t_1, t_2, \ldots, t_n$, telles que

$$\theta_0(x_1)+t_1\theta_1(x_1)+t_2\theta_2(x_1)+\ldots+t_n\theta_n(x_1)=0,$$
$$\theta_0(x_2)+t_1\theta_1(x_2)+t_2\theta_2(x_2)+\ldots+t_n\theta_n(x_2)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\theta_0(x_n)+t_1\theta_1(x_n)+t_2\theta_2(x_n)+\ldots+t_n\theta_n(x_n)=0,$$

on trouvera, en faisant, pour abréger,

$$D=\theta_0(x_0)+t_1\theta_1(x_0)+t_2\theta_2(x_0)+\ldots+t_n\theta_n(x_0),$$
$$\frac{dx_0}{du_0}=\frac{\Delta(x_0)}{D},$$



et il est bien aisé de voir qu'en différentiant par rapport à $u_1$, $u_2, \ldots, u_n$, on aurait d'une manière semblable

$$\frac{dx_0}{du_1}=\frac{t_1\Delta(x_0)}{D},\qquad\frac{dx_0}{du_2}=\frac{t_2\Delta(x_0)}{D},\qquad\ldots,\qquad\frac{dx_0}{du_n}=\frac{t_n\Delta(x_0)}{D}.$$

Ces formules font d'abord voir comment le radical $\Delta(x_0)$ s'exprime rationnellement par l'une quelconque des dérivées partielles de $x_0$ et les fonctions $x_0, x_1, \ldots, x_n$; mais en ajoutant les équations précédentes, après les avoir multipliées, la première par $\theta_0(x_0)$, la seconde par $\theta_1(x_0)$, et ainsi de suite, on obtient cette expression

$$\Delta(x_0)=\theta_0(x_0)\frac{dx_0}{du_0}+\theta_1(x_0)\frac{dx_0}{du_1}+\ldots+\theta_n(x_0)\frac{dx_0}{du_n},$$

et il est clair qu'on aurait de même

$$\Delta(x_1)=\theta_0(x_1)\frac{dx_1}{du_0}+\theta_1(x_1)\frac{dx_1}{du_1}+\ldots+\theta_n(x_1)\frac{dx_1}{du_n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Delta(x_n)=\theta_0(x_n)\frac{dx_n}{du_0}+\theta_1(x_n)\frac{dx_n}{du_1}+\ldots+\theta_n(x_n)\frac{dx_n}{du_n}.$$

Les propriétés relatives à la périodicité des fonctions $\lambda$ sont comprises dans le théorème suivant.

Soit

$$i_1^{(k)}=2\int_0^1\frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)},\qquad i_2^{(k)}=2\int_1^{\frac{1}{p_1^2}}\frac{\theta_k(x)dx}{\Delta(x)},$$
$$i_3^{(k)}=2\int_{\frac{1}{p_1^2}}^{\frac{1}{p_2^2}}\frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)},\qquad\ldots,\qquad i_{2n+2}^{(k)}=2\int_{\frac{1}{p_{2n}^2}}^{\frac{1}{p_{2n+1}^2}}\frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)}$$

et

$$I^{(k)}=m_1i_1^{(k)}+m_2i_2^{(k)}+m_3i_3^{(k)}+\ldots+m_{2n+2}i_{2n+2}^{(k)},$$

quels que soient les entiers $m_1, m_2, \ldots$, on aura

$$\lambda_0(u_0+I^{(0)},u_1+I^{(1)},\ldots,u_n+I^{(n)})=\lambda_0(u_0,u_1,\ldots,u_n),$$
$$\lambda_1(u_0+I^{(0)},u_1+I^{(1)},\ldots,u_n+I^{(n)})=\lambda_1(u_0,u_1,\ldots,u_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\lambda_n(u_0+I^{(0)},u_1+I^{(1)},\ldots,u_n+I^{(n)})=\lambda_n(u_0,u_1,\ldots,u_n).$$

Parmi les $2n+2$ indices de périodicité, $n+1$ seront réels, savoir

$$2i_1,\quad 2i_3,\quad \ldots,\quad 2i_{2n+1},$$

et les autres imaginaires, et de la forme $a\sqrt{-1}$, où $a$ est réel. Ainsi, pour le cas de $n=1$, on trouverait les indices

$$2\int_0^1 \frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)},\quad 2\int_1^{\frac{1}{p_1^2}} \frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)},\quad 2\int_{\frac{1}{p_1^2}}^{\frac{1}{p_2^2}} \frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)},\quad 2\int_{\frac{1}{p_2^2}}^{\frac{1}{p_3^2}} \frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)},$$

$k$ étant 0 ou 1, et ils se ramènent à ceux de M. Jacobi par ces équations

$$\int_{-\infty}^0 \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\Delta(x)} + \int_{\frac{1}{p_2^2}}^{\frac{1}{p_3^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\Delta(x)} = \int_1^{\frac{1}{p_1^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\Delta(x)},$$

$$\int_0^1 \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\Delta(x)} + \int_{\frac{1}{p_3^2}}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\Delta(x)} = \int_{\frac{1}{p_1^2}}^{\frac{1}{p_2^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\Delta(x)}.$$

Enfin, la propriété fondamentale des fonctions $\lambda$, et qui est relative à l'addition des arguments, consiste en ce que les quantités

$$\lambda_0(u_0+v_0, u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n),\quad \lambda_1(u_0+v_0, u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n),\quad \ldots,$$
$$\lambda_n(u_0+v_0, u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n)$$

sont les racines d'une équation de degré $n+1$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de

$$\begin{array}{llll}
\lambda_0(u_0, u_1, \ldots, u_n), & \lambda_1(u_0, u_1, \ldots, u_n), & \ldots, & \lambda_n(u_0, u_1, \ldots, u_n), \\
\Delta[\lambda_0(u_0, u_1, \ldots, u_n)], & \Delta[\lambda_1(u_0, u_1, \ldots, u_n)], & \ldots, & \Delta[\lambda_n(u_0, u_1, \ldots, u_n)], \\
\lambda_0(v_0, v_1, \ldots, v_n), & \lambda_1(v_0, v_1, \ldots, v_n), & \ldots, & \lambda_n(v_0, v_1, \ldots, v_n), \\
\Delta[\lambda_0(v_0, v_1, \ldots, v_n)], & \Delta[\lambda_1(v_0, v_1, \ldots, v_n)], & \ldots, & \Delta[\lambda_n(v_0, v_1, \ldots, v_n)].
\end{array}$$

SUR

# LA THÉORIE DES TRANSCENDANTES

## A DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES.

EXTRAIT D'UNE LETTRE A M. LIOUVILLE.

*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XVIII.

J'ai essayé d'introduire, dans l'analyse des transcendantes à différentielles algébriques quelconques, des fonctions inverses de plusieurs variables, à l'exemple de ce qui a été fait par M. Jacobi pour les fonctions abéliennes. Je vais passer rapidement en revue les principaux résultats que j'ai obtenus, en réservant les démonstrations et les développements accessoires pour un Mémoire que j'espère bientôt avoir l'honneur de présenter à l'Académie.

### I.

En suivant la marche tracée par M. Jacobi dans le célèbre Mémoire intitulé *Considerationes generales de transcendentibus Abelianis*, j'ai été conduit d'abord à rechercher le système d'équations différentielles ordinaires dont les intégrales complètes sont données par le théorème d'Abel, considéré dans toute son étendue. Cette recherche, au reste, était assez facile en s'aidant des résultats consignés par Abel lui-même dans le Mémoire couronné par l'Académie des Sciences [1].

[1] Tome VII des *Savants étrangers*. *Voyez* aussi un élégant Mémoire de Minding, publié dans le *Journal de Crelle*, t. 23.

Soit, en suivant les notations d'Abel,

$$\chi(y) = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots + p_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0$$

une équation algébrique quelconque irréductible, dont tous les coefficients sont des fonctions rationnelles et entières d'une même variable $x$.

Nommons ses racines

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \ldots, \quad y_n,$$

et désignons par

$$(1) \qquad f(x, y) = t_0 + t_1 y + t_2 y^2 + \ldots + t_{n-2} y^{n-2}$$

une fonction rationnelle et entière de $x$ et $y$, dans laquelle le degré d'un coefficient quelconque $t_m$ soit pris égal au nombre entier immédiatement inférieur à la somme, diminuée d'une unité, des $n - m - 1$ plus grands exposants des développements de chaque racine $y$ suivant les puissances descendantes de $x$.

Soit enfin $\gamma$ le nombre des coefficients arbitraires contenus dans $f(x, y)$; cette fonction sera susceptible d'un nombre $\gamma$ de formes différentes que je représenterai par

$$f_1(x, y), \quad f_2(x, y), \quad \ldots, \quad f_\gamma(x, y).$$

Cela posé, en désignant par

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_\mu,$$

des variables en nombre quelconque $\mu$ plus grand que $\gamma$, et par

$$y_{(1)}, \quad y_{(2)}, \quad \ldots, \quad y_{(\mu)}$$

des fonctions irrationnelles choisies arbitrairement parmi les $n$ racines

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n,$$

on aura, au moyen du théorème d'Abel, sous forme algébrique, les intégrales complètes du système des équations

$$\begin{aligned}
&\frac{f_1(x_1, y_{(1)})}{\chi'(y_{(1)})}\,dx_1 + \frac{f_1(x_2, y_{(2)})}{\chi'(y_{(2)})}\,dx_2 + \ldots + \frac{f_1(x_\mu, y_{(\mu)})}{\chi'(y_{(\mu)})}\,dx_\mu = 0,\\
&\frac{f_2(x_1, y_{(1)})}{\chi'(y_{(1)})}\,dx_1 + \frac{f_2(x_2, y_{(2)})}{\chi'(y_{(2)})}\,dx_2 + \ldots + \frac{f_2(x_\mu, y_{(\mu)})}{\chi'(y_{(\mu)})}\,dx_\mu = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{f_\gamma(x_1, y_{(1)})}{\chi'(y_{(1)})}\,dx_1 + \frac{f_\gamma(x_2, y_{(2)})}{\chi'(y_{(2)})}\,dx_2 + \ldots + \frac{f_\gamma(x_\mu, y_{(\mu)})}{\chi'(y_{(\mu)})}\,dx_\mu = 0.
\end{aligned}$$



Il est inutile de dire que, dans chacune des racines $y_{(1)}$, ou $y_{(2)}$, ..., on remplace la quantité $x$ par la variable $x_1$ ou $x_2$, ..., du terme où elle entre.

## II.

D'après cela, je prendrai pour fonctions inverses les quantités

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_\gamma,$$

définies par les $\gamma$ équations suivantes

$$(2) \quad \left\{\begin{array}{ll}
\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\gamma} \int_0^{x_k} \frac{f_1(x_k, y_{(k)})}{\chi'(y_{(k)})}\,dx_k = u_1, & \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\gamma} \int_0^{x_k} \frac{f_2(x_k, y_{(k)})}{\chi'(y_{(k)})}\,dx_k = u_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\gamma} \int_0^{x_k} \frac{f_\gamma(x_k, y_{(k)})}{\chi'(y_{(k)})}\,dx_k = u_\gamma;
\end{array}\right.$$

et je poserai, en conséquence,

$$x_1 = \lambda_1(u_1, u_2, \ldots, u_\gamma), \quad x_2 = \lambda_2(u_1, u_2, \ldots, u_\gamma), \quad \ldots,$$
$$x_\gamma = \lambda_\gamma(u_1, u_2, \ldots, u_\gamma).$$

Cela étant, les intégrales du système d'équations différentielles considéré plus haut, intégrales fournies immédiatement par le théorème d'Abel, donnent sans difficulté, par un changement convenable de constantes, le théorème fondamental, qui consiste en ce que les $\gamma$ fonctions

$$\lambda_k(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots u_\gamma + v_\gamma)$$

sont les racines d'une équation de degré $\gamma$ dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des diverses fonctions

$$\lambda_k(u_1, u_2, \ldots, u_\gamma),$$
$$\lambda_k(v_1, v_2, \ldots, v_\gamma),$$

et des valeurs correspondantes de celles des racines $y$ que l'on a fait entrer dans les équations (2).

## III.

De là découle cette propriété importante des fonctions inverses, qui consiste dans la coexistence d'une série d'indices de périodicité pour tous les arguments, et qui montre toute l'étendue de ce caractère singulier, dont un admirable Mémoire de M. Jacobi a révélé depuis longtemps l'existence dans les fonctions abéliennes. Considérons l'équation

$$\chi'(y_1)\,\chi'(y_2)\,\chi'(y_3)\ldots\chi'(y_n) = 0,$$

dont le premier membre, comme on sait, s'exprime par une fonction entière de $x$. Chacune de ses racines jouit de la propriété de rendre égales deux des racines $y$ de l'équation

$$\chi(y) = 0.$$

Supposons donc que $y_{(1)}$ devienne égale à une autre racine $y_{[1]}$ pour les diverses valeurs

$$x = \alpha'_1,\ \alpha''_1,\ \alpha'''_1,\ \ldots,\ \alpha_1^{(n_1)};$$

de même que

$$y_{(2)} = y_{[2]}$$

pour

$$x = \alpha'_2,\ \alpha''_2,\ \alpha'''_2,\ \ldots,\ \alpha_2^{(n_2)},$$

et

$$y_{(3)} = y_{[3]}$$

pour

$$x = \alpha'_3,\ \alpha''_3,\ \alpha'''_3,\ \ldots,\ {}_3^{(n_3)},$$

et ainsi de suite.

Faisons, pour abréger l'écriture,

$$\frac{f_k(x, y_{(1)})}{\chi'(y_{(1)})} - \frac{f_k(x, y_{[1]})}{\chi'(y_{[1]})} = (k, 1),$$

$$\frac{f_k(x, y_{(2)})}{\chi'(y_{(2)})} - \frac{f_k(x, y_{[2]})}{\chi'(y_{[2]})} = (k, 2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{f_k(x, y_{(\gamma)})}{\chi'(y_{(\gamma)})} - \frac{f_k(x, y_{[\gamma]})}{\chi'(y_{[\gamma]})} = (k, \gamma);$$

et désignons par les lettres $m$ des nombres entiers positifs ou



négatifs. Si l'on pose

$$\mathrm{I}_k = \sum_{n=1}^{n=n_1-1} m_1^{(n)} \int_{\alpha_1^{(n)}}^{\alpha_1^{(n+1)}} (k, 1)\,dx + \sum_{n=1}^{n=n_2-1} m_2^{(n)} \int_{\alpha_2^{(n)}}^{\alpha_2^{(n+1)}} (k, 2)\,dx + \ldots$$
$$+ \sum_{n=1}^{n=n_\gamma-1} m_\gamma^{(n)} \int_{\alpha_\gamma^{(n)}}^{\alpha_\gamma^{(n+1)}} (k, \gamma)\,dx,$$

on aura ce théorème :

*Une fonction rationnelle et symétrique quelconque des $\gamma$ fonctions inverses conservera la même valeur en ajoutant simultanément aux divers arguments*

$$u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad \ldots,\quad u_\gamma$$

*les quantités constantes*

$$\mathrm{I}_1,\quad \mathrm{I}_2,\quad \mathrm{I}_3,\quad \ldots,\quad \mathrm{I}_\gamma.$$

Par une autre méthode, indépendante du théorème sur l'addition des arguments, mais qu'il serait trop long d'indiquer ici, on obtient directement les égalités

$$\lambda_1(u_1 + \mathrm{I}_1,\ u_2 + \mathrm{I}_2,\ \ldots,\ u_\gamma + \mathrm{I}_\gamma) = \lambda_1(u_1, u_2, \ldots, u_\gamma),$$
$$\lambda_2(u_1 + \mathrm{I}_1,\ u_2 + \mathrm{I}_2,\ \ldots,\ u_\gamma + \mathrm{I}_\gamma) = \lambda_2(u_1, u_2, \ldots, u_\gamma),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\lambda_\gamma(u_1 + \mathrm{I}_1,\ u_2 + \mathrm{I}_2,\ \ldots,\ u_\gamma + \mathrm{I}_\gamma) = \lambda_\gamma(u_1, u_2, \ldots, u_\gamma).$$

## IV

Les racines de l'équation

$$\chi'(y_1)\,\chi'(y_2)\ldots\chi'(y_n) = 0,$$

qui se sont présentées comme limites des intégrales qui entrent dans l'expression des indices de périodicité, jouissent de la propriété générale d'être les valeurs maxima ou minima des fonctions inverses. Cela résulte des expressions de leurs différences partielles que je vais rapporter.

Soit

$$\mathrm{F}(x, y) = \mu_1 f_1(x, y) + \mu_2 f_2(x, y) + \ldots + \mu_\gamma f_\gamma(x, y); \tag{3}$$

concevons qu'on détermine les constantes $\mu$ par les $\gamma - 1$ conditions

$$\mathrm{F}(x_2, y_{(2)}) = 0, \qquad \mathrm{F}(x_3, y_{(3)}) = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{F}(x_\gamma, y_{(\gamma)}) = 0.$$

Nommons $\mathrm{F}_1(x, y)$ ce que devient alors l'expression (3); les équations (2) donneront sans peine

$$\frac{dx_1}{du_1} = \frac{\mu_1 \chi'(y_{(1)})}{\mathrm{F}_1(x_1, y_{(1)})}, \qquad \frac{dx_1}{du_2} = \frac{\mu_2 \chi'(y_{(1)})}{\mathrm{F}_1(x_1, y_{(1)})}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_1}{du_\gamma} = \frac{\mu_\gamma \chi'(y_{(1)})}{\mathrm{F}_1(x_1, y_{(1)})}.$$

De même, si l'on appelle $\mathrm{F}_2(x, y)$ la fonction $\mathrm{F}(x, y)$ déterminée par les conditions

$$\mathrm{F}(x_1, y_{(1)}) = 0, \qquad \mathrm{F}(x_3, y_{(3)}) = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{F}(x_\gamma, y_{(\gamma)}) = 0,$$

on aura

$$\frac{dx_2}{du_1} = \frac{\mu_1 \chi'(y_{(2)})}{\mathrm{F}_2(x_2, y_{(2)})}, \qquad \frac{dx_2}{du_2} = \frac{\mu_2 \chi'(y_{(2)})}{\mathrm{F}_2(x_2, y_{(2)})}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_2}{du_\gamma} = \frac{\mu_\gamma \chi'(y_{(2)})}{\mathrm{F}_2(x_2, y_{(2)})},$$

et ainsi de suite; d'où résulte la proposition énoncée.

De ce qui précède on tire des équations linéaires aux différences partielles qui méritent d'être indiquées, savoir

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1, y_{(1)}) \frac{dx_1}{du_1} + f_2(x_1, y_{(1)}) \frac{dx_1}{du_2} + \ldots + f_\gamma(x_1, y_{(1)}) \frac{dx_1}{du_\gamma} = \chi'(y_{(1)}),\\
&f_1(x_2, y_{(2)}) \frac{dx_2}{du_1} + f_2(x_2, y_{(2)}) \frac{dx_2}{du_2} + \ldots + f_\gamma(x_2, y_{(2)}) \frac{dx_2}{du_\gamma} = \chi'(y_{(2)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&f_1(x_\gamma, y_{(\gamma)}) \frac{dx_\gamma}{du_1} + f_2(x_\gamma, y_{(\gamma)}) \frac{dx_\gamma}{du_2} + \ldots + f_\gamma(x_\gamma, y_{(\gamma)}) \frac{dx_\gamma}{du_\gamma} = \chi'(y_{(\gamma)}).
\end{aligned}$$

Remarquons enfin cette conséquence que, l'équation

$$f_1(x, y) \frac{dx_1}{du_1} + f_2(x, y) \frac{dx_1}{du_2} + \ldots + f_\gamma(x, y) \frac{dx_1}{du_\gamma} = 0$$

étant satisfaite par

$$\begin{aligned}
x &= x_2, & y &= y_{(2)},\\
x &= x_3, & y &= y_{(3)},\\
&\ldots\ldots, & &\ldots\ldots,\\
x &= x_\gamma, & y &= y_{(\gamma)},
\end{aligned}$$

on peut, au moyen des différences partielles de l'une des fonctions inverses, déterminer algébriquement les $\gamma - 1$ autres.



## V.

Le théorème relatif à l'addition des arguments conduit encore à exprimer les fonctions inverses dans toute leur généralité, au moyen des cas particuliers les plus simples, où l'on ne suppose successivement qu'un argument variable, les autres étant égaux à des constantes quelconques, à zéro par exemple.

Ce genre de réduction, qui est dû à M. Jacobi, se retrouve dans une autre partie de la théorie, comme on va le voir.

En nous bornant, pour plus de simplicité, aux fonctions de la première classe des transcendantes abéliennes, considérons la différentielle totale

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{\sqrt{f(x)}}\, dx + \frac{\mathrm{F}(y)}{\sqrt{f(y)}}\, dy,$$

où $\mathrm{F}(x)$ est une fonction rationnelle quelconque, et $f(x)$ un polynome du cinquième ou du sixième degré. Si l'on substitue aux variables $x$ et $y$ les variables $u$ et $v$ des fonctions inverses définies par les équations

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} = u,$$

$$\int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_0^y \frac{y\,dy}{\sqrt{f(y)}} = v,$$

son intégrale étant désignée par

$$\Pi(u, v)$$

jouira, en vertu du théorème d'Abel, de la propriété exprimée par l'égalité

$$\Pi(u + u', v + v') = \Pi(u, v) + \Pi(u', v') + \text{une fonction alg. et log.};$$

en faisant

$$u = 0, \quad v' = 0,$$

on trouve

$$\Pi(u', v) = \Pi(0, v) + \Pi(u', 0) + \text{une fonction alg. et log.}$$

Ainsi, la fonction $\Pi(u, v)$ à double argument est ramenée aux deux cas les plus simples, où l'on suppose successivement un seul argument variable; on voit encore qu'on n'aura plus à considérer que des intégrales de formules différentielles qui contiennent seulement une variable indépendante, à savoir, des intégrales, par rapport à $u$, de fonctions rationnelles et symétriques de

$$\lambda_1(u, 0), \quad \lambda_2(u, 0),$$

et des intégrales, par rapport à $v$, de fonctions rationnelles et symétriques de

$$\lambda_1(0, v), \quad \lambda_2(0, v).$$

On se convaincra facilement de la généralité des considérations précédentes : ainsi, dans le cas des fonctions de la seconde classe des transcendantes abéliennes, où s'offrent des fonctions à triple argument,

$$\Pi(u, v, w),$$

on aura de même l'égalité

$$\begin{aligned}&\Pi(u+u', v+v', w+w')\\ &\quad = \Pi(u, v, w) + \Pi(u', v', w') + \text{une fonct. alg. et log.},\end{aligned}$$

ou bien encore la suivante

$$\begin{aligned}&\Pi(u+u'+u'', v+v'+v'', w+w'+w'')\\ &\quad = \Pi(u, v, w) + \Pi(u', v', w') + \Pi(u'', v'', w'') + \text{une fonct. alg. et log.};\end{aligned}$$

et, en faisant

$$\begin{aligned} u &= 0, & v &= 0,\\ u' &= 0, & w' &= 0,\\ v'' &= 0, & w'' &= 0,\end{aligned}$$

il vient

$$\Pi(u'', v', w) = \Pi(0, 0, w) + \Pi(0, v', 0) + \Pi(u'', 0, 0) + \text{une fonct. alg. et log.},$$

ce qui conduit aux mêmes conséquences que précédemment.

## VI.

La méthode qui m'a donné la division des arguments dans les fonctions abéliennes s'étend aux nouvelles transcendantes; mais, jusqu'à présent, je n'ai pu aborder la théorie de la transformation sans être arrêté par les plus grandes difficultés. Mes tentatives



m'ont conduit, néanmoins, à quelques considérations sur cette théorie bornée aux fonctions elliptiques; je vais les rapporter en peu de mots,

Soient $\varphi(u, k)$, ou simplement $\varphi(u)$, la fonction inverse, définie par l'égalité

$$\varphi'(u) = \sqrt{[1-\varphi^2(u)][1-k^2\varphi^2(u)]} = \Delta(u, k),$$

$2\omega$ et $2\varpi\sqrt{-1}$ les indices de périodicité, et $n$ un nombre impair quelconque. Le théorème fondamental, donné pour la première fois par M. Jacobi, consiste en ce que la fonction

$$z = \sum \varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right) = \varphi(u) + \varphi\left(u + \frac{2\omega}{n}\right) + \ldots + \varphi\left(u + \frac{2(n-1)\omega}{n}\right),$$

où l'une des périodes des fonctions elliptiques se trouve divisée par le nombre $n$, peut être représentée de la manière suivante

$$\alpha\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right),$$

$\lambda$ désignant un nouveau module, $a$ et $\alpha$ des constantes. On en déduit ensuite que toute fonction rationnelle et symétrique des quantités

$$\varphi(u), \quad \varphi\left(u + \frac{2\omega}{n}\right), \quad \varphi\left(u + \frac{4\omega}{n}\right), \quad \ldots, \quad \varphi\left[u + \frac{2(n-1)\omega}{n}\right],$$

où, de même, l'une des périodes des fonctions elliptiques subsiste, tandis que l'autre se trouve divisée par le nombre $n$, peut être représentée par une fonction rationnelle de $\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right)$. Or voici la démonstration du théorème de M. Jacobi à laquelle je me suis trouvé conduit.

Il existe, entre $\frac{dz}{du}$ et $z$, une relation algébrique qui s'obtiendra par l'élimination de $\varphi(u)$ entre les deux égalités

$$z = \sum \varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right), \qquad \frac{dz}{du} = \sum \Delta\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right).$$

Soit pour cela $\varphi(u) = x$; $z$, comme on le voit aisément, se transforme en une fonction rationnelle $\frac{x\mathrm{U}}{\mathrm{V}}$, U et V étant deux polynomes pairs du degré $n-1$; on établit ensuite sans peine que les racines de l'équation

$$(4) \qquad z = \sum \varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right)$$

sont de la forme

$$\varphi(u) = \varphi(\varepsilon), \quad \varphi\left(\varepsilon + \frac{2\omega}{n}\right), \quad \varphi\left(\varepsilon + \frac{4\omega}{n}\right), \quad \ldots, \quad \varphi\left(\varepsilon + \frac{2(n-1)\omega}{n}\right).$$

Cela résulte, en effet, de ce que l'expression de $z$ ne change point en augmentant $u$ d'un multiple quelconque de $\frac{2\omega}{n}$.

Or, la même chose a lieu nécessairement dans la dérivée $\frac{dz}{du}$; et comme

$$z = \frac{x\mathrm{U}}{\mathrm{V}},$$

on a

$$\frac{dz}{du} = \frac{\mathrm{V}\dfrac{d(x\mathrm{U})}{dx} - x\mathrm{U}\dfrac{d\mathrm{V}}{dx}}{\mathrm{V}^2}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

Ainsi, le carré de $\frac{dz}{du}$, qui est une fonction rationnelle de $x$, conservera la même valeur en y substituant successivement les diverses racines de l'équation (4); par suite, $\frac{dz}{du}$ s'exprimera par la racine carrée d'une fonction rationnelle de $z$.

Or, cette fonction sera entière, car

$$\sum \Delta\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right)$$

ne peut devenir infini sans que quelqu'une des quantités $\varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right)$ ne le soit, ce qui rend dès lors $z$ infini lui-même. Pour obtenir maintenant le nombre et la nature des valeurs de $z$ qui donnent

$$\frac{dz}{du} = 0,$$

il faut chercher les racines de l'équation

$$\sum \Delta\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right) = 0.$$

On trouve très facilement qu'elles sont comprises dans les deux



formules

$$x^2 = \varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{2p\omega}{n}\right), \qquad x^2 = \varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}\sqrt{-1} + \frac{2p\omega}{n}\right),$$

$p$ devant être supposé successivement $0, 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$. Mais j'observe que, pour les substituer dans l'expression de $z$, il est inutile d'avoir égard à ces diverses valeurs de $p$, de sorte qu'il reste seulement à considérer les racines

$$x^2 = \varphi^2\left(\frac{\omega}{2}\right), \qquad x^2 = \varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}\sqrt{-1}\right).$$

On voit, par là, que le polynome en $z$, qui entre dans l'expression de $\frac{dz}{du}$, sera du quatrième degré, ne contiendra que des puissances paires de $z$, et s'évanouira pour les valeurs

$$z^2 = \left[\sum \varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{2p\omega}{n}\right)\right]^2 = \alpha^2, \qquad z^2 = \left[\sum \varphi\left(\frac{\varpi}{2}\sqrt{-1} + \frac{2p\omega}{n}\right)\right]^2 = \beta^2.$$

Ainsi l'on aura

$$\frac{dz}{du} = \mathrm{C}\sqrt{\left(1 - \frac{z^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{\beta^2}\right)}.$$

C étant une constante qu'on détermine en observant que, pour $u = 0$ et, par suite, $z = 0$, on a

$$\frac{dz}{du} = \mathrm{C} = \sum \Delta\left(\frac{2p\omega}{n}\right);$$

faisant donc

$$\frac{\alpha}{\beta} = \lambda, \qquad \frac{\alpha}{\mathrm{C}} = a,$$

on a

$$z = \alpha\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right).$$

## VII.

Il résulte, de ce qui précède, que l'équation

$$\alpha\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right) = \frac{x\mathrm{U}}{\mathrm{V}} \qquad \text{ou} \qquad x\mathrm{U} - \alpha\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right)\mathrm{V} = 0$$

a pour racines les $n$ quantités

$$\varphi(u), \quad \varphi\left(u + \frac{2\omega}{n}\right), \quad \ldots, \quad \varphi\left(u + \frac{2(n-1)\omega}{n}\right).$$

Je vais faire voir qu'on peut tirer de là, directement, la transformation des fonctions de troisième espèce, sans établir préalablement, comme le fait M. Jacobi, la formule de transformation des fonctions de seconde espèce. Soit, pour abréger,

$$\mathrm{F}(x) = x\mathrm{U} - \alpha\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right)\mathrm{V};$$

en désignant par $m$ une quantité quelconque, on aura, comme l'on sait,

$$\frac{\mathrm{F}'(m)}{\mathrm{F}(m)} = \sum \frac{1}{m - \varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right)},$$

ou bien encore

$$\frac{\mathrm{F}'(m)}{\mathrm{F}(m)} = \frac{1}{m - \varphi(u)} + \sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{1}{m - \varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right)} + \frac{1}{m - \varphi\left(u - \frac{2p\omega}{n}\right)}\right].$$

Or, on peut écrire

$$\frac{\mathrm{F}'(m)}{\mathrm{F}(m)} = \frac{\mathrm{A}\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right) - \mathrm{B}}{\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right) - \mathrm{M}},$$

en posant

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}}, \qquad \mathrm{B} = \frac{(x\mathrm{U})'}{\alpha\mathrm{V}}, \qquad \mathrm{M} = \frac{x\mathrm{U}}{\alpha\mathrm{V}} \qquad \text{pour} \qquad x = m.$$

Il importe beaucoup de remarquer cette valeur de M qui, pour $m = \varphi(\mu, k)$, devient $\varphi\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right)$; ainsi l'on a l'égalité

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{A}\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right) - \mathrm{B}}{\varphi\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right) - \varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right)} \\ &\quad = \frac{1}{\varphi(u) - \varphi(\mu)} + \sum\left[\frac{1}{\varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right) - \varphi(\mu)} + \frac{1}{\varphi\left(u - \frac{2p\omega}{n}\right) - \varphi(\mu)}\right],\end{aligned}$$

d'où, en changeant le signe de $\mu$,

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{A}\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right) + \mathrm{B}}{\varphi\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right) + \varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right)} \\ &\quad = \frac{1}{\varphi(u) + \varphi(\mu)} + \sum\left[\frac{1}{\varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right) + \varphi(\mu)} + \frac{1}{\varphi\left(u - \frac{2p\omega}{n}\right) + \varphi(\mu)}\right];\end{aligned}$$



puis, retranchant membre à membre,

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{A}\varphi^2\left(\frac{u}{a}, \lambda\right) - \mathrm{B}\varphi\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right)}{\varphi^2\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right) - \varphi^2\left(\frac{u}{a}, \lambda\right)} \\ &\quad = \frac{\varphi(\mu)}{\varphi^2(u) - \varphi^2(\mu)} + \varphi(\mu)\sum\left[\frac{1}{\varphi^2\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right) - \varphi^2(\mu)} + \frac{1}{\varphi^2\left(u - \frac{2p\omega}{n}\right) - \varphi^2(\mu)}\right].\end{aligned}$$

Soit maintenant

$$\Pi(x, \mu, k) = \int_0^x \frac{du}{\varphi^2(u, k) - \varphi^2(\mu, k)};$$

l'équation précédente donnera, en intégrant depuis $u = 0$ jusqu'à $u = x$, et en ayant égard aux valeurs des constantes,

$$\begin{aligned}&\frac{\varphi\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right)\Delta\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right)}{\Delta(\mu, k)}\Pi\left(\frac{x}{a}, \frac{\mu}{a}, \lambda\right) - \mathrm{A}x \\ &\quad = \varphi(\mu)\Pi(x, \mu, k) + \varphi(\mu)\sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\left[\Pi\left(x + \frac{2p\omega}{n}, \mu, k\right) + \Pi\left(x - \frac{2p\omega}{n}, \mu, k\right)\right],\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}&\varphi\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right)\Delta\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right)\Pi\left(\frac{x}{a}, \frac{\mu}{a}, \lambda\right) \\ &\quad = \Delta(\mu, k)\mathrm{A}x + \varphi(\mu, k)\Delta(\mu, k)\Pi(x, \mu, k) \\ &\qquad + \varphi(\mu, k)\Delta(\mu, k)\sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\left[\Pi\left(x + \frac{2p\omega}{n}, \mu, k\right) + \Pi\left(x - \frac{2p\omega}{n}, \mu, k\right)\right].\end{aligned}$$

Le second membre peut être ramené à ne contenir qu'une seule fonction de troisième espèce, avec une quantité logarithmique; on a, en effet, la formule

$$\frac{\Delta(\mu)}{\varphi(\mu) - \varphi(x + a)} - \frac{\Delta(\mu)}{\varphi(\mu) - \varphi(x - a)} = \frac{\Delta(x)}{\varphi(x) - \varphi(\mu + a)} - \frac{\Delta(x)}{\varphi(x) - \varphi(\mu - a)},$$

qu'il est facile de vérifier; elle donne, en changeant $\mu$ en $-\mu$,

$$\frac{\Delta(\mu)}{\varphi(\mu) + \varphi(x + a)} - \frac{\Delta(\mu)}{\varphi(\mu) + \varphi(x - a} = \frac{\Delta(x)}{\varphi(x) + \varphi(\mu + a)} - \frac{\Delta(x)}{\varphi(x) + \varphi(\mu - a)}.$$

Ajoutant membre à membre et intégrant depuis $x = 0$, on trouve sans peine,

$$\begin{aligned} &\varphi(\mu)\Delta(\mu)[\Pi(x-a,\mu)-\Pi(x+a,\mu)] \\ &\quad = -2\varphi(\mu)\Delta(\mu)\Pi(a,\mu)+\frac{1}{2}\log\left\{\frac{1-\dfrac{\varphi^2(x)}{\varphi^2(\mu+a)}}{1-\dfrac{\varphi^2(x)}{\varphi^2(\mu-a)}}\right\}, \end{aligned}$$

d'où, en permutant $a$ et $x$, et changeant les signes des deux membres,

$$\begin{aligned} &\varphi(\mu)\Delta(\mu)[\Pi(x+a,\mu)+\Pi(x-a,\mu)] \\ &\quad = 2\varphi(\mu)\Delta(\mu)\Pi(x,\mu)-\frac{1}{2}\log\left\{\frac{1-\dfrac{\varphi^2(a)}{\varphi^2(\mu+x)}}{1-\dfrac{\varphi^2(a)}{\varphi^2(\mu-x)}}\right\}. \end{aligned}$$

On arrive donc définitivement à la formule suivante, pour la transformation des fonctions de troisième espèce,

$$\begin{aligned} &\varphi\left(\frac{\mu}{a},\lambda\right)\Delta\left(\frac{\mu}{a},\lambda\right)\Pi\left(\frac{x}{a},\frac{\mu}{a},\lambda\right) \\ &\quad = \Delta(\mu,k)\mathrm{A}x+n\varphi(\mu,k)\Delta(\mu,k)\Pi(x,\mu,k) \\ &\quad\quad -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\log\left\{\frac{1-\dfrac{\varphi^2\left(\dfrac{2p\omega}{n}\right)}{\varphi^2(\mu+x)}}{1-\dfrac{\varphi^2\left(\dfrac{2p\omega}{n}\right)}{\varphi^2(\mu-x)}}\right\}. \end{aligned}$$

## VIII.

Dès les premiers pas qui ont été faits dans la théorie des fonctions elliptiques, on a imaginé de les différentier par rapport au module, ce qui a conduit à plusieurs résultats importants. Or, le même moyen analytique s'applique avec facilité à toutes les fonctions de la forme

$$\int f(x,y)\,dx,$$

où $y$ est donné par l'équation

$$\chi(y) = y^n - \mathrm{X} = 0,$$

X étant une fonction entière de $x$.



Voici, par exemple, le théorème qui en résulte pour les fonctions abéliennes.

*Soit*

$$\mathrm{F}(x) = x(x-a)\ldots(x-k)$$

*un polynome du degré* $2m+1$; *on pourra représenter toutes les fonctions abéliennes de première et de seconde espèce par l'intégrale*

$$z = \int_0^x \frac{(x-a)^k\,dx}{\sqrt{\mathrm{F}(x)}},$$

*et en considérant* $z$ *comme une fonction du module* $a$, *on obtient l'équation linéaire de l'ordre* $2m$

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{2\sqrt{\mathrm{F}(x)}}{(x-a)^{2m-k}} + \sum_{n=1}^{n=2m+1}\frac{4m-n-2k}{1.2.3\ldots n}\mathrm{F}^{(n)}(a) \\ & \times\frac{(-2)^{2m-n+1}}{(2k-1)(2k-3)\ldots(2k+2n-4m-1)}\frac{d^{2m-n+1}z}{da^{2m-n+1}}. \end{aligned}$$

*Lorsque* $k$ *est compris entre* $0$ *et* $m-1$, *de sorte que* $z$ *représente les transcendantes de première espèce, l'intégrale complète s'obtient en ajoutant à la fonction*

$$\int_0^x \frac{(x-a)^k\,dx}{\sqrt{\mathrm{F}(x)}}$$

*les diverses intégrales définies qui entrent dans l'expression des indices de périodicité de la fonction inverse, multipliées chacune par une constante arbitraire.*

De là résulteraient facilement, entre autres choses, des théorèmes analogues à l'équation de Legendre entre les fonctions elliptiques complètes de première et de seconde espèce, à modules complémentaires; relation déjà généralisée par divers géomètres [1]. Mais je ne veux pas m'étendre plus longuement sur ce sujet, qui, du reste, donne lieu à de nombreuses conséquences, que je développerai dans une autre occasion.

---

[1] *Voyez*, par exemple, un Mémoire de M. Catalan, couronné par l'Académie de Bruxelles.

# PRINCIPAUX THÉORÈMES

DE

# L'ANALYSE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences, Lettres et Arts de Nancy*, 1845.

## I.

Les recherches que j'ai l'honneur de présenter à la Société ont pour but d'établir les principaux théorèmes de l'analyse des fonctions elliptiques, par une méthode nouvelle qui repose principalement sur l'intégration de l'équation aux différentielles partielles du phénomène des cordes vibrantes. Dans la marche que nous allons suivre, on verra s'offrir tout d'abord comme un élément essentiel du calcul la transcendante remarquable, au moyen de laquelle les trois espèces de fonctions elliptiques s'expriment analytiquement de la manière la plus simple. Les propriétés diverses et caractéristiques de ces fonctions s'offriront naturellement comme conséquences de modes divers d'expressions par une quantité unique, et nous retrouverons par cette marche en quelque sorte synthétique les premiers résultats qui ont servi dans l'origine de fondement à toute la théorie, et auxquels on s'est arrêté longtemps avant d'arriver aux idées plus générales.

## II.

Soit

$$\Delta(x) = (1 + 2cx^2 + x^4)^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

$c$ étant une constante que l'on supposera, si l'on veut, plus petite



que l'unité; considérons la fonction de troisième espèce

$$z = \int_0^x \frac{\Delta a \, dx}{(x-a)\,\Delta x}, \tag{2}$$

où $a$ désigne le paramètre. En différentiant par rapport à $a$, on trouvera

$$\Delta(a)\frac{dz}{da} = \int_0^x \frac{2(x-a)(a^3+ca)+\Delta^2 a}{(x-a)^2\,\Delta x}\,dx; \tag{3}$$

mais on a identiquement

$$\frac{d}{dx}\frac{\Delta x}{x-a} = \frac{\dfrac{d\,\Delta x}{dx}(x-a)-\Delta x}{(x-a)^2} = \frac{2(x-a)(cx+x^3)-\Delta^2 x}{(x-a)^2\,\Delta x}; \tag{4}$$

d'où en intégrant

$$\frac{\Delta(x)}{x-a} = \int_0^x \frac{2(x-a)(cx+x^3)-\Delta^2 x}{(x-a)^2\,\Delta x}\,dx + \text{const.} \tag{5}$$

La constante se détermine en faisant $x = 0$, et l'on trouve ainsi

$$\frac{\Delta(x)}{x-a} = \int_0^x \frac{2(x-a)(cx+x^3)-\Delta^2 x}{(x-a)^2\,\Delta x}\,dx - \frac{1}{a}. \tag{6}$$

Ajoutant membre à membre avec l'équation (3), il vient

$$\Delta a\frac{dz}{da} + \frac{\Delta x}{x-a}$$
$$= \int_0^x \frac{2(x^2-a^2)(x^2-ax+a^2+c)-(x^2-a^2)(x^2+a^2+2c)}{(x-a)^2\,\Delta x}\,dx - \frac{1}{a},$$

et en réduisant

$$\Delta a\frac{dz}{da} + \frac{\Delta x}{x-a} = \int_0^x \frac{(x^2-a^2)\,dx}{\Delta x} - \frac{1}{a}. \tag{7}$$

On voit que dans ce résultat il n'entre plus la fonction plus compliquée de troisième espèce, de laquelle nous sommes partis. D'ailleurs, en différentiant de nouveau par rapport à $a$, il vient

$$\frac{d}{da}\Delta a\frac{dz}{da} + \frac{\Delta x}{(x-a)^2} = -2a\int_0^x \frac{dx}{\Delta x} + \frac{1}{a^2},$$

mais il est visible que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\Delta a}{(x-a)\,\Delta x};$$

d'où

$$\Delta x \frac{dz}{dx} = \frac{\Delta a}{x-a}$$

et différentiant encore par rapport à $x$, il vient

$$\frac{d}{dx}\left(\Delta x \frac{dz}{dx}\right) = -\frac{\Delta a}{(x-a)^2}.$$

De là se conclut immédiatement le résultat remarquable exprimé par l'équation différentielle partielle

$$(8) \qquad \Delta a \frac{d}{da}\left(\Delta a \frac{dz}{da}\right) - \Delta x \frac{d}{dx}\left(\Delta x \frac{dz}{dx}\right) = -2a\,\Delta a \int_0^x \frac{dx}{\Delta x} + \frac{\Delta a}{a^2}.$$

Ici nous nous trouvons naturellement conduit à prendre pour variables indépendantes, au lieu de $x$ et $a$, les arguments $\alpha$ et $\xi$ des fonctions inverses définies par les égalités

$$\xi = \int_0^x \frac{dx}{\Delta x}, \qquad \alpha = \int_0^a \frac{da}{\Delta a}$$

et nous poserons, d'après cela,

$$x = \lambda(\xi), \qquad a = \lambda(\alpha).$$

Alors l'équation (8) prend la forme plus simple

$$\frac{d^2 z}{d\alpha^2} - \frac{d^2 z}{d\xi^2} = -2a\xi\,\Delta(a) + \frac{\Delta a}{a^2}.$$

On peut aisément faire disparaître le second membre en posant

$$\mathrm{U} = z + \mathrm{A}\xi + \mathrm{B},$$

A et B étant des fonctions de $\alpha$, indépendantes de la variable $\xi$.

Il n'y a qu'à faire

$$\frac{d^2\mathrm{A}}{d\alpha^2} = 2a\,\Delta a, \qquad \frac{d^2\mathrm{B}}{d\alpha^2} = -\frac{\Delta a}{a^2}$$

ou

$$\mathrm{A} = \int_0^\alpha a^2\,d\alpha, \qquad \mathrm{B} = \int^\alpha \frac{d\alpha}{a}$$



et il vient effectivement

$$\frac{d^2\mathrm{U}}{d\alpha^2} - \frac{d^2\mathrm{U}}{d\xi^2} = 0,$$

ce qui est, comme on sait, l'équation de laquelle d'Alembert a tiré la loi de mouvement de vibration d'une corde flexible, écartée très peu de sa position d'équilibre.

## III.

En désignant par F et $\Phi$ deux fonctions arbitraires, l'intégrale générale de l'équation précédente est

$$\mathrm{U} = \mathrm{F}(\alpha+\xi) + \Phi(\alpha-\xi).$$

Pour déterminer les deux fonctions arbitraires, observons qu'ayant

$$\mathrm{U} = \int_0^x \frac{\Delta a\,dx}{(x-a)\,\Delta x} + \xi\int a^2\,d\alpha + \int \frac{d\alpha}{a}$$

à cause de

$$d\xi = \frac{dx}{\Delta x}$$

on peut écrire

$$\mathrm{U} = \int_0^\xi \frac{\Delta a\,d\xi}{x-a} + \xi\int a^2\,d\alpha + \int \frac{d\alpha}{a};$$

on aura donc

$$\mathrm{F}(\alpha+\xi) + \Phi(\alpha-\xi) = \int_0^\xi \frac{\Delta a\,d\xi}{x-a} + \xi\int a^2\,d\alpha + \int \frac{d\alpha}{a};$$

d'où, en différentiant par rapport à $\xi$,

$$\mathrm{F}'(\alpha+\xi) - \Phi'(\alpha-\xi) = \frac{\Delta a}{x-a} + \int a^2\,d\alpha.$$

Faisons maintenant dans les deux équations qui précèdent $\xi = 0$; on trouve

$$\mathrm{F}(\alpha) + \Phi(\alpha) = \int \frac{d\alpha}{a},$$

$$\mathrm{F}'(\alpha) - \Phi'(\alpha) = -\frac{\Delta a}{a} + \int a^2\,d\alpha.$$

Ce sont ces deux équations qui vont nous servir pour déterminer les fonctions arbitraires; posons, suivant l'usage,

$$\mathrm{E}(\alpha) = \int a^2\, d\alpha,$$

$$\mathrm{Z}(\alpha) = \int \mathrm{E}(\alpha)\, d\alpha,$$

on obtiendra en intégrant la dernière

$$\mathrm{F}(\alpha) - \Phi(\alpha) = \mathrm{Z}(\alpha) - \log a.$$

D'ailleurs on trouve aisément

$$\int \frac{d\alpha}{a} = \frac{1}{2} \log \frac{\Delta a - (1 + ca^2)}{a^2}.$$

On en conclut les expressions suivantes :

$$2\mathrm{F}(\alpha) = \quad \mathrm{Z}(\alpha) + \frac{1}{2} \log \frac{\Delta a - (1 + ca^2)}{a^4},$$

$$2\Phi(\alpha) = - \mathrm{Z}(\alpha) + \frac{1}{2} \log[\Delta a - (1 + ca^2)].$$

## IV.

Les conséquences des résultats qu'on vient d'obtenir embrassent les points les plus importants de la théorie des fonctions elliptiques. Parmi ces conséquences on doit surtout distinguer celles qui sont relatives à l'établissement de formules par lesquelles la fonction inverse $\lambda(x+y)$, relative à la somme de deux arguments, s'exprime en $\lambda x$ et $\lambda y$. Ce sont aussi ces formules, en quelque sorte élémentaires, que je vais établir en premier lieu.

Pour abréger l'écriture, on désignera dans tout ce qui va suivre par $\Delta\xi$ ce que devient $\Delta x$ quand on y remplace $x$ par $\lambda(\xi)$; cela posé, reprenons l'équation

$$\int_0^\xi \frac{\Delta(\alpha)\, d\xi}{\lambda(\xi) - \lambda(\alpha)} + \xi \int a^2\, d\alpha + \int \frac{d\alpha}{a} = \mathrm{F}(\alpha + \xi) + \Phi(\alpha - \xi).$$

En différentiant par rapport à $\xi$, on a

$$\frac{\Delta(\alpha)}{\lambda(\xi) - \lambda(\alpha)} + \int a^2\, d\alpha = \mathrm{F}'(\alpha + \xi) - \Phi'(\alpha - \xi).$$



Soit fait successivement

$$\xi = x + y, \qquad \xi = x - y;$$

puis retranchons membre à membre, il viendra

$$\frac{\Delta\alpha}{\lambda(x+y) - \lambda(\alpha)} - \frac{\Delta\alpha}{\lambda(x-y) - \lambda(\alpha)}$$
$$= \mathrm{F}'(x + y + \alpha) - \mathrm{F}'(x - y + \alpha) + \Phi'(\alpha - x + y) - \Phi'(\alpha - x - y).$$

La première partie du second membre, savoir

$$\mathrm{F}'(x + y + \alpha) - \mathrm{F}'(x - y + \alpha)$$

est une fonction symétrique de $x$ et de $\alpha$. Or je dis qu'il en est de même de la seconde. En effet, on voit facilement, d'après l'expression obtenue plus haut de $\Phi(\alpha)$, que sa dérivée est une fonction impaire, et si l'on permute $x$ et $\alpha$, dans

$$\Phi'(\alpha - x + y) - \Phi'(\alpha - x - y),$$

il vient

$$\Phi'(x - \alpha + y) - \Phi'(x - \alpha - y)$$

ou bien

$$\Phi'(\alpha - x + y) - \Phi'(\alpha - x - y),$$

puisque $\Phi'$ est impaire.

L'expression $\dfrac{\Delta\alpha}{\lambda(x+y) - \lambda(\alpha)} - \dfrac{\Delta\alpha}{\lambda(x-y) - \lambda(\alpha)}$ étant ainsi symétrique par rapport à $x$ et $\alpha$, on a l'égalité

$$\frac{\Delta\alpha}{\lambda(x+y) - \lambda(\alpha)} - \frac{\Delta\alpha}{\lambda(x-y) - \lambda(\alpha)}$$
$$= \frac{\Delta x}{\lambda(\alpha+y) - \lambda(x)} - \frac{\Delta x}{\lambda(\alpha-y) - \lambda(x)}.$$

Soit fait $\alpha = 0$; il viendra $\Delta\alpha = 1$ et par suite

$$\frac{1}{\lambda(x+y)} - \frac{1}{\lambda(x-y)} = \frac{\Delta x}{\lambda y - \lambda x} + \frac{\Delta x}{\lambda y + \lambda x} = \frac{2\lambda y\, \Delta x}{\lambda^2 y - \lambda^2 x}.$$

Si dans cette équation on permute $x$ et $y$, il vient

$$\frac{1}{\lambda(x+y)} + \frac{1}{\lambda(x-y)} = -\frac{2\lambda x\, \Delta y}{\lambda^2 y - \lambda^2 x},$$

On en déduit, en ajoutant et retranchant membre à membre et divisant par 2

$$\frac{1}{\lambda(x+y)} = \frac{\lambda y\,\Delta x - \lambda x\,\Delta y}{\lambda^2 y - \lambda^2 x},$$

$$\frac{1}{\lambda(x-y)} = -\frac{\lambda y\,\Delta x + \lambda x\,\Delta y}{\lambda^2 y - \lambda^2 x}.$$

En prenant les inverses et chassant les radicaux du dénominateur, il vient définitivement

$$\lambda(x+y) = \frac{\lambda x\,\Delta y + \lambda y\,\Delta x}{1 - \lambda^2 x\,\lambda^2 y},$$

$$\lambda(x-y) = \frac{\lambda x\,\Delta y - \lambda y\,\Delta x}{1 - \lambda^2 x\,\lambda^2 y}.$$

Une vérification immédiate de ces deux résultats s'obtient en faisant

$$c = 1 \quad \text{et} \quad \lambda x = \operatorname{tang} x, \quad \Delta(x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

et il vient en supprimant un facteur commun aux deux termes des fractions

$$\operatorname{tang}(x+y) = \frac{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y}{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y},$$

$$\operatorname{tang}(x-y) = \frac{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} y}{1 + \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y}$$

ce qui est bien les formules connues relatives aux tangentes.

Dans une autre circonstance, j'aurai l'honneur d'offrir à la Société la suite de ces recherches et le développement des principales conséquences, auxquelles donnent lieu les résultats que je viens d'exposer.

# NOTE

SUR

# LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. III; 1848.

J'ai lu avec le plus vif intérêt le beau travail de M. Cayley, qui a réussi à faire découler toute la théorie des fonctions elliptiques de la considération délicate des produits infinis doubles. J'avais découvert de mon côté le point de vue suivant, plus voisin peut-être encore de l'idée fondamentale de la double périodicité dans les fonctions analytiques.

En désignant par

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}} \quad \text{et} \quad \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}$$

les expressions générales de deux fonctions périodiques simples, dont la période est $a$, assujetties d'une manière essentielle à la condition d'être toujours convergentes pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de $x$, je me suis proposé de déterminer $a_m$ et $b_m$ de telle manière que le quotient

$$\frac{\Sigma a_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}}{\Sigma b_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}},$$

admette une autre période $b$. En posant $q = e^{i\pi\frac{b}{a}}$, cela conduit à l'égalité

$$\frac{\Sigma a_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}}{\Sigma b_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}} = \frac{\Sigma a_m q^{2m} e^{2m\frac{i\pi x}{a}}}{\Sigma b_m q^{2m} e^{2m\frac{i\pi x}{a}}}.$$

Chassant les dénominateurs, on trouve pour les coefficients d'une même exponentielle $e^{2\mu\frac{i\pi x}{a}}$, dans le premier membre et dans le second, respectivement les deux séries

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m b_{\mu-m} q^{2(\mu-m)} \quad \text{et} \quad \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m b_{\mu-m} q^{2m}.$$

Or, la manière la plus simple d'arriver à les rendre égales consiste à les rendre identiques, en sorte qu'un terme quelconque de l'une, tel que $a_m b_{\mu-m} q^{2(\mu-m)}$, ait son égal $a_n b_{\mu-n} q^{2n}$ dans l'autre.

Faisons donc, et cela pour toute valeur de l'entier $\mu$,

$$a_m b_{\mu-m} q^{2(\mu-m)} = a_n b_{\mu-n} q^{2n},$$

et concevons que $n$ soit exprimé en $m$ de manière à produire la série des nombres entiers, lorsque $m$ prend lui-même toutes ses valeurs. On réalisera cette circonstance en prenant $n = m + k$, $k$ étant un entier quelconque; l'équation précédente pourra alors s'écrire

$$\frac{a_m}{a_{m+k}} q^{-2(m+k)} = \frac{b_{\mu-(m+k)}}{b_{\mu-m}} q^{-2(\mu-m)},$$

et comme $\mu$ est quelconque, si l'on fait $\mu - m - k = m'$, $m'$ sera un nombre entier variable entièrement indépendant de $m$; or il vient ainsi

$$\frac{a_m}{a_{m+k}} q^{-2(m+k)} = \frac{b_{m'}}{b_{m'+k}} q^{-2(m'+k)}.$$

Sous cette forme, on voit que chaque membre est une quantité constante, ce qui conduit aux égalités

$$\frac{a_m}{a_{m+k}} q^{-2(m+k)} = \text{const.} \qquad \frac{b_m}{b_{m+k}} q^{-2(m+k)} = \text{const.}$$

Donc $a_m$ et $b_m$ dépendent de la même équation

$$\frac{z_m}{z_{m+k}} q^{-2(m+k)} = \text{const.}$$

qu'on peut encore écrire sous la forme

$$z_m = z_{m+k} q^{2(m+k)+\alpha},$$



en changeant de constante, la solution générale est

$$z_m = \Pi(m) q^{-\frac{m^2}{k} - \alpha m}$$

la fonction $\Pi(m)$ étant assujettie à la condition suivante:

$$\Pi(m+k) = \Pi(m).$$

Nous voici donc arrivés à cette forme analytique d'une fonction $\Phi(x)$ aux périodes $a$ et $b$, savoir

$$\Phi(x) = \frac{\Sigma\Pi(m) q^{-\frac{m^2}{k} - \alpha m} e^{2m\frac{i\pi x}{a}}}{\Sigma\Phi(m) q^{-\frac{m^2}{k} - \alpha m} e^{2m\frac{i\pi x}{a}}},$$

où la condition de convergence prouve immédiatement que, en supposant

$$\frac{b}{a} = \omega + i\omega',$$

le nombre entier $k$ doit être du signe de $\omega'$, sa valeur absolue reste d'ailleurs arbitraire. En désignant par $\Theta(x)$ le numérateur ou le dénominateur, on trouvera ensuite

$$\Theta(x+a) = \Theta(x), \qquad \Theta(x+b) = \Theta(x) e^{\frac{ki\pi}{a}[2x+(1-\alpha)b]}$$

et de ces équations qui ne comportent d'arbitraire que la fonction périodique $\Pi(m)$ se déduisent toutes les propriétés caractéristiques des fonctions elliptiques, sans qu'il soit nécessaire pour cela d'établir, préalablement, l'équation différentielle, tous les résultats déjà connus pouvant se démontrer indépendamment les uns des autres.