EXTRAITS

DE

DEUX LETTRES DE M. CHARLES HERMITE

A M. JACOBI.

Tome I des *Opuscula mathematica* de Jacobi, 1846
et *Journal de Crelle*, Tome 32.

I.

Paris, Janvier 1843.

L'étude de votre Mémoire publié dans le *Journal de M. Crelle* sous le titre : *De functionibus quadrupliciter periodicis quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur*, m'a conduit, pour la division des arguments dans ces fonctions, à un théorème analogue à celui que vous avez donné dans le troisième Volume du même journal, pour obtenir l'expression la plus simple des racines des équations traitées par Abel. M. Liouville m'a engagé à vous écrire pour vous soumettre ce Travail; oserais-je espérer Monsieur, que vous daignerez l'accueillir avec toute l'indulgence dont il a besoin?

Soit

$$\Delta(x) = \sqrt{[x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)]};$$

$$u = \int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\,\partial x}{\Delta(x)} + \int_0^y \frac{(\alpha+\beta y)\,\partial y}{\Delta(y)},$$

$$u' = \int_0^x \frac{(\alpha'+\beta' x)\,\partial x}{\Delta(x)} + \int_0^y \frac{(\alpha'+\beta' y)\,\partial y}{\Delta(y)},$$

$$x = \lambda_0(u, u'), \qquad y = \lambda_1(u, u').$$

Faisons pour abréger

$$x_n = \lambda_0(nu, nu'), \qquad y_n = \lambda_1(nu, nu');$$

ces deux quantités seront déterminées simultanément par les deux racines d'une équation du second degré,

$$\mathrm{U} x_n^2 + \mathrm{U}' x_n + \mathrm{U}'' = 0,$$

dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de x, y, $\Delta(x)$, $\Delta(y)$; j'ai trouvé qu'ils étaient de la forme $\mathrm{P} + \mathrm{Q}\,\Delta(x)\,\Delta(y)$, où P et Q sont des fonctions rationnelles de x et y; mais cette remarque n'est pas essentielle pour ce qui suit.

Je partirai de ce que les racines simultanées des deux équations

$$\text{(A)} \qquad \mathrm{U} x_n^2 + \mathrm{U}' x_n + \mathrm{U}'' = 0, \qquad \mathrm{U} y_n^2 + \mathrm{U}' y_n + \mathrm{U}'' = 0$$

sont données par les formules

$$x = \lambda_0\left(u + \frac{mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4}{n},\right.$$
$$\left. u' + \frac{mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4}{n}\right),$$

$$y = \lambda_1\left(u + \frac{mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4}{n},\right.$$
$$\left. u' + \frac{mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4}{n}\right),$$

en attribuant aux nombres entiers m, m', m'', m''' les valeurs 0, 1, 2, ..., $n-1$.

Cela posé, soit pour abréger

$$\mathrm{I} = mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4,$$
$$\mathrm{I}' = mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4,$$

et désignons par $f(x, y)$ une fonction rationnelle symétrique de x et y, et par p, q, r, s quatre racines de l'équation binome $x^n = 1$, je dis que l'on aura

$$\text{(B)} \quad \sum_0^{n-1}{}_{m'''} \sum_0^{n-1}{}_{m''} \sum_0^{n-1}{}_{m'} \sum_0^{n-1}{}_{m} \left\{ f\left[\lambda_0\left(u + \frac{\mathrm{I}}{n}, u' + \frac{\mathrm{I}'}{n}\right),\right.\right.$$
$$\left.\left. \lambda_1\left(u + \frac{\mathrm{I}}{n}, u' + \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right]\right\} p^m q^{m'} r^{m''} s^{m'''}$$
$$= \sqrt[n]{\{\mathrm{A} + \mathrm{B}\,\Delta[\lambda_0(nu, nu')] + \mathrm{C}\,\Delta[\lambda_1(nu, nu')] + \mathrm{D}\,\Delta[\lambda_0(nu, nu')]\,\Delta[\lambda_1(nu, nu')]\}},$$

A, B, C, D désignant des fonctions rationnelles de $\lambda_0(nu, nu')$, $\lambda_1(nu, nu')$.

Le premier membre peut d'abord se ramener à une fonction rationnelle de $\lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(u, u')$. En effet, d'après la propriété fondamentale des fonctions λ_0, λ_1, un terme quelconque, tel que $f\left[\lambda_0\left(u+\frac{I}{n}, u'+\frac{I'}{n}\right), \lambda_1\left(u+\frac{I}{n}, u'+\frac{I'}{n}\right)\right]$, pourra être exprimé rationnellement en $\lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(u, u')$, $\Delta[\lambda_0(u, u')]$, $\Delta[\lambda_1(u, u')]$, et les quantités analogues relatives à la division des indices. Or on trouve aisément ces formules

$$\Delta(x) = (\alpha+\beta x)\frac{dx}{du} + (\alpha'+\beta' x)\frac{dx}{du'},$$

$$\Delta(y) = (\alpha+\beta y)\frac{dy}{du} + (\alpha'+\beta' y)\frac{dy}{du'},$$

qui montrent que les radicaux carrés $\Delta[\lambda_0(u, u')]$, $\Delta[\lambda_1(u, u')]$ pourront s'exprimer rationnellement en $\lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(u, u')$; car en faisant disparaître les irrationnelles des équations (A), puis les différentiant successivement par rapport à u et u', on obtiendra les expressions des dérivées partielles en fonction rationnelle de $\lambda_0(u, u')$ et $\lambda_1(u, u')$.

Représentons le premier membre de l'équation (B) par $\varphi(u, u')$; on démontrera bien aisément que

$$\varphi\left(u+\frac{ki_1\sqrt{-1}+k'i_2+k''i_3\sqrt{-1}+k'''i_4}{n},\ u'+\frac{ki'_1\sqrt{-1}+k'i'_2+k''i'_3\sqrt{-1}+k'''i'_4}{n}\right)$$
$$= p^{-k}q^{-k'}r^{-k''}s^{-k'''}\varphi(u, u'),$$

quels que soient les entiers k, k', k'', k'''.

En l'élevant à la puissance $n^{\text{ième}}$, on obtient donc une fonction rationnelle de $\lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(u, u')$, qui ne change point en substituant à ces quantités deux autres quelconques des racines simultanées des équations proposées. Il suit de là et de la théorie des fonctions symétriques des racines d'un système d'équations à plusieurs inconnues, que cette fonction pourra être déterminée rationnellement par les coefficients des équations (A).

J'observe actuellement qu'il a été introduit les quantités $\frac{d\lambda_0(nu, nu')}{du}$, $\frac{d\lambda_0(nu, nu')}{du'}$, $\frac{d\lambda_1(nu, nu')}{du}$, $\frac{d\lambda_1(nu, nu')}{du'}$ que l'on

pourra éliminer par les formules suivantes :

$$(\alpha\beta'-\beta\alpha')\frac{dx}{du} = \frac{\Delta(x)}{y-x}(\alpha'+\beta' y), \qquad (\alpha'\beta-\beta'\alpha)\frac{dx}{du'} = \frac{\Delta(x)}{y-x}(\alpha+\beta y),$$

$$(\alpha\beta'-\beta\alpha')\frac{dy}{du} = \frac{\Delta(y)}{x-y}(\alpha'+\beta' x), \qquad (\alpha'\beta-\beta'\alpha)\frac{dx}{du'} = \frac{\Delta(y)}{x-y}(\alpha+\beta x).$$

Or, une fonction rationnelle quelconque des deux radicaux $\Delta[\lambda_0(u, u')]$, $\Delta[\lambda_1(u, u')]$ peut toujours être mise sous la forme

$$a + b\,\Delta[\lambda_0(u, u')] + c\,\Delta[\lambda_1(u, u')] + d\,\Delta[\lambda_0(u, u')]\,\Delta[\lambda_1(u, u')],$$

ce qui achève la démonstration du théorème énoncé.

En supposant successivement $f(x, y) = x+y$, et $f(x, y) = xy$, on aura séparément par une somme de n^4-1 radicaux $n^{\text{ièmes}}$ les coefficients d'une équation du second degré, dont les racines détermineront finalement celles des équations proposées. On pourrait aussi faire voir qu'il suffit de connaître l'un d'eux, l'autre se déterminant rationnellement par celui-là.

Pour obtenir la division des indices, soit

$$u = \frac{ki_1\sqrt{-1}+k'i_2+k''i_3\sqrt{-1}+k'''i_4}{n} = \frac{I}{n},$$

$$u' = \frac{ki'_1\sqrt{-1}+k'i'_2+k''i'_3\sqrt{-1}+k'''i'_4}{n} = \frac{I'}{n},$$

on aura $x_n = 0$, $y_n = 0$, et les équations à résoudre seront

$$\text{(C)} \qquad U' = 0, \qquad U'' = 0;$$

leurs racines seront comprises dans les formules

$$x = \lambda_0\left(\frac{mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4}{n}, \frac{mi'_1\sqrt{-1}+m'i'_2+m''i'_3\sqrt{-1}+m'''i'_4}{n}\right),$$

$$y = \lambda_1\left(\frac{mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4}{n}, \frac{mi'_1\sqrt{-1}+m'i'_2+m''i'_3\sqrt{-1}+m'''i'_4}{n}\right),$$

en attribuant aux nombres entiers m, m', m'', m''' les valeurs 0, 1, 2, ..., $n-1$. Mais si l'on suppose n premier et impair, on verra aisément qu'en supposant successivement

$$\text{(D)} \quad \left\{\begin{array}{ll} I_1 = i_1\sqrt{-1}, \quad I'_1 = i'_1\sqrt{-1}; \quad I_2 = \mu i_1\sqrt{-1}+i_2, & I'_2 = \mu i'_1\sqrt{-1}+i'_2; \\ I_3 = \mu i_1\sqrt{-1}+\mu' i_2+i_3\sqrt{-1}, & I'_3 = \mu i'_1\sqrt{-1}+\mu' i'_2+i'_3\sqrt{-1}; \\ I_4 = \mu i_1\sqrt{-1}+\mu' i_2+\mu'' i_3\sqrt{-1}+i_4, & I'_4 = \mu i'_1\sqrt{-1}+\mu' i'_2+\mu'' i'_3\sqrt{-1}+i'_4; \end{array}\right.$$

on pourra leur substituer les suivantes

$$x = \lambda_0\left(m\frac{\mathrm{I}_1}{n},\ m\frac{\mathrm{I}'_1}{n}\right), \qquad y = \lambda_1\left(m\frac{\mathrm{I}_1}{n},\ m\frac{\mathrm{I}'_1}{n}\right),$$
$$x = \lambda_0\left(m\frac{\mathrm{I}_2}{n},\ m\frac{\mathrm{I}'_2}{n}\right), \qquad y = \lambda_1\left(m\frac{\mathrm{I}_2}{n},\ m\frac{\mathrm{I}'_2}{n}\right),$$
$$x = \lambda_0\left(m\frac{\mathrm{I}_3}{n},\ m\frac{\mathrm{I}'_3}{n}\right), \qquad y = \lambda_1\left(m\frac{\mathrm{I}_3}{n},\ m\frac{\mathrm{I}'_3}{n}\right),$$
$$x = \lambda_0\left(m\frac{\mathrm{I}_4}{n},\ m\frac{\mathrm{I}'_4}{n}\right), \qquad y = \lambda_1\left(m\frac{\mathrm{I}_4}{n},\ m\frac{\mathrm{I}'_4}{n}\right),$$

en excluant la solution zéro, et donnant à m les valeurs $1, 2, \ldots, n-1$ et à μ, μ', μ'' les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Mais comme les intégrales qui entrent dans les expressions de u et u' ont été prises à la limite inférieure zéro, on a $\lambda_0(-u, -u') = \lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(-u, -u') = \lambda_1(u, u')$, d'où il arrive que les $n^4 - 1$ solutions des équations (C) sont égales deux à deux; et il suffira de prendre, dans les formules précédentes, $m = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(n-1)$.

Soit toujours $f(x, y)$ une fonction rationnelle et symétrique de x et y; on établira d'abord qu'en désignant par I l'une des quantités $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \mathrm{I}_4$, par I' la quantité correspondante au second argument, l'expression

$$f\left[\lambda_0\left(k\frac{\mathrm{I}}{n},\ k\frac{\mathrm{I}'}{n}\right),\ \lambda_1\left(k\frac{\mathrm{I}}{n},\ k\frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right]$$

peut se ramener, quel que soit le nombre entier k, à une fonction rationnelle de $\lambda_0\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$. Cela résulte de ce que les radicaux $\Delta\left[\lambda_0\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right]$, $\Delta\left[\lambda_1\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right]$ s'expriment eux-mêmes rationnellement en $\lambda_0\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$, comme il est facile de le voir d'après ce qui a été dit plus haut.

Cela posé, l'expression

$$\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left\{ f\left[\lambda_0\left(k\frac{\mathrm{I}}{n},\ k\frac{\mathrm{I}'}{n}\right),\ \lambda_1\left(k\frac{\mathrm{I}}{n},\ k\frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right]\right\}^l,$$

où l est un entier quelconque, pourra être ramenée à une fonction rationnelle et symétrique de $\lambda_0\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$, que je repré-

senterai, pour abréger, par $\varphi\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$, et que l'on démontrera aisément jouir de la propriété que

$$\varphi\left(\nu\frac{\mathrm{I}}{n},\ \nu\frac{\mathrm{I}'}{n}\right) = \varphi\left(\frac{\mathrm{I}}{n},\ \frac{\mathrm{I}'}{n}\right),$$

quel que soit le nombre entier ν.

Donc, donnant successivement à I et I' toutes les valeurs correspondantes comprises dans les formules (D), on pourra construire une équation entièrement rationnelle, qui aura pour racines les valeurs qui en résulteront pour la fonction $\varphi\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$.

Il est bien facile de voir que son degré sera le nombre

$$1 + n + n^2 + n^3 = \frac{n^4 - 1}{n - 1}:$$

ainsi, l'équation de degré $\frac{1}{2}(n^4 - 1)$ de laquelle dépend la détermination d'une fonction rationnelle symétrique de $\lambda_0\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$, peut être décomposée en $\frac{n^4-1}{n-1}$ facteurs du degré $\frac{1}{2}(n-1)$, au moyen des racines d'une équation rationnelle du degré $\frac{n^4-1}{n-1}$.

Les équations de degré $\frac{1}{2}(n-1)$ sont résolubles par radicaux. Pour le faire voir en peu de mots, soit ρ une racine primitive par rapport au nombre premier n, on établira d'abord que leurs racines peuvent être représentées par la formule

$$f\left[\lambda_0\left(\rho^k\frac{\mathrm{I}}{n},\ \rho^k\frac{\mathrm{I}'}{n}\right),\ \lambda_1\left(\rho^k\frac{\mathrm{I}}{n},\ \rho^k\frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right],$$

en supposant $k = 0, 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(n-3)$; et si l'on considère la puissance de degré $\frac{1}{2}(n-1)$ de l'expression

$$\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-3)} f\left[\lambda_0\left(\rho^k\frac{\mathrm{I}}{n},\ \rho^k\frac{\mathrm{I}'}{n}\right),\ \lambda_1\left(\rho^k\frac{\mathrm{I}}{n},\ \rho^k\frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right]\theta^k,$$

où θ est une racine de $\theta^{\frac{1}{2}(n-1)} - 1 = 0$, on verra qu'elle peut être ramenée à une fonction rationnelle et symétrique de $\lambda_0\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$ que je représenterai, pour abréger, par $\psi\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$, et qui jouira, comme la fonction φ, de la propriété que

$$\psi\left(\frac{\nu \mathrm{I}}{n}, \frac{\nu \mathrm{I}'}{n}\right) = \psi\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right).$$

Dès lors on démontre aisément qu'on peut trouver une fonction rationnelle $\mathrm{F}(x)$ telle que, pour toutes les valeurs de I et I' comprises dans les formules (D), on ait

$$\psi\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right) = \mathrm{F}\left[\varphi\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right].$$

Or, connaissant la fonction ψ, on sait comment en déduire toutes les racines de l'équation proposée.

Les considérations précédentes semblent pouvoir s'appliquer également aux autres classes des transcendantes nommées généralement par Legendre *fonctions ultra-elliptiques;* il est facile en effet de trouver les formules suivantes. Soit

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= \sqrt{[x(1-x)(1-\lambda_1^2 x)\ldots(1-\lambda_{2n+1}^2 x)]},\\
\theta_k(x) &= \alpha_k + \beta_k x + \gamma_k x^2 + \ldots + \eta_k x^n,\\
\Phi_k(x) &= \int_0^x \frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)};
\end{aligned}$$

posons

$$\begin{aligned}
u_0 &= \Phi_0(x_0) + \Phi_0(x_1) + \ldots + \Phi_0(x_n),\\
u_1 &= \Phi_1(x_0) + \Phi_1(x_1) + \ldots + \Phi_1(x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
u_n &= \Phi_n(x_0) + \Phi_n(x_1) + \ldots + \Phi_n(x_n),
\end{aligned}$$

et soit

$$\begin{aligned}
x_0 &= \lambda_0(u_0, u_1, \ldots, u_n),\\
x_1 &= \lambda_1(u_0, u_1, \ldots, u_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_n &= \lambda_n(u_0, u_1, \ldots, u_n),
\end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned}
\Delta(x_0) &= \theta_0(x_0)\frac{dx_0}{du_0} + \theta_1(x_0)\frac{dx_0}{du_1} + \theta_2(x_0)\frac{dx_0}{du_2} + \ldots + \theta_n(x_0)\frac{dx_0}{du_n},\\
\Delta(x_1) &= \theta_0(x_1)\frac{dx_1}{du_0} + \theta_1(x_1)\frac{dx_1}{du_1} + \theta_2(x_1)\frac{dx_1}{du_2} + \ldots + \theta_n(x_1)\frac{dx_1}{du_n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Delta(x_n) &= \theta_0(x_n)\frac{dx_n}{du_0} + \theta_1(x_n)\frac{dx_n}{du_1} + \theta_2(x_n)\frac{dx_n}{du_2} + \ldots + \theta_n(x_n)\frac{dx_n}{du_n}.
\end{aligned}$$

Les fonctions θ étant du degré n, on trouve aussi que les racines de l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré

$$0 = \theta_0(x)\frac{dx_k}{du_0} + \theta_1(x)\frac{dx_k}{du_1} + \theta_2(x)\frac{dx_k}{du_2} + \ldots + \theta_n(x)\frac{dx_k}{du_n}$$

sont les n fonctions $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$.

En cherchant à déterminer directement le degré des équations relatives à la division des arguments dans les fonctions λ, j'ai été conduit à cette remarque, que l'équation algébrique correspondante à l'équation transcendante

$$\Phi(\alpha_0) + \Phi(\alpha_1) + \Phi(\alpha_2) + \ldots + \Phi(\alpha_n) = \mu\,\Phi(x)$$

a ses coefficients rationnels en x, quel que soit le nombre entier μ; mais voici quelque chose de plus étendu.

Considérez la transcendante $\int_0^x \frac{\theta(x)\,\partial x}{\sqrt[n]{[\mathrm{F}(x)^k]}}$, où $\mathrm{F}(x)$ est un polynome entier du degré m, $\theta(x)$ un autre polynome d'un degré $< m\frac{k}{n} - 1$. Si l'on suppose n et m premiers entre eux, et si l'on fait $\nu = \frac{1}{2}(m-1)(n-1)$, on sait que la somme d'un nombre quelconque de pareilles intégrales relatives aux variables $x, y, z, \ldots$ est réductible à une somme composée de ν termes seulement, dont les arguments $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu-1}$ sont déterminés par les racines d'une équation du degré ν, dont les coefficients sont rationnels en $x, y, z, \ldots, \sqrt[n]{[\mathrm{F}(x)]}, \sqrt[n]{[\mathrm{F}(y)]}, \sqrt[n]{[\mathrm{F}(z)]}, \ldots$.

Or, si l'on fait $x = y = z = \ldots$, l'équation correspondante à l'équation transcendante

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{\theta(x)\,dx}{\sqrt[n]{[\mathrm{F}(x)^k]}} + \int_0^{\alpha_1} \frac{\theta(x)\,dx}{\sqrt[n]{[\mathrm{F}(x)^k]}} + \ldots + \int_0^{\alpha_{\nu-1}} \frac{\theta(x)\,dx}{\sqrt[n]{[\mathrm{F}(x)^k]}} = \mu \int_0^x \frac{\theta(x)\,dx}{\sqrt[n]{[\mathrm{F}(x)^k]}}$$

aura tous ses coefficients rationnels en x.

II.

Paris, Août 1844.

La bonté avec laquelle vous avez accueilli mes premières recherches sur les fonctions abéliennes m'engage à vous écrire une seconde fois, pour vous soumettre quelques nouveaux résultats auxquels j'ai été conduit par l'étude de vos Ouvrages, en essayant d'étendre aux transcendantes plus générales les principales théories des fonctions elliptiques. Mon Travail m'a amené, naturellement, à rechercher la démonstration de quelques-uns des théorèmes que vous avez énoncés dans le *Journal de M. Crelle;* c'est aussi, Monsieur, ce dont je vous demanderai la permission de vous entretenir d'abord; je m'occuperai surtout de l'expression de $\sin\operatorname{am}(u, \varkappa)$ par $\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, \lambda\right)$, si importante pour la théorie des fonctions elliptiques; mais je ne sais si j'aurai véritablement rencontré les principes qui vous ont conduit à ce beau théorème.

En suivant vos notations, je nommerai $\mathrm{H}(x)$, $\Theta(x)$ les deux fonctions qui donnent

$$\sin\operatorname{am}(x) = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)},$$

et qui satisfont aux conditions

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} \Theta(x+2i\mathrm{K}') &= -e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')}\,\Theta(x),\\ \Theta(x+2\mathrm{K}) &= \Theta(x),\\ \mathrm{H}(x+2i\mathrm{K}') &= -e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')}\,\mathrm{H}(x),\\ \mathrm{H}(x+2\mathrm{K}) &= -\mathrm{H}(x); \end{aligned}\right.$$

et voici d'abord une remarque sur laquelle je me fonderai principalement. Soit $\Phi(x)$ une fonction définie par l'équation

$$(2) \qquad \Phi(x+2i\mathrm{K}') = -e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')}\,\Phi(x)$$

et par la condition de périodicité

$$(3) \qquad \Phi(x+4\mathrm{K}) = \Phi(x),$$

on trouvera qu'en supposant

$$\Phi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m}\, a_m e^{m\frac{i\pi x}{2\mathrm{K}}}$$

les coefficients se déterminent de la manière suivante :

$$a_{2\mu} = (-1)^{\mu} a_0 q^{\mu^2}, \qquad a_{2\mu+1} = (-1)^{\mu} a_1 q^{\mu(\mu+1)},$$

de sorte qu'en employant les fonctions H et Θ on a

$$\Phi(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{H}(x) + \mathrm{B}\,\Theta(x).$$

Cela posé, soient n un nombre premier, p un entier compris entre 0 et $n-1$; faisons $\alpha = e^{-p\frac{8i\pi}{n}}$ et considérons la somme

$$\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)} + \alpha\frac{\mathrm{H}\left(x+\frac{4\mathrm{K}}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4\mathrm{K}}{n}\right)} + \alpha^2\frac{\mathrm{H}\left(x+\frac{8\mathrm{K}}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{8\mathrm{K}}{n}\right)} + \ldots + \alpha^{n-1}\frac{\mathrm{H}\left[x+\frac{4(n-1)\mathrm{K}}{n}\right]}{\Theta\left[x+\frac{4(n-1)\mathrm{K}}{n}\right]};$$

nommons $\Phi(x)$ le numérateur et $\Phi_0(x)$ le dénominateur, savoir :

$$\Phi_0(x) = \Theta(x)\,\Theta\left(x+\frac{4\mathrm{K}}{n}\right)\Theta\left(x+\frac{8\mathrm{K}}{n}\right)\ldots\Theta\left(x+\frac{4(n-1)\mathrm{K}}{n}\right);$$

on déduit sans peine de la propriété fondamentale des Θ, qui est exprimée par l'égalité (1), la condition

$$\Phi_0(x+2i\mathrm{K}') = -e^{-n\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')}\,\Phi_0(x),$$

et il est clair que l'on a

$$\Phi_0\left(x+\frac{4\mathrm{K}}{n}\right) = \Phi_0(x).$$

Or ces deux équations peuvent être ramenées aux équations (2) et (3), de la manière suivante. Soit $\varphi(x)$ une fonction définie par les deux conditions

$$\varphi(x+2i\mathrm{K}'_1) = -e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}_1}(x+i\mathrm{K}'_1)}\,\varphi(x) \qquad \text{et} \qquad \varphi(x+4\mathrm{K}_1) = \varphi(x) :$$

on aura, d'après ce qui a été dit tout à l'heure,

$$\varphi(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{H}_1(x) + \mathrm{B}\,\Theta_1(x),$$

en désignant par H_1 et Θ_1 les fonctions H et Θ, dans lesquelles K et K′ seraient supposés devenus K_1 et K'_1; posons ensuite $n\frac{\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}} = \frac{\mathrm{K}'_1}{\mathrm{K}'}$, et faisons $x = \frac{n\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}z$; il viendra, comme on le voit facilement

$$\varphi\left[\frac{n\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}(z + 2i\mathrm{K}')\right] = -e^{-n\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(z+i\mathrm{K}')}\,\varphi\left(\frac{n\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}z\right)$$

et

$$\varphi\left[\frac{n\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}\left(z + \frac{4\mathrm{K}}{n}\right)\right] = \varphi\left(\frac{n\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}z\right).$$

Or ces équations font voir que l'on aura

$$\Phi_0(x) = \varphi\left(\frac{n\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}x\right) = \mathrm{A}\,\mathrm{H}_1\left(\frac{n\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}x\right) + \mathrm{B}\,\Theta_1\left(\frac{n\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}x\right),$$

et comme la fonction Φ_0 est paire, il faut faire $\mathrm{A} = 0$ et il vient

$$\Phi_0(x) = \mathrm{const.}\,\Theta_1\left(\frac{n\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}x\right).$$

Je passe actuellement au numérateur désigné par $\Phi(x)$. On établit immédiatement qu'il satisfait encore à l'équation

$$(4) \qquad \Phi(x + 2i\mathrm{K}') = -e^{-n\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')}\,\Phi(x),$$

et l'on peut même observer que chacun des n produits dont la somme le compose la vérifie isolément. On trouve ensuite, en désignant par j un nombre entier,

$$\Phi\left(x + \frac{4j\mathrm{K}}{n}\right) = \alpha^{-j}\,\Phi(x).$$

Si donc je pose

$$\Psi(x) = e^{-2p\frac{i\pi x}{\mathrm{K}}}\,\Phi(x),$$

j'aurai

$$\Psi\left(x + \frac{4j\mathrm{K}}{n}\right) = \Psi(x).$$

D'ailleurs de l'équation fondamentale (4) on tirera

$$\Psi(x + 2i\mathrm{K}') = -e^{-n\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')+4p\frac{\pi\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}\,\Psi(x),$$

et en mettant $x - 4p\frac{i\mathrm{K}'}{n}$ à la place de x, et faisant pour plus de clarté

$$\Psi_1(x) = \Psi\left(x - \frac{4pi\mathrm{K}'}{n}\right),$$

on en déduit

$$\Psi_1(x + 2i\mathrm{K}') = -e^{-n\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')}\,\Psi_1(x).$$

Ainsi par cette transformation nous sommes entièrement ramenés à l'équation (4). Mais on a la condition de périodicité

$$\Psi_1\left(x + \frac{4\mathrm{K}}{n}\right) = \Psi_1(x),$$

donc, en raisonnant comme plus haut, il viendra

$$\Psi_1(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{H}_1\left(\frac{n\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}x\right) + \mathrm{B}\,\Theta_1\left(\frac{n\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}x\right).$$

Faisons pour la suite $\frac{n\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}} = \frac{1}{\mathrm{M}}$; nous aurons le théorème exprimé par l'égalité

$$\begin{aligned}\sin\mathrm{am}(x) &+ \alpha\sin\mathrm{am}\left(x + \frac{4\mathrm{K}}{n}\right) + \alpha^2\sin\mathrm{am}\left(x + \frac{8\mathrm{K}}{n}\right) + \ldots \\ &+ \alpha^{n-1}\sin\mathrm{am}\left[x + \frac{4(n-1)\mathrm{K}}{n}\right] \\ &= e^{2p\frac{i\pi x}{\mathrm{K}}}\,\frac{\mathrm{A}\,\mathrm{H}_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}} + 4p\frac{i\mathrm{K}'_1}{n}\right) + \mathrm{B}\,\Theta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}} + 4p\frac{i\mathrm{K}'_1}{n}\right)}{\Theta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}}\right)}.\end{aligned}$$

J'observe que le premier membre change de signe en augmentant x de $2\mathrm{K}$; le nombre n étant impair, il en est de même de la fonction $\mathrm{H}_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}}\right)$; d'ailleurs $\Theta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}}\right)$ ne change pas; ainsi il faut faire $\mathrm{B} = 0$, et il vient

$$\begin{aligned}\sin\mathrm{am}(x) &+ \alpha\sin\mathrm{am}\left(x + \frac{4\mathrm{K}}{n}\right) + \ldots + \alpha^{n-1}\sin\mathrm{am}\left[x + \frac{4(n-1)\mathrm{K}}{n}\right] \\ &= \mathrm{const.}\,e^{2p\frac{i\pi x}{\mathrm{K}}}\,\frac{\mathrm{H}_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}} + 4p\frac{i\mathrm{K}'_1}{n}\right)}{\Theta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}}\right)} \\ &= \mathrm{const.}\,\sin\mathrm{am}\left(\frac{x}{\mathrm{M}} + 4p\frac{i\mathrm{K}'_1}{n}\right)\frac{e^{2p\frac{i\pi x}{\mathrm{K}}}\,\Theta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}} + 4p\frac{i\mathrm{K}'_1}{n}\right)}{\Theta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}}\right)}.\end{aligned}$$

Je substitue maintenant aux fonctions Θ à période réelle, les fonctions analogues $\vartheta(x) = e^{\frac{\pi x^2}{4\mathrm{KK}'}}\Theta(x)$, à la période imaginaire $4i\mathrm{K}'$; on trouve

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}}\right) = e^{n\frac{\pi x^2}{4\mathrm{KK}'}}\,\Theta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}}\right),$$

de sorte qu'à un facteur constant près, l'expression

$$\frac{e^{2p\frac{i\pi x}{\mathrm{K}}}\,\Theta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}} + 4p\frac{i\mathrm{K}'_1}{n}\right)}{\Theta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}}\right)}$$

se transforme en la suivante :

$$\frac{\vartheta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}} + 4p\frac{i\mathrm{K}'_1}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}}\right)},$$

où l'exponentielle $e^{2p\frac{i\pi x}{\mathrm{K}}}$ a disparu; ainsi il vient

$$\begin{aligned}&\operatorname{sin\,am}(x) + \alpha\operatorname{sin\,am}\left(x + \frac{4\mathrm{K}}{n}\right) + \ldots + \alpha^{n-1}\operatorname{sin\,am}\left[x + \frac{4(n-1)\mathrm{K}}{n}\right]\\ &\quad = \text{const.}\operatorname{sin\,am}\left(\frac{x}{\mathrm{M}} + 4p\frac{i\mathrm{K}'_1}{n}\right)\frac{\vartheta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}} + 4p\frac{i\mathrm{K}'_1}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}}\right)}.\end{aligned}$$

Pour déterminer la constante, je multiplie les deux membres par $x - i\mathrm{K}'$, puis je fais $x = i\mathrm{K}'$; en nommant $\varkappa$, $\varkappa_1$ les modules des fonctions K, K_1, le terme $\operatorname{sin\,am}(x)$ qu'il y a seul lieu de considérer dans le premier membre donne $\frac{1}{\varkappa}$; dans le second il suffit d'avoir la valeur de la dérivée de $\vartheta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}}\right)$, pour $x = i\mathrm{K}'$. Or, on obtient sans peine pour résultat $\frac{i\sqrt{\varkappa_1}\,\vartheta_1(0)}{\mathrm{M}}$: ainsi on a l'égalité

$$\frac{1}{\varkappa} = \text{const.}\operatorname{sin\,am}\left(\frac{i\mathrm{K}'}{\mathrm{M}} + 4p\frac{i\mathrm{K}'_1}{n}\right)\frac{\vartheta_1\left(\frac{i\mathrm{K}'}{\mathrm{M}} + 4p\frac{i\mathrm{K}'_1}{n}\right)}{\frac{1}{\mathrm{M}}\,i\sqrt{\varkappa_1}\,\vartheta_1(0)},$$

et l'on en tire après quelques transformations faciles

$$\text{const.} = \frac{\varkappa_1}{\mathrm{M}\varkappa}\,\frac{\vartheta_1(0)}{\vartheta_1\left(\frac{4pi\mathrm{K}'_1}{n}\right)}.$$

Nous voici de la sorte parvenus au théorème exprimé par l'égalité

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{M}\varkappa}{\varkappa_1}\left\{\operatorname{sin\,am}(x) + \alpha\operatorname{sin\,am}\left(x + \frac{4\mathrm{K}}{n}\right) + \ldots + \alpha^{n-1}\operatorname{sin\,am}\left[x + \frac{4(n-1)\mathrm{K}}{n}\right]\right\}\\ &\quad = \operatorname{sin\,am}\left(\frac{x}{\mathrm{M}} + 4p\frac{i\mathrm{K}'_1}{n}\right)\frac{\vartheta_1(0)\,\vartheta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}} + 4p\frac{i\mathrm{K}'_1}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}}\right)\vartheta_1\left(4p\frac{i\mathrm{K}'_1}{n}\right)}.\end{aligned}$$

Je n'ai plus maintenant qu'à vous emprunter, Monsieur, la méthode par laquelle vous établissez les propriétés si remarquables de la fonction

$$\chi(u) = e^{ru^2}\Omega(u).$$

En formant le produit

$$\psi(x) = \frac{\vartheta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}}\right)\vartheta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}} + \frac{4i\mathrm{K}'_1}{n}\right)\vartheta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}} + \frac{8i\mathrm{K}'_1}{n}\right)\ldots\vartheta_1\left[\frac{x}{\mathrm{M}} + \frac{4(n-1)i\mathrm{K}'_1}{n}\right]}{\vartheta_1(0)\,\vartheta_1^2\left(\frac{4i\mathrm{K}'_1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{8i\mathrm{K}'_1}{n}\right)\ldots\vartheta_1^2\left[\frac{2(n-1)i\mathrm{K}'_1}{n}\right]},$$

on aura $\psi\left(x + 4p\frac{i\mathrm{K}'}{n}\right) = \psi(x)$, et l'on en déduit la formule suivante :

$$\begin{aligned}&\frac{\vartheta_1(0)\,\vartheta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}} + 4p\frac{i\mathrm{K}'_1}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}}\right)\vartheta_1\left(4p\frac{i\mathrm{K}'_1}{n}\right)}\\ &= \left\{\frac{\prod_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)}{}_m\left[1 - \varkappa_1^2\operatorname{sin^2 am}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}\right)\operatorname{sin^2 am}\left(\frac{4mi\mathrm{K}'_1}{n}\right)\right]\prod_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)}{}_m\left[1 - \varkappa_1^2\operatorname{sin^2 am}\left(4p\frac{i\mathrm{K}'_1}{n}\right)\operatorname{sin^2 am}\left(\frac{4mi\mathrm{K}'_1}{n}\right)\right]}{\prod_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)}{}_m\left[1 - \varkappa_1^2\operatorname{sin^2 am}\left(\frac{x}{\mathrm{M}} + 4p\frac{i\mathrm{K}'_1}{n}\right)\operatorname{sin^2 am}\left(\frac{4mi\mathrm{K}'_1}{n}\right)\right]}\right\}^{\frac{1}{n}},\end{aligned}$$

de laquelle découle ainsi la démonstration de votre théorème sur l'expression algébrique de $\operatorname{sin\,am}(x)$ par $\operatorname{sin\,am}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}\right)$.

La méthode précédente est fondée principalement sur ce caractère, digne de toute notre attention, de la fonction $\operatorname{sin\,am}(x)$, d'être exprimable par le quotient de deux fonctions développables en séries, toujours convergentes, et qui restent les mêmes, ou ne font qu'acquérir un facteur commun, en augmentant l'argument de certaines quantités constantes. Tel est le lien si simple par lequel se trouve rattaché, aux notions analytiques élémentaires, l'ensemble des propriétés caractéristiques de la nouvelle transcendante, qui ont leur source dans le principe de la double période. Mais il est important d'abord d'observer, dans toute fonction rationnelle de $\sin\operatorname{am}(x)$, l'analogie des fonctions qui jouent les rôles de numérateur et de dénominateur, avec les fonctions H et Θ. A cet effet, je considère la fonction homogène d'un degré quelconque n :

$$\Phi(x) = \mathrm{AH}^n(x) + \mathrm{BH}^{n-1}\,\Theta(x) + \ldots + \mathrm{LH}(x)\,\Theta^{n-1}(x) + \mathrm{I}\,\Theta^n(x).$$

On trouve bien facilement, d'après chaque terme en particulier,

$$\Phi(x + 2i\mathrm{K}') = (-1)^n e^{-\frac{ni\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')}\,\Phi(x);$$

on a d'ailleurs

$$\Phi(x + 4\mathrm{K}) = \Phi(x);$$

ainsi dans ce cas général, l'expression analytique du caractère de la double périodicité se présente sous la même forme que pour la fonction $\sin\operatorname{am}(x)$. Introduisons aussi la fonction

$$\mathrm{H}'(x)\,\Theta(x) - \mathrm{H}(x)\,\Theta'(x),$$

qui représente le numérateur de la dérivée de $\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}$; en la désignant un instant par $\chi(x)$, on aura sans peine

$$\chi(x + 2\mathrm{K}) = -\chi(x), \qquad \chi(x + 2i\mathrm{K}') = e^{-2\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')}\chi(x).$$

De là résulte que la fonction suivante

$$(\alpha) \quad \begin{aligned} \Pi(x) = {} & \mathrm{AH}^n(x) + \mathrm{BH}^{n-1}(x)\,\Theta(x) + \ldots + \mathrm{LH}(x)\,\Theta^{n-1}(x) + \mathrm{I}\,\Theta^n(x) \\ & + [\mathrm{H}'(x)\,\Theta(x) - \mathrm{H}(x)\,\Theta'(x)] \\ & \times [\mathrm{A}'\mathrm{H}^{n-2}(x) + \mathrm{B}'\mathrm{H}^{n-3}(x)\,\Theta(x) + \ldots + \mathrm{I}'\,\Theta^{n-2}(x)] \end{aligned}$$

donnera encore

$$\Pi(x + 4\mathrm{K}) = \Pi(x), \qquad \Pi(x + 2i\mathrm{K}') = (-1)^n e^{-n\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')}\,\Pi(x).$$

Mais on ne peut pas satisfaire à ces deux équations par une solution plus générale que la fonction définie par l'équation (α) qui renferme $2n$ constantes arbitraires.

Supposons en effet

$$\Pi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, a_m e^{m\frac{i\pi x}{2\mathrm{K}}};$$

la seconde équation donnera facilement

$$a_{m+2n} = (-1)^n a_m q^{m+n},$$

d'où

$$a_{m+2kn} = (-1)^{kn} a_m q^{km+k^2 n},$$

k étant un nombre entier positif ou négatif. On voit par là que tous les coefficients s'obtiendront au moyen des quantités a_0, a_1, $\ldots$, a_{2n-1} qui restent arbitraires. Si à la condition

$$\Pi(x + 4\mathrm{K}) = \Pi(x)$$

on substitue la condition plus particulière

$$\Pi(x + 2\mathrm{K}) = -\Pi(x),$$

tous les coefficients à indices pairs devront être nuls, ce qui réduira à moitié le nombre des constantes arbitraires.

Ainsi je considère l'expression

$$\sin\operatorname{am}(x)\,\mathrm{F}[\sin^2\operatorname{am}(x)] - \frac{d\sin\operatorname{am}(x)}{dx} f[\sin^2\operatorname{am}(x)],$$

où $\mathrm{F}(x)$ et $f(x)$ désignent deux fonctions entières, l'une du degré m, l'autre du degré $m-1$; je remplace $\sin\operatorname{am}(x)$ par $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}$, le numérateur

$$\begin{aligned} \Pi(x) = \Theta(x)^{2m+1} \Bigg\{ & \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)} \mathrm{F}\left[\frac{1}{\varkappa}\frac{\mathrm{H}^2(x)}{\Theta^2(x)}\right] \\ & - \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \frac{\mathrm{H}'(x)\,\Theta(x) - \mathrm{H}(x)\,\Theta'(x)}{\Theta^2(x)} f\left[\frac{1}{\varkappa}\frac{\mathrm{H}^2(x)}{\Theta^2(x)}\right] \Bigg\} \end{aligned}$$

vérifiera les deux équations

$$\Pi(x + 2\mathrm{K}) = -\Pi(x), \qquad \Pi(x + 2i\mathrm{K}') = -e^{-(2m+1)\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')}\,\Pi(x)$$

indépendamment des valeurs des coefficients au nombre de $2m+1$ qu'il renferme; il en représentera donc la solution la plus générale. Mais, d'une autre part, je considère le produit des

$2m+1$ facteurs

$$\mathrm{H}(x+a_1)\,\mathrm{H}(x+a_2)\ldots\mathrm{H}(x+a_{2m})\,\mathrm{H}(x+a_{2m+1}):$$

il satisfait évidemment à la première des équations précédentes, et l'on voit sans peine qu'il vérifiera la seconde, en assujettissant les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}, a_{2m+1}$, à la seule condition

$$a_1+a_2+\ldots+a_{2m}+a_{2m+1}=2j\mathrm{K},$$

j étant un nombre entier quelconque. En introduisant un facteur constant, on aura une nouvelle expression de la solution générale, dont la comparaison avec la première donne le théorème exprimé par l'égalité

$$\begin{aligned}\sin\mathrm{am}(x)\,\mathrm{F}[\sin^2\mathrm{am}(x)] - \frac{d\sin\mathrm{am}(x)}{dx} f[\sin^2\mathrm{am}(x)] \\ = \text{const.}\frac{\mathrm{H}(x+a_1)\,\mathrm{H}(x+a_2)\ldots\mathrm{H}(x+a_{2m+1})}{\Theta^{2m+1}(x)}.\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons, sous la forme trouvée par Abel, les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques relatives à l'addition des arguments.

Dans le cas le plus simple, celui de $m=1$, on aura

$$\begin{aligned}\sin\mathrm{am}\,x[\sin^2\mathrm{am}(x)+\mathrm{A}] - \mathrm{B}\frac{d\sin\mathrm{am}(x)}{dx} \\ = \text{const.}\frac{\mathrm{H}(x+a_1)\,\mathrm{H}(x+a_2)\,\mathrm{H}(x-a_1-a_2)}{\Theta^3(x)}.\end{aligned}$$

Les coefficients A, B dépendent des quantités a_1 et a_2, au moyen des deux équations qui expriment que le premier membre s'annule pour $x=-a_1$, $x=-a_2$.

Si l'on suppose $a_1=-a_2$, on trouvera

$$\mathrm{B}=0, \qquad \mathrm{A}=-\sin^2\mathrm{am}(a_1),$$

ce qui donnera

$$\sin\mathrm{am}(x)[\sin^2\mathrm{am}(x)-\sin^2\mathrm{am}(a_1)] = \text{const.}\frac{\mathrm{H}(x)\,\mathrm{H}(x+a_1)\,\mathrm{H}(x-a_1)}{\Theta^3(x)};$$

et par suite

$$\sin^2\mathrm{am}(x)-\sin^2\mathrm{am}(a_1) = \text{const.}\frac{\mathrm{H}(x+a_1)\,\mathrm{H}(x-a_1)}{\Theta^2(x)},$$

$$\begin{aligned}&\log[\sin^2\mathrm{am}(x)-\sin^2\mathrm{am}(a_1)] \\ &\quad = \text{const.}+\log\mathrm{H}(x+a_1)+\log\mathrm{H}(x-a_1)-2\log\Theta(x).\end{aligned}$$

Cette dernière équation conduit à la théorie des fonctions de troisième espèce, en différentiant par rapport à a_1, et intégrant par rapport à x.

Mais je reprends les deux équations

$$\Pi(x+4\mathrm{K})=\Pi(x), \qquad \Pi(x+2i\mathrm{K}')=(-1)^n e^{-n\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')}\,\Pi(x),$$

dont la solution générale est donnée par l'expression

$$\begin{aligned}\Pi(x) = {} & \mathrm{A}\mathrm{H}^n(x)+\mathrm{B}\mathrm{H}^{n-1}(x)\,\Theta(x)+\ldots+\mathrm{I}\Theta^n(x) \\ & +[\mathrm{H}(x)\,\Theta(x)-\mathrm{H}(x)\,\Theta'(x)] \\ & \times[\mathrm{A}'\mathrm{H}^{n-2}(x)+\mathrm{B}'\mathrm{H}^{n-3}(x)\,\Theta(x)+\ldots+\mathrm{I}'\Theta^{n-2}(x)].\end{aligned}$$

En faisant $\alpha=e^{-p\frac{2i\pi}{n}}$ et

$$\begin{aligned}\Phi(x) = \Pi(x)+\alpha\Pi\left(x+\frac{4\mathrm{K}}{n}\right)+\alpha^2\Pi\left(x+\frac{8\mathrm{K}}{n}\right)+\ldots \\ +\alpha^{n-1}\Pi\left[x+\frac{4(n-1)\mathrm{K}}{n}\right],\end{aligned}$$

on aura toujours la seconde équation

$$\Phi(x+2i\mathrm{K}')=(-1)^n e^{-n\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')}\,\Phi(x),$$

mais de plus

$$\Phi\left(x+\frac{4j\mathrm{K}}{n}\right)=\alpha^{-j}\,\Phi(x).$$

Posant donc

$$\Psi(x)=e^{-p\frac{i\pi x}{2\mathrm{K}}}\,\Phi(x),$$

il viendra

$$\Psi\left(x+\frac{4\mathrm{K}}{n}\right)=\Psi(x), \qquad \Psi(x+2i\mathrm{K}')=(-1)^n e^{-n\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')+p\frac{\pi\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}\,\Psi(x).$$

Je mets à la place du facteur $(-1)^n$, $e^{ni\pi}$, et je fais

$$\Psi_1(x)=\Psi\left[x+\frac{(n-1)\mathrm{K}}{n}-\frac{p}{n}i\mathrm{K}'\right];$$

j'obtiendrai par là les deux équations

$$\Psi_1\left(x+\frac{4\mathrm{K}}{n}\right)=\Psi_1(x), \qquad \Psi_1(x+2i\mathrm{K}')=-e^{-n\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')}\,\Psi_1(x).$$

On aurait pu faire plus généralement

$$\Psi_1(x)=\Psi\left[x+\frac{(n-\nu)\mathrm{K}}{n}-p\frac{i\mathrm{K}'}{n}\right],$$

ν désignant un nombre impair quelconque, et l'on serait arrivé aux mêmes conditions. En faisant

$$\frac{1}{\mathrm{M}} = \frac{n\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}},$$

on trouvera, comme je l'ai déjà établi, que le nombre n soit impair ou pair,

$$\Psi_1(x) = a\mathrm{H}_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}}\right) + b\Theta_1\left(\frac{x}{\mathrm{M}}\right).$$

Nous voici donc parvenu au théorème exprimé par l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\Pi(x) + \alpha\Pi\left(x + \frac{4\mathrm{K}}{n}\right) + \alpha^2\Pi\left(x + \frac{8\mathrm{K}}{n}\right) + \ldots + \alpha^{n-1}\Pi\left[x + \frac{4(n-1)\mathrm{K}}{n}\right] \\ = e^{p\frac{i\pi x}{2\mathrm{K}}}\left\{a\mathrm{H}_1\left[\frac{x}{\mathrm{M}} + \frac{pi\mathrm{K}' - (n-\nu)\mathrm{K}}{n\mathrm{M}}\right] + b\Theta_1\left[\frac{x}{\mathrm{M}} + \frac{pi\mathrm{K}' - (n-\nu)\mathrm{K}}{n\mathrm{M}}\right]\right\}.\end{aligned}$$

Sans m'arrêter à la détermination des constantes a, b, il est clair qu'en remplaçant α successivement par toutes les racines de l'équation binome $x^n = 1$, ou en faisant $p = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, on aura un système de n équations linéaires qui donneront

$$\begin{aligned}\Pi(x) = \sum_0^{n-1}{}_p\, e^{p\frac{i\pi x}{2\mathrm{K}}}\Bigg\{ & a_p\mathrm{H}_1\left[\frac{x}{\mathrm{M}} + \frac{pi\mathrm{K}' - (n-\nu)\mathrm{K}}{n\mathrm{M}}\right] \\ & + b_p\Theta_1\left[\frac{x}{\mathrm{M}} + \frac{pi\mathrm{K}' - (n-\nu)\mathrm{K}}{n\mathrm{M}}\right]\Bigg\}.\end{aligned}$$

Cette nouvelle expression de la fonction $\Pi(x)$ conduit au développement en série de toute fonction rationnelle de $\sin\mathrm{am}(x)$ et de sa dérivée. (J'ai remarqué à ce sujet qu'en cherchant le développement de la fonction

$$\mathfrak{I}(x) = e^{\frac{\pi x^2}{4\mathrm{KK}'}}\Theta(x),$$

d'après celui de

$$\begin{aligned}\Theta(x) &= 1 - 2q\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}} + 2q^4\cos 2\frac{\pi x}{\mathrm{K}} - \ldots \\ &= 1 + \sum_1^{\infty}{}_n(-1)^n\left[e^{\frac{n\pi}{\mathrm{K}}(ix - n\mathrm{K}')} + e^{-\frac{n\pi}{\mathrm{K}}(ix + n\mathrm{K}')}\right],\end{aligned}$$

on arrivait au résultat suivant :

$$\mathfrak{I}(x) = e^{\frac{\pi}{4\mathrm{KK}'}x^2} + \sum_1^{\infty}{}_n(-1)^n\left[e^{\frac{\pi}{4\mathrm{KK}'}(x + 2ni\mathrm{K}')^2} + e^{\frac{\pi}{4\mathrm{KK}'}(x - 2ni\mathrm{K}')^2}\right].$$

La fonction $e^{\frac{\pi x^2}{4\mathrm{KK}'}}\mathrm{H}(x)$ donne de même

$$\sum_1^{\infty}{}_n(-1)^n\left\{e^{\frac{\pi}{4\mathrm{KK}'}[x + (2n+1)i\mathrm{K}']^2} - e^{\frac{\pi}{4\mathrm{KK}'}[x - (2n+1)i\mathrm{K}']^2}\right\}.)$$

La théorie de la transformation découle bien simplement des mêmes principes. Considérez, en effet, la somme ou la somme des produits 2 à 2, 3 à 3, etc., ou le produit des n fonctions (n étant impair) :

$$\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}\,\frac{\mathrm{H}\left(x + \frac{4\mathrm{K}}{n}\right)}{\Theta\left(x + \frac{4\mathrm{K}}{n}\right)}\,\frac{\mathrm{H}\left(x + \frac{8\mathrm{K}}{n}\right)}{\Theta\left(x + \frac{8\mathrm{K}}{n}\right)}\cdots\frac{\mathrm{H}\left[x + \frac{4(n-1)\mathrm{K}}{n}\right]}{\Theta\left[x + \frac{4(n-1)\mathrm{K}}{n}\right]}.$$

Soient $\Phi_1(x)$ le numérateur, $\Phi_0(x)$ le dénominateur : pour l'une et pour l'autre de ces deux fonctions on trouve les conditions

$$\Phi(x + 2i\mathrm{K}') = -e^{-n\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x + i\mathrm{K}')}\Phi(x), \qquad \Phi\left(x + \frac{4\mathrm{K}}{n}\right) = \Phi(x),$$

desquelles il résulte

$$\Phi_1(x) = \mathrm{A}_1\mathrm{H}_1\left(\frac{n\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}x\right) + \mathrm{B}_1\Theta_1\left(\frac{n\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}x\right),$$

$$\Phi_0(x) = \mathrm{A}_0\mathrm{H}_1\left(\frac{n\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}x\right) + \mathrm{B}_0\Theta_1\left(\frac{n\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}x\right).$$

Or la fonction $\Phi_1(x)$ sera paire ou impaire selon qu'elle sera relative à une somme de produits d'un nombre pair ou d'un nombre impair de fonctions. Dans le premier cas, on devra faire $\mathrm{A}_1 = 0$, dans le second, $\mathrm{B}_1 = 0$; d'ailleurs pour $\Phi_0(x)$ on a toujours $\mathrm{A}_0 = 0$. De là résulte que la somme des produits 2 à 2, 4 à 4, ..., $n-1$ à $n-1$ des quantités

$$\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}, \quad \frac{\mathrm{H}\left(x + \frac{4\mathrm{K}}{n}\right)}{\Theta\left(x + \frac{4\mathrm{K}}{n}\right)}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathrm{H}\left[x + \frac{4(n-1)\mathrm{K}}{n}\right]}{\Theta\left[x + \frac{4(n-1)\mathrm{K}}{n}\right]},$$

est constante, et qu'elles peuvent être considérées comme les racines d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré, dont les coefficients sont des fonctions du premier degré de $\dfrac{\mathrm{H}_1\left(\frac{n\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}x\right)}{\Theta_1\left(\frac{n\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}x\right)}$. On en conclut l'expression connue de cette dernière fonction, par une fonction rationnelle de l'une quelconque des quantités précédentes, etc. Toutes ces propriétés, spéciales à la fonction à double période $\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}$, découlent immédiatement, comme on le voit, de l'équation de définition des fonctions H et Θ simplement périodiques; on peut même remarquer la grande extension que reçoit le développement en produit infini de $\sin\mathrm{am}(x)$, qui a été obtenu la première fois comme conséquence des formules de transformation, au moyen de l'égalité obtenue plus haut, savoir :

$$\begin{aligned}&\sin\mathrm{am}(x)\,\mathrm{F}[\sin^2\mathrm{am}(x)] - \frac{d\sin\mathrm{am}(x)}{dx} f[\sin^2\mathrm{am}(x)]\\ &\quad = \text{const.}\frac{\mathrm{H}(x+a_1)\,\mathrm{H}(x+a_2)\ldots\mathrm{H}(x+a_{2m+1})}{\Theta^{2m+1}(x)}.\end{aligned}$$

Jusqu'à présent, je n'ose point encore espérer, Monsieur, d'appliquer avec succès la méthode précédente à l'analyse des fonctions de deux variables à quatre périodes simultanées; ce sera donc sous un autre point de vue que je vais essayer de lier en quelques points, par des résultats analogues, la théorie des fonctions abéliennes et des fonctions elliptiques. Ainsi je prendrai les fonctions de troisième espèce, et sous la forme suivante :

$$\int\left[\left(\frac{\Delta a}{x-a}+\frac{\Delta b}{x-b}\right)\frac{dx}{\Delta x}+\left(\frac{\Delta a}{y-a}+\frac{\Delta b}{y-b}\right)\frac{dy}{\Delta y}\right];$$

l'intégrale étant assujettie à s'évanouir, lorsque l'on fait à la fois $x=0$, $y=0$, Δx représentant la racine carrée du polynome $p_1x^1+p_2x^2+p_3x^3+p_4x^4+p_5x^5$. Je la désignerai par $\Pi(u, v, \alpha, \beta)$, lorsqu'on y aura fait les substitutions $x=\lambda_0(u, v)$, $y=\lambda_1(u, v)$, les nouvelles variables u et v étant comme à l'ordinaire

$$u=\int_0^x\frac{dx}{\Delta x}+\int_0^y\frac{dy}{\Delta y},\qquad v=\int_0^x\frac{x\,dx}{\Delta x}+\int_0^y\frac{y\,dy}{\Delta y},$$

et de même $a=\lambda_0(\alpha, \beta)$, $b=\lambda_1(\alpha, \beta)$. On aura alors les expressions suivantes des coefficients différentiels

$$\begin{aligned}\frac{d\Pi}{du}&=\Delta a\frac{x+y-a}{(a-x)(a-y)}+\Delta b\frac{x+y-b}{(b-x)(b-y)},\\ \frac{d\Pi}{dv}&=-\frac{\Delta a}{(a-x)(a-y)}-\frac{\Delta b}{(b-x)(b-y)}.\end{aligned}$$

J'introduirai pareillement les variables u et v dans les fonctions de seconde espèce, savoir :

$$\int\left(\frac{r^2\,dr}{\Delta x}+\frac{y^2\,dy}{\Delta y}\right)\quad\text{et}\quad\int\left(\frac{x^3\,dx}{\Delta x}+\frac{y^3\,dy}{\Delta y}\right);$$

elles deviendront respectivement

$$\begin{gathered}\int[(\lambda_0+\lambda_1)\,dv-\lambda_0\lambda_1\,du],\\ \int[(\lambda_0^2+\lambda_0\lambda_1+\lambda_1^2)\,dv-\lambda_0\lambda_1(\lambda_0+\lambda_1)\,du].\end{gathered}$$

Cela posé, la première étant désignée pour un instant par $(u, v)_1$, et la seconde par $(u, v)_2$, je ferai

$$\mathrm{E}_1(u, v)=2p_4(u, v)_1+3p_5(u, v)_2\qquad\text{et}\qquad\mathrm{E}_2(u, v)=p_5(u, v)_1;$$

on aura alors le théorème exprimé par l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}(1)\quad&2\Pi(u, v, \alpha, \beta)-2\Pi(\alpha, \beta, u, v)\\ &\quad=p_3(\alpha v-\beta u)+\alpha\mathrm{E}_1(u, v)+\beta\mathrm{E}_2(u, v)-u\mathrm{E}_1(\alpha, \beta)-v\mathrm{E}_2(\alpha, \beta),\end{aligned}$$

de laquelle se tirent les valeurs des fonctions complètes. Prenons en effet pour u et v deux demi-périodes simultanées i, j, les valeurs correspondantes de x et y donneront $\Delta(x)=0$, $\Delta(y)=0$; ainsi l'on aura

$$2\Pi(i, j, \alpha, \beta)=p_3(\alpha j-\beta i)+\alpha\mathrm{E}_1(i, j)+\beta\mathrm{E}_2(i, j)-i\mathrm{E}_1(\alpha, \beta)-j\mathrm{E}_2(\alpha, \beta).$$

On remarque sur cette expression un singulier genre de discontinuité de la fonction Π. En effet, les arguments u, v, étant quelconques, il est hors de doute que l'on peut, sans altérer sa valeur, ajouter les périodes simultanées aux arguments α, β; mais si l'on suppose $u=i$, $v=j$, la fonction deviendra uniquement périodique pour ces indices; c'est ce que l'on vérifie aisément sur la valeur précédente.

L'égalité (1) peut être transformée en une autre plus simple. Posons

$$\mathrm{Z}_1(u, v)=\mathrm{E}_1(u, v)-\mathrm{A}u-\mathrm{B}v,\qquad\mathrm{Z}_2(u, v)=\mathrm{E}_2(u, v)-\mathrm{A}'u-\mathrm{B}'v$$

et déterminons A, B, A′, B′, par les conditions

$$\begin{aligned}\mathrm{A}i+\mathrm{B}j&=\mathrm{E}_1(i, j),&\qquad\mathrm{A}i'+\mathrm{B}j'&=\mathrm{E}_1(i', j'),\\ \mathrm{A}'i+\mathrm{B}'j&=\mathrm{E}_2(i, j),&\qquad\mathrm{A}'i'+\mathrm{B}'j'&=\mathrm{E}_2(i', j'),\end{aligned}$$

i', j' désignant deux autres demi-périodes simultanées. Faisons en outre

$$\Phi(u, v, \alpha, \beta) = 2\Pi(u, v, \alpha, \beta) + u\mathrm{Z}_1(\alpha, \beta) + v\mathrm{Z}_2(\alpha, \beta) - c(\alpha v - \beta u),$$

c étant une constante dont la valeur est $c = p_3 + \mathrm{B} - \mathrm{A}'$, il viendra

$$(2) \qquad \Phi(u, v, \alpha, \beta) - \Phi(\alpha, \beta, u, v) = -c(\alpha v - \beta u).$$

Dans le théorème exprimé par cette égalité, la fonction Φ, comme il est aisé de voir, jouira de la propriété que

$$\Phi(u + 2i,\ v + 2j,\ \alpha, \beta) = \Phi(u, v, \alpha, \beta),$$
$$\Phi(u + 2i', v + 2j', \alpha, \beta) = \Phi(u, v, \alpha, \beta);$$

ainsi on obtiendrait une fonction séparément périodique en u et en v, en prenant

$$\Psi(u, v, \alpha, \beta) = \Phi\left(\frac{iu + i'v}{\pi}, \frac{ju + j'v}{\pi}, \alpha, \beta\right).$$

Peut-être cela conduira-t-il à un développement de la fonction Ψ de la forme $\Sigma a_{m,n} e^{\sqrt{-1}(mu+nv)}$. J'ai remarqué à ce sujet que, le théorème d'Abel permettant d'exprimer algébriquement

$$\lambda_0\left(\frac{iu + i'v}{\pi}, \frac{ju + j'v}{\pi}\right), \quad \lambda_1\left(\frac{iu + i'v}{\pi}, \frac{ju + j'v}{\pi}\right),$$

au moyen de

$$\lambda_0\left(\frac{iu}{\pi}, \frac{ju}{\pi}\right), \quad \lambda_1\left(\frac{iu}{\pi}, \frac{ju}{\pi}\right), \quad \text{et} \quad \lambda_0\left(\frac{i'v}{\pi}, \frac{j'v}{\pi}\right), \quad \lambda_1\left(\frac{i'v}{\pi}, \frac{j'v}{\pi}\right),$$

on obtenait un nouveau genre de réduction des fonctions de deux variables à des fonctions algébriques de fonctions d'une variable, parfaitement analogue à celui que vous m'avez fait, Monsieur, l'honneur de m'écrire; mais ce cas particulier, auquel j'ai été ainsi amené, ne m'a point semblé moins difficile à traiter que le cas général.

Quoi qu'il en soit, le théorème d'Abel donnera, pour l'addition des arguments dans la fonction Π, l'égalité

$$\begin{aligned}&\Pi(u + u', v + v', \alpha, \beta)\\ &\quad = \Pi(u, v, \alpha, \beta) + \Pi(u', v', \alpha, \beta) + \log f(u, v, u', v', \alpha, \beta),\end{aligned}$$

et l'on aura de même ([1])

$$\begin{aligned}(3) \quad &\Phi(u + u', v + v', \alpha, \beta)\\ &\quad = \Phi(u, v, \alpha, \beta) + \Phi(u', v', \alpha, \beta) + \log f(u, v, u', v', \alpha, \beta).\end{aligned}$$

L'égalité (2), au moyen de laquelle on peut faire l'échange simultané des arguments u, v et α, β, nous donnera le théorème correspondant :

$$\begin{aligned}&\Phi(\alpha, \beta, u + u', v + v')\\ &\quad = \Phi(\alpha, \beta, u, v) + \Phi(\alpha, \beta, u', v') + \log f(u, v, u', v', \alpha, \beta),\end{aligned}$$

auquel on pourrait arriver aussi par une voie directe. Cela posé, je mets dans l'équation (3), à la place de u, u', v, v' respectivement, $i + u$, $i + u'$, $j + v$, $j + v'$; il viendra

$$\begin{aligned}&\Phi(u + u' + 2i, v + v' + 2j, \alpha, \beta)\\ &\quad = \Phi(u + i, v + j, \alpha, \beta) + \Phi(u' + i, v' + j, \alpha, \beta)\\ &\qquad + \log f(u + i, v + j, u' + i, v' + j, \alpha, \beta),\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}&\Phi(u + u', v + v', \alpha, \beta)\\ &\quad = \Phi(u + i, v + j, \alpha, \beta) + \Phi(u' + i, v' + j, \alpha, \beta)\\ &\qquad + \log f(u + i, v + j, u' + i, v' + j, \alpha, \beta).\end{aligned}$$

Cela étant, je fais $\alpha = u - u'$, $\beta = v - v'$, ce qui donne

$$\begin{aligned}&\Phi(u + u', v + v', u - u', v - v')\\ &\quad = \Phi(u + i, v + j, u - u', v - v') + \Phi(u' + i, v' + j, u - u', v - v')\\ &\qquad + \log f(u + i, v + j, u' + i, v' + j, u - u', v - v').\end{aligned}$$

Je change ensuite u', v' en $-u'$, $-v'$. Comme la fonction Φ change de signe avec les deux arguments u, v, le terme $\Phi(-u' + i, -v' + j, \ldots)$ pourra s'écrire $-\Phi(u' - i, v' - j, \ldots)$, et, en ajoutant aux deux premiers arguments leurs périodes $2i$, $2j$, $-\Phi(u' + i, v' + j, \ldots)$, de sorte qu'il viendra

$$\begin{aligned}&\Phi(u - u', v - v', u + u', v + v')\\ &\quad = \Phi(u + i, v + j, u + u', v + v') - \Phi(u' + i, v' + j, u + u', v + v')\\ &\qquad + \log f(u + i, v + j, i - u', j - v', u + u', v + v').\end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre les deux dernières égalités, et

([1]) La fonction désignée ici par f est le carré de la précédente. E. P.

développant dans le second membre par le théorème sur l'addition des deux derniers arguments, il viendra

$$\begin{aligned}\Phi(u+u', v+v', u-u', v-v') &+ \Phi(u-u', v-v', u+u', v+v') \\ &= 2\Phi(u+i, v+j, u, v) - 2\Phi(u'+i, v'+j, u', v') + \text{fonct. log}^{\text{e}}.\end{aligned}$$

Enfin, si l'on applique au premier membre le théorème

$$\Phi(u, v, \alpha, \beta) - \Phi(\alpha, \beta, u, v) = -c(\alpha v - \beta u),$$

on obtiendra l'égalité

$$\begin{aligned}\Phi(u+u', v+v', u-u', v-v') \\ &= \Phi(u+i, v+j, u, v) - \Phi(u'+i, v'+j, u', v') \\ &\quad - c(uv' - u'v) + \text{une fonct. log}^{\text{e}},\end{aligned}$$

par laquelle la réduction des fonctions elliptiques de troisième espèce est étendue aux fonctions abéliennes.

Mais j'ai entrevu un autre genre de démonstration, fondée sur des considérations toutes différentes, et dont je vais essayer de donner l'idée en l'appliquant aux fonctions elliptiques.

Soit, comme à l'ordinaire,

$$\Delta(x) = \sqrt{[(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)]};$$

posons

$$z = \int_0^x \frac{\Delta(a)\,dx}{(x-a)\Delta(x)},$$

on trouvera facilement

$$\Delta(a)\frac{dz}{da} = \varkappa^2 \int_0^x \frac{x^2-a^2}{\Delta(x)}\,dx - \frac{\Delta(x)}{x-a} - \frac{1}{a},$$

et, en différentiant de nouveau par rapport à a,

$$\frac{d\left(\Delta(a)\dfrac{dz}{da}\right)}{da} = -2a\varkappa^2 \int_0^x \frac{dx}{\Delta x} - \frac{\Delta(x)}{(x-a)^2} + \frac{1}{a^2}.$$

D'ailleurs on a immédiatement

$$\Delta(x)\frac{dz}{dx} = \frac{\Delta(a)}{x-a}, \qquad \frac{d\left[\Delta(x)\dfrac{dz}{dx}\right]}{dx} = -\frac{\Delta(a)}{(x-a)^2};$$

on en conclut cette équation

$$\frac{d\left[\Delta(a)\dfrac{dz}{da}\right]}{da}\Delta(a) = \frac{d\left[\Delta(x)\dfrac{dz}{dx}\right]}{dx}\Delta(x) - 2a\varkappa^2\Delta(a)\int_0^x \frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{\Delta(a)}{a^2}.$$

En prenant pour variables indépendantes les arguments ξ et α des fonctions

$$x = \sin\text{am}(\xi), \qquad a = \sin\text{am}(\alpha),$$

et mettant $\Delta[\text{am}(\alpha)]$ au lieu de $\Delta[\sin\text{am}(\alpha)]$, il viendra

$$\frac{d^2 z}{d\alpha^2} = \frac{d^2 z}{d\xi^2} - 2\varkappa^2\xi \sin\text{am}(\alpha)\,\Delta[\text{am}(\alpha)] + \frac{\Delta[\text{am}(\alpha)]}{\sin^2\text{am}(\alpha)}.$$

Soit

$$E(\alpha) = \int_0^\alpha \sin^2\text{am}(\alpha)\,d\alpha \qquad \text{et} \qquad z = -\varkappa^2\xi\,E(\alpha) - \int \frac{d\alpha}{\sin\text{am}(\alpha)} + u;$$

on aura

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} = \frac{d^2 u}{d\xi^2}, \qquad \text{donc} \qquad u = F(\alpha+\xi) + f(\alpha-\xi).$$

Considérons donc l'égalité

$$\begin{aligned}u = \int_0^\xi \frac{\Delta[\text{am}(\alpha)]\,d\xi}{\sin\text{am}(\xi) - \sin\text{am}(\alpha)} &+ \varkappa^2\xi\,E(\alpha) \\ &+ \int \frac{d\alpha}{\sin\text{am}(\alpha)} = F(\alpha+\xi) + f(\alpha-\xi).\end{aligned}$$

En faisant $\xi = 0$, on a

$$F(\alpha) + f(\alpha) = \int \frac{d\alpha}{\sin\text{am}(\alpha)};$$

on trouverait de même, pour $\alpha = 0$,

$$F(\xi) + f(-\xi) = \int \frac{d\xi}{\sin\text{am}(\xi)},$$

donc

$$F(\alpha) + f(\alpha) = F(\alpha) + f(-\alpha) \qquad \text{ou} \qquad f(\alpha) = f(-\alpha).$$

Je m'arrête un instant à cette remarque; car, sans aller plus loin, on peut tirer de là les théorèmes fondamentaux des fonctions elliptiques. En effet, en différentiant par rapport à ξ, il vient

$$\frac{\Delta[\text{am}(\alpha)]}{\sin\text{am}(\xi) - \sin\text{am}(\alpha)} + \varkappa^2 E(\alpha) = F'(\alpha+\xi) - f'(\alpha-\xi).$$

Faisant successivement $\xi = x + a$, $\xi = x - a$, et retranchant on obtient l'égalité

$$\begin{aligned}\frac{\Delta[\text{am}(\alpha)]}{\sin\text{am}(x+a) - \sin\text{am}(\alpha)} &- \frac{\Delta[\text{am}(\alpha)]}{\sin\text{am}(x-a) - \sin\text{am}(\alpha)} \\ &= F'(\alpha+x+a) - F'(\alpha+x-a) - f'(\alpha-x-a) + f'(\alpha-x+a).\end{aligned}$$

Or la fonction $f'(x)$ étant impaire, on voit immédiatement que le second membre est symétrique par rapport à x et α; on aura donc

$$\begin{aligned}&\frac{\Delta[\operatorname{am}(\alpha)]}{\sin\operatorname{am}(x+a)-\sin\operatorname{am}(\alpha)}-\frac{\Delta[\operatorname{am}(\alpha)]}{\sin\operatorname{am}(x-a)-\sin\operatorname{am}(\alpha)}\\&=\frac{\Delta[\operatorname{am}(x)]}{\sin\operatorname{am}(\alpha+a)-\sin\operatorname{am}(x)}-\frac{\Delta[\operatorname{am}(x)]}{\sin\operatorname{am}(\alpha-a)-\sin\operatorname{am}(x)}.\end{aligned}$$

De là se tire le théorème d'Euler sur l'addition des fonctions elliptiques. Soit en effet $\alpha=0$, on aura

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sin\operatorname{am}(x+a)}-\frac{1}{\sin\operatorname{am}(x-a)}\\&=\frac{\Delta[\operatorname{am}(x)]}{\sin\operatorname{am}(a)-\sin\operatorname{am}(x)}+\frac{\Delta[\operatorname{am}(x)]}{\sin\operatorname{am}(a)+\sin\operatorname{am}(x)}\\&=\frac{2\sin\operatorname{am}(a)\,\Delta[\operatorname{am}(x)]}{\sin^2\operatorname{am}(a)-\sin^2\operatorname{am}(x)},\end{aligned}$$

et permutant x et a

$$\frac{1}{\sin\operatorname{am}(x+a)}+\frac{1}{\sin\operatorname{am}(x-a)}=\frac{2\sin\operatorname{am}(x)\,\Delta[\operatorname{am}(a)]}{\sin^2\operatorname{am}(x)-\sin^2\operatorname{am}(a)};$$

donc, en ajoutant membre à membre

$$\frac{1}{\sin\operatorname{am}(x+a)}=\frac{\sin\operatorname{am}(x)\,\Delta[\operatorname{am}(a)]-\sin\operatorname{am}(a)\,\Delta[\operatorname{am}(x)]}{\sin^2\operatorname{am}(x)-\sin^2\operatorname{am}(a)};$$

ce qui se ramène sans difficulté à la formule connue. De la même source on tire encore le théorème sur l'addition des arguments dans la fonction de troisième espèce, en opérant ainsi que je l'ai fait dans une lettre adressée à M. Liouville, imprimée déjà dans les *Comptes rendus,* et qui paraîtra de nouveau dans le prochain numéro du *Journal de Mathématiques*. Il ne serait pas difficile d'arriver à la forme que vous prenez ordinairement, Monsieur, pour les fonctions de troisième espèce; il suffirait pour cela de partir de la formule suivante, que l'on démontrerait comme précédemment; savoir, i étant une quelconque des quantités qui donnent $\sin\operatorname{am}(u+i)=\sin\operatorname{am}(u-i)$:

$$\begin{aligned}&\frac{\Delta[\operatorname{am}(\alpha+i)]}{\sin\operatorname{am}(x+a)-\sin\operatorname{am}(\alpha+i)}-\frac{\Delta[\operatorname{am}(\alpha+i)]}{\sin\operatorname{am}(x-a)-\sin\operatorname{am}(\alpha+i)}\\&=\frac{\Delta[\operatorname{am}(x+i)]}{\sin\operatorname{am}(\alpha+a)-\sin\operatorname{am}(x+i)}-\frac{\Delta[\operatorname{am}(x+i)]}{\sin\operatorname{am}(\alpha-a)-\sin\operatorname{am}(x+i)},\end{aligned}$$

et de prendre i tel que $\frac{1}{\sin\operatorname{am}(i)}=0$.

Mais je reviens à l'égalité

$$\int_0^\xi\frac{\Delta[\operatorname{am}(\alpha)]\,d\xi}{\sin\operatorname{am}(\xi)-\sin\operatorname{am}(\alpha)}+\varkappa^2\xi\,\mathrm{E}(\alpha)+\int\frac{d\alpha}{\sin\operatorname{am}(\alpha)}=\mathrm{F}(\alpha+\xi)+f(\alpha-\xi).$$

Changeons α en $-\alpha$, puis retranchons membre à membre, il viendra

$$\begin{aligned}&\int_0^\xi\frac{2\sin\operatorname{am}(\alpha)\,\Delta[\operatorname{am}(\alpha)]\,d\xi}{\sin^2\operatorname{am}(\xi)-\sin^2\operatorname{am}(\alpha)}+2\varkappa^2\xi\,\mathrm{E}(\alpha)\\&=\mathrm{F}(\alpha+\xi)+f(\alpha-\xi)-\mathrm{F}(\xi-\alpha)-f(-\xi-\alpha).\end{aligned}$$

Le second membre pourra encore évidemment être représenté par $\mathrm{F}(\alpha+\xi)+f(\alpha-\xi)$, et puisque le premier s'annule pour $\xi=0$, et $\alpha=0$, par $\mathrm{F}(\xi+\alpha)-\mathrm{F}(\xi-\alpha)$, F étant une fonction paire. Pour la déterminer, différentions par rapport à ξ; puis faisons $\xi=0$, il viendra

$$2\mathrm{F}'(\alpha)=-\frac{2\sin\operatorname{am}(\alpha)\,\Delta[\operatorname{am}(\alpha)]}{\sin^2\operatorname{am}(\alpha)}+2\varkappa^2\,\mathrm{E}(\alpha),$$

d'où, en posant $\mathrm{Z}(\alpha)=\int\mathrm{E}(\alpha)\,d\alpha$:

$$\mathrm{F}(\alpha)=-\tfrac{1}{2}\log\sin^2\operatorname{am}(\alpha)+\varkappa^2\,\mathrm{Z}(\alpha);$$

il vient donc cette égalité

$$\begin{aligned}&\int_0^\xi\frac{2\sin\operatorname{am}(\alpha)\,\Delta[\operatorname{am}(\alpha)]\,d\xi}{\sin^2\operatorname{am}(\xi)-\sin^2\operatorname{am}(\alpha)}\\&=-2\varkappa^2\xi\,\mathrm{E}(\alpha)+\tfrac{1}{2}\log\frac{\sin^2\operatorname{am}(\xi-\alpha)}{\sin^2\operatorname{am}(\xi+\alpha)}-\varkappa^2[\mathrm{Z}(\xi-\alpha)-\mathrm{Z}(\xi+\alpha)],\end{aligned}$$

de laquelle se conclut sans peine tout le reste de cette recherche.