PRÉFACE.

Vous savez, Messieurs, la perte immense qu'a faite la Science française le 14 janvier dernier. La mort de M. Hermite touche particulièrement l'Université de Paris, où l'illustre géomètre a occupé de 1869 à 1897 la chaire d'Analyse supérieure. Il n'a pas voulu qu'on prît la parole sur sa tombe; nous n'avons donc pas pu entendre les voix autorisées qui auraient dit ce que lui doivent la Science et l'Enseignement. Cette grande vie scientifique demandera des études approfondies, qui se préparent certainement de différents côtés. A défaut d'une telle étude, qu'il me soit permis aujourd'hui, en reprenant cette année mon cours dans cette chaire qui fut celle de M. Hermite, de jeter un coup d'œil sur son œuvre.

I.

Charles Hermite naquit à Dieuze, en Lorraine, le 24 décembre 1822; il fit ses études au collège de Nancy, et les termina à Paris au collège Henri IV et au collège Louis-le-Grand. Il eut à Louis-le-Grand comme professeur de Mathématiques spéciales un maître distingué, M. Richard, qui, quinze ans auparavant, avait été le professeur d'Évariste Galois. Tout en suivant les cours du collège, le jeune Hermite allait lire à la bibliothèque Sainte-Geneviève le *Traité de la résolution des équations numériques* de Lagrange, et il achetait avec ses économies la traduction française des *Recherches arithmétiques* de Gauss : « C'est surtout dans ces deux livres, aimait-il plus tard à répéter, que j'ai appris l'Algèbre. » L'excellent M. Richard s'alarmait un peu de voir son élève si loin des programmes d'examen, mais il n'en disait pas moins un jour au père d'Hermite, qui ne se rendait peut-être pas très bien compte de la valeur du compliment : « C'est un petit Lagrange. » Le premier volume des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, fondées en 1842, renferme deux Notes signées de Charles Hermite, élève du collège Louis-le-Grand. L'une n'est qu'un exercice, mais, dans la seconde, on reconnaît un lecteur assidu de Lagrange qui a déjà beaucoup réfléchi sur la théorie des équations. L'objet de ce travail est de démontrer l'impossibilité de la résolution algébrique des équations du cinquième degré; la démonstration très simple qu'on y trouve pourrait, avec de légères additions, devenir classique. Hermite entre à l'École Polytechnique à la fin de 1842; les exercices de l'École ne l'empêchent pas de poursuivre ses méditations mathématiques, et, dès le mois de janvier 1843, il écrit à Jacobi, sur le conseil de Liouville, pour lui faire part de ses recherches sur les fonctions abéliennes. Le grand géomètre allemand avait, par une merveilleuse divination, montré quelques années auparavant comment on devait généraliser le problème de l'inversion de l'intégrale elliptique. Mais les propriétés essentielles des nouvelles transcendantes étaient si peu connues, qu'un géomètre, doué cependant d'une rare pénétration, se méprenait encore

en 1844 sur leur nature, faute d'avoir saisi le principe fondamental relatif à la coexistence des périodes; les travaux de Göpel et de Rosenhain ne devaient venir que quelques années plus tard. Hermite étend aux fonctions abéliennes le théorème donné par Abel pour la division de l'argument dans les fonctions elliptiques; il montre que les équations correspondantes sont résolubles par radicaux, et il traite de l'abaissement de l'équation relative à la division des fonctions complètes. L'année suivante, en août 1844, Hermite envoie à Jacobi une seconde Lettre où il étudie le problème de la transformation des fonctions elliptiques. Son but est d'abord de retrouver les résultats énoncés par Jacobi sur cette question capitale, mais on trouve, en réalité, dans ce Mémoire, tous les principes de la théorie des fonctions Θ de différents ordres, fonctions quelquefois désignées sous le nom de *fonctions intermédiaires* et si importantes pour la théorie générale des fonctions doublement périodiques. Ces deux Lettres intéressèrent vivement Jacobi, qui fit au jeune mathématicien français l'honneur de les insérer dans l'édition complète de ses *Œuvres*. On a souvent cité les dernières phrases de la réponse de Jacobi, qui possédait de son côté plusieurs des résultats indiqués par son correspondant. « Ne soyez pas fâché, Monsieur, si quelques-unes de vos découvertes se sont rencontrées avec mes anciennes recherches. Comme vous dûtes commencer par où je finis, il y a nécessairement une petite sphère de contact. Dans la suite, si vous m'honorez de vos Communications, je n'aurai qu'à apprendre. » Une autre phrase, celle-là d'un intérêt purement mathématique, mérite encore d'être retenue : « En cherchant, disait Jacobi, à tirer la transformation directe des propriétés des fonctions Θ, sans faire usage de leurs décompositions en facteurs infinis, vous

貴重書

avez pensé savamment aux cas, plus généraux, où probablement on doit se résigner à l'impossibilité d'une décomposition en facteurs. » Cette remarque devait fructifier dans l'esprit d'Hermite; nous la retrouverons plus tard dans son Mémoire célèbre sur la transformation des fonctions abéliennes.

C'est principalement de théorie des nombres que s'occupe Hermite dans les années suivantes. Il y est conduit d'abord par le théorème purement arithmétique de Jacobi sur l'impossibilité d'une fonction d'une variable à trois périodes, et peu à peu la lecture assidue des *Recherches arithmétiques* de Gauss l'amène à des problèmes de plus en plus étendus. La théorie des formes et les irrationnelles algébriques font alors l'objet des méditations profondes d'Hermite qui, continuant sa correspondance avec Jacobi, lui envoie quatre Lettres sur la théorie des nombres. Rien ne montre mieux que ces Lettres le génie d'Hermite; la puissance d'invention sur des sujets aussi nouveaux et aussi difficiles y est prodigieuse. Les idées s'y pressent abondantes et touffues; elles seront développées et précisées dans des Mémoires ultérieurs, et il en est plus d'une dont la fécondité n'est pas aujourd'hui épuisée. C'est dans la théorie des formes quadratiques à un nombre quelconque de variables que se trouvent les principes des méthodes employées : il est d'abord établi que, étant donnée une forme quadratique à n variables et à coefficients réels quelconques, le minimum de la forme pour des valeurs entières qui ne sont pas toutes nulles est inférieur à $\rho_n \sqrt[n]{D}$, en désignant par D la valeur absolue du déterminant, et par ρ_n une quantité numérique dépendant seulement de n. Hermite a donné pour ce nombre $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}$; on a depuis obtenu pour ρ_n une valeur inférieure, mais le point

essentiel est, pour un nombre donné de variables, la limitation du minimum à l'aide du déterminant seul de la forme, quoique dans certaines questions il puisse être avantageux d'avoir la moindre valeur possible. Ce résultat obtenu, une considération extrêmement originale permet, en premier lieu, à Hermite de l'appliquer à la généralisation de la théorie des fractions continues, en cherchant l'approximation simultanée de plusieurs quantités au moyen de fractions ayant même dénominateur m; l'erreur dans cette représentation approchée de n quantités est de l'ordre $\frac{1}{m\sqrt[n]{m}}$. C'est un point sur lequel il convient d'insister, non pas seulement à cause de l'intérêt du résultat, mais parce que nous avons là le premier et mémorable exemple de cette introduction des variables continues dans la théorie des nombres, que nous allons bientôt retrouver dans des problèmes plus vastes.

Dans le cas d'une seule grandeur A, le résultat est bien simple, mais met remarquablement en évidence le rôle de la variable continue; Hermite considère la forme quadratique linéaire

$$(x - Ay)^2 + \frac{y^2}{\Delta^2},$$

Δ étant une quantité positive quelconque; du théorème précédent on conclut de suite que l'on peut trouver deux entiers m et n, tels que

$$|m - An| < \frac{1}{n\sqrt{3}},$$

résultat plus précis, d'ailleurs, que celui donné par la théorie des fractions continues, à cause du facteur $\sqrt{3}$. Quand Δ croît d'une manière continue, les mêmes entiers m et n peuvent d'abord être conservés pour satisfaire aux conditions voulues;

貴重書

mais, au passage de Δ par une certaine valeur, il faut brusquement prendre deux nouveaux nombres m' et n', et l'on a la relation

$$mn' - m'n = \pm 1.$$

La théorie élémentaire des fractions continues se présente ainsi sous un jour essentiellement nouveau et se trouve susceptible d'être généralisée, en même temps que la continuité avec la variable Δ se trouve introduite dans une question arithmétique.

Dans le cas de n quantités données A_1, A_2, $\ldots$, A_n, il faudra envisager la forme quadratique à $n+1$ variables x_0, x_1, $\ldots$, x_n

$$(x_1 - A_1x_0)^2 + (x_2 - A_2x_0)^2 + \ldots + (x_n - A_nx_0)^2 + \frac{x_0^2}{\Delta^2},$$

où Δ est une quantité positive quelconque. En appliquant à cette forme le résultat énoncé sur le minimum d'une forme quadratique, on arrive de suite à la représentation approchée des quantités A, l'approximation étant liée à la quantité Δ qu'on peut prendre aussi grande que l'on veut. Le théorème de Jacobi sur l'impossibilité d'une fonction à trois périodes peut être aussi établi par des considérations analogues, et Hermite fut ainsi conduit à la démonstration de l'impossibilité pour une fonction de n variables complexes d'avoir plus de $2n$ systèmes de périodes simultanées, théorème que Riemann devait retrouver ultérieurement. Citons encore ici, quoiqu'elle ait été donnée beaucoup plus tard par Hermite, la démonstration d'un résultat d'abord établi par Tchebycheff et susceptible de généralisations très étendues : étant données deux constantes quelconques a et b, on peut trouver deux entiers x et y, tels que

$$|x - ay - b| < \frac{1}{2y}.$$

La méthode d'Hermite lui permet même de remplacer le facteur $\frac{1}{2}$ par le facteur plus petit $\sqrt{\frac{2}{27}}$.

L'*introduction de variables continues* dans certaines formes quadratiques a été l'idée fondamentale qui a dominé la longue suite des travaux arithmétiques d'Hermite. Je ne puis songer à entrer dans le détail de ces profondes recherches ; arrêtons-nous seulement sur les points de vue nouveaux, qui ont été si féconds dans l'étude des formes quadratiques à un nombre quelconque de variables, des irrationnelles algébriques et des formes décomposables en facteurs linéaires. On sait que Gauss, dans ses recherches arithmétiques, a élevé un monument à la théorie arithmétique des formes quadratiques à deux variables dont l'étude avait été commencée par Lagrange et Legendre, et a posé les bases de la théorie des formes quadratiques ternaires. Le problème de la réduction des formes quadratiques est d'une importance capitale ; la difficulté n'est pas la même suivant qu'il s'agit de formes définies ou indéfinies. Hermite, traitant d'abord le cas plus simple des formes quadratiques définies à un nombre quelconque de variables et dont les coefficients sont des quantités réelles quelconques, donne différents procédés de réduction, d'où se déduit immédiatement que, pour les formes définies à coefficients entiers et de déterminant donné, il n'y a qu'un nombre limité de classes. L'étude des formes indéfinies à coefficients entiers présente des difficultés beaucoup plus considérables, qui tiennent en grande partie à ce qu'il y a une infinité de substitutions semblables, comme les appelle Hermite, c'est-à-dire de substitutions à coefficients entiers transformant la forme en elle-même. Les points essentiels de la théorie des formes indéfinies sont rattachés, d'une manière

貴重書

vraiment géniale, à la considération d'une forme définie associée dépendant d'un certain nombre de paramètres arbitraires, et ici nous voyons apparaître les variables continues dans un problème arithmétique extrêmement difficile. Les substitutions à coefficients entiers, permettant de *réduire successivement* cette forme définie, quand, par une variation continue des paramètres, elle cesse d'être réduite, conduisent aux substitutions semblables, et l'on peut démontrer qu'il existe un nombre fini de substitutions à l'aide desquelles on obtient toutes les substitutions transformant la forme en elle-même. Il résulte aussi de cette admirable analyse que, pour les formes indéfinies à coefficients entiers comme pour les formes définies, il n'y a qu'un nombre limité de classes pour un déterminant donné; on en déduit la solution du problème de l'équivalence de deux formes.

Les principes précédents s'appliquent aussi aux formes à coefficients entiers de degré quelconque décomposables en facteurs linéaires; leur théorie est même à bien des égards beaucoup plus simple que celle des formes quadratiques. Les substitutions semblables sont ici deux à deux permutables, et elles peuvent toutes s'exprimer par un produit de puissances de certaines substitutions, dont le nombre s'obtient d'une manière très remarquable : Si a désigne le nombre des facteurs réels dans la forme, et b le nombre des couples de facteurs imaginaires conjugués, il y a $a+b$ substitutions semblables fondamentales. La démonstration de ce beau théorème, énoncé seulement par Hermite au commencement d'un de ses Mémoires, n'a jamais, je crois, été développée. A l'égard des formes quadratiques indéfinies, on ne connaît aujourd'hui encore aucune proposition analogue relative au nombre des substitutions fondamentales, qui ne sont pas, en général, permutables; ce serait là un difficile, mais bien intéressant sujet de recherches.

Les formes quadratiques binaires indéfinies appartiennent en même temps aux deux types précédents; l'application à ce cas très particulier des principes généraux pourra donner une idée des méthodes d'Hermite. Soit une forme indéfinie f à coefficients entiers que nous mettons sous la forme

$$f = a(x+\alpha y)(x+\beta y).$$

La forme définie associée est alors

$$\varphi = (x+\alpha y)^2 + \Delta(x+\beta y)^2 \qquad (\Delta > 0),$$

et l'on doit en faire la *réduction continuelle* en donnant à Δ toutes les valeurs positives. Pour la variation de Δ dans un intervalle convenable ne comprenant pas l'origine, on obtient un certain nombre de réduites de la forme proposée, qui se reproduisent ensuite périodiquement quand Δ va vers l'infini ou vers zéro. On retrouve ainsi, comme chez Gauss, une sorte de périodicité, mais sous un point de vue bien différent et susceptible des généralisations les plus étendues.

Nous n'avons parlé jusqu'ici que des formes à variables réelles. Hermite a introduit dans la Science la notion de formes à indéterminées conjuguées, qui a ouvert à l'Arithmétique et à l'Algèbre un champ extrêmement vaste. Ces formes se partagent encore en formes définies et formes indéfinies; laissant de côté ces dernières, Hermite fait une théorie complète de la réduction des formes définies à indéterminées conjuguées. Les conséquences qu'il en tire sont très nombreuses. Il en est d'une rare élégance. Telles sont les recherches concernant l'approximation des quantités complexes par des fractions dont les éléments sont des entiers complexes de Gauss; la méthode d'Hermite lui donne des résultats plus précis que ceux de Dirichlet, et surtout elle lui permet de trouver les rapports existant entre deux approximations consécutives, ce qui est indispensable pour mettre dans toute son évidence l'analogie entre les nombres réels et les nombres complexes. Citons encore la démonstration des théorèmes de Jacobi sur le nombre des représentations d'un nombre par une somme de quatre carrés.

Des applications d'un caractère plus général concernent les formes à coefficients entiers complexes et à variables complexes de degré quelconque décomposables en facteurs linéaires; en supposant qu'une telle forme φ est irréductible, c'est-à-dire que l'équation $\varphi = 0$ n'admet d'autres solutions entières que les valeurs nulles des variables, Hermite démontre qu'elles ne forment qu'un nombre limité de classes pour un déterminant donné. De ce théorème il déduit une des plus admirables propositions de la science des nombres, à savoir que : les racines de toutes les équations à coefficients entiers complexes d'un degré donné, et pour lesquelles le discriminant a la même valeur, ne représentent qu'un nombre essentiellement limité d'irrationnelles distinctes. Nous pouvons, en deux mots, esquisser la démonstration; à l'équation proposée de degré n, à coefficients entiers,

$$\mathrm{P}y^n + \mathrm{Q}y^{n-1} + \ldots + \mathrm{R}y + \mathrm{S} = 0,$$

et dont nous désignerons les racines par $a, b, \ldots, l$, on fait correspondre la forme φ à n variables $x, y, z, \ldots, u$,

$$\begin{aligned}\varphi = \mathrm{P}^{n-1}&(x + ay + a^2z + \ldots + a^{n-1}u)\\ &\times(x + by + b^2z + \ldots + b^{n-1}u)\ldots(x + ly + l^2z + \ldots + l^{n-1}u),\end{aligned}$$

dont le déterminant ne dépend que du discriminant de l'équation. Les formes φ appartenant à un nombre limité de classes, il en résulte de suite que le nombre des irrationnelles distinctes est limité.

Au début de sa carrière, les fonctions elliptiques et abéliennes avaient appelé l'attention d'Hermite sur certaines irrationnelles algébriques. Depuis cette époque, les nombres algébriques avaient toujours été l'objet de ses méditations. C'est, sans doute, à leur occasion qu'il entreprit la longue suite de ses recherches arithmétiques. « Permettez-moi, disait-il dans une de ses Lettres à Jacobi, de revenir sur les circonstances remarquables auxquelles donne lieu la réduction des formes dont les coefficients dépendent des racines d'équations algébriques à coefficients entiers. Peut-être parviendra-t-on à déduire de là un système complet de caractères pour chaque espèce de ce genre de quantités, analogue, par exemple, à ceux que donne la théorie des fractions continues pour les racines des équations du second degré », et, plus loin, il ajoute : « Quelle tâche immense pour la théorie des nombres de pénétrer dans la nature d'une telle multiplicité d'êtres, en les classant en groupes irréductibles entre eux, de les constituer tous individuellement par des définitions caractéristiques et élémentaires. » On le voit à plusieurs reprises revenir sur ce programme. La question capitale de la recherche des unités complexes dans un corps algébrique est liée par lui à la réduction de certaines formes quadratiques; dès 1845, il passe bien près du théorème célèbre de Dirichlet donnant le nombre exact des unités complexes indépendantes. Mais il s'attache surtout à trouver pour les irrationnelles algébriques un algorithme mettant en évidence les propriétés de ces irrationnelles. Pour les irrationnelles du troisième degré en particulier, le résultat est remarquablement simple : on est conduit à un algorithme périodique entièrement analogue à celui des fractions continues dans leur application aux irrationnelles du second degré. Ainsi, en envisageant une équation du troisième degré à coefficients entiers ayant une racine réelle α et deux racines imaginaires β et γ, on est conduit, d'après ce point de vue, à réduire pour toutes les valeurs positives de la quantité Δ la forme ternaire

$$(x+\alpha y+\alpha^2 z)^2+\Delta(x+\beta y+\beta^2 z)(x+\gamma y+\gamma^2 z),$$

et dans cette réduction continuelle se manifeste une périodicité caractéristique des irrationnelles du troisième degré. Il serait intéressant de comparer les vues générales d'Hermite sur les irrationnelles avec les résultats donnés récemment par M. Minkowski où la considération de certaines chaînes de substitutions permet de donner des critériums nécessaires et suffisants pour qu'un nombre soit algébrique.

II.

La théorie arithmétique des formes binaires rentre évidemment dans le même ordre d'idées que celle des irrationnelles algébriques. Hermite lui a consacré plusieurs Mémoires et a étudié particulièrement le cas des formes de degré impair et le cas des formes quadratiques. Mais, tandis que pour les formes quadratiques les préliminaires algébriques de la théorie arithmétique des formes sont immédiats, il n'en est plus de même quand on s'élève aux formes de degré quelconque ; la partie algébrique de la théorie prend alors un développement inattendu et présente un intérêt considérable. C'est ce

qui amena Hermite à s'occuper de divers problèmes d'Algèbre et particulièrement de la théorie des formes binaires où il allait obtenir de magnifiques résultats en même temps que ses émules Cayley et Sylvester.

Les théorèmes de Sturm et de Cauchy sur le nombre des racines des équations satisfaisant à certaines conditions avaient vivement frappé les géomètres. Sur ce sujet on doit à Hermite quelques résultats qui resteront classiques. En partant de la remarque relative à la décomposition des formes quadratiques en somme de carrés, que Sylvester, qui l'a trouvée en même temps, nomme la *loi d'inertie* et que Jacobi avait aussi rencontrée, Hermite considère d'abord une équation à coefficients réels, et construit une forme quadratique associée à l'équation renfermant une arbitraire réelle t. Quand cette forme est réduite à une somme de carrés, le nombre des carrés négatifs est égal au nombre des couples de racines imaginaires de l'équation augmenté du nombre des racines réelles inférieures à t. Un cas particulier dont la démonstration est immédiate se formule ainsi : dans la forme quadratique à n variables

$$\Sigma(x_0+\alpha x_1+\ldots+\alpha^{n-1}x_{n-1})^2,$$

où la somme est étendue aux n racines α de l'équation, le nombre des carrés négatifs est égal au nombre des couples de racines imaginaires. Poussant la question plus loin, Hermite considère une équation à coefficients complexes ; il associe alors à l'équation une forme quadratique à indéterminées conjuguées, et, quand celle-ci, par une transformation élémentaire, a été débarrassée de ses termes rectangles, le nombre des coefficients positifs est égal au nombre des racines dont le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif. Le théorème de

貴重書

Sturm, le théorème de Cauchy relatif au nombre des racines d'une équation contenue dans un contour et donnant par un calcul algébrique ce nombre de racines quand le contour est formé d'une courbe unicursale, se déduisent des résultats précédents, et sont ainsi établis, comme le remarque Hermite, sans faire intervenir aucune considération de continuité.

Les travaux d'Hermite relatifs à la théorie algébrique des formes binaires sont d'une rare perfection; la simplicité des méthodes et l'élégance des résultats en font de véritables œuvres d'art. La théorie des invariants devait son origine à un Mémoire de Boole, mais le vrai fondateur en fut Cayley qui sut créer toute une nouvelle branche de l'Algèbre. Sylvester vint ensuite et apporta un grand nombre de résultats nouveaux, parmi lesquels la découverte des premiers covariants. L'idée des invariants n'était pas neuve pour Hermite; une notion générale sur les invariants s'était offerte jadis à lui, amenée par une considération purement arithmétique. Il entre dans la lice, et Sylvester pouvait dire plus tard : « Nous formions alors, Cayley, Hermite et moi, une trinité invariantive. » Un calcul symbolique extrêmement ingénieux permet à Hermite de montrer qu'à tout covariant d'une forme de degré m, et qui par rapport aux coefficients de cette forme est du degré p, correspond un covariant du degré m par rapport aux coefficients d'une forme de degré p. Les deux covariants sont d'ailleurs du même degré par rapport aux indéterminées : c'est la célèbre loi de réciprocité d'Hermite. Ses applications sont innombrables. Pour citer un exemple relatif aux invariants, la forme quadratique ayant comme invariant de degré 2μ la puissance μ de son discriminant, il résulte de la loi de réciprocité que toutes les

formes de degré pair ont un invariant du second degré. La loi est surtout intéressante pour les covariants. Hermite démontre que toutes les formes binaires, sauf les formes biquadratiques, ont un covariant quadratique. L'importance de ces covariants quadratiques est capitale; on en déduit la notion de substitution canonique, celle-ci étant une substitution ramenant le covariant quadratique à la forme xy. Au moyen de cette substitution, des invariants et des covariants d'une forme, qu'il eût été presque impossible d'obtenir jamais en fonction explicite des coefficients de cette forme, prennent une forme simple. Grâce à cette théorie, Hermite découvre l'invariant du dix-huitième degré des formes du cinquième degré; c'était le premier exemple d'un invariant gauche, c'est-à-dire se reproduisant multiplié par une puissance impaire du déterminant de la substitution. Nous devons noter particulièrement la découverte des covariants linéaires pour les formes de degré impair à partir du cinquième degré; elle a conduit Hermite, au moyen d'un changement de variables effectué à l'aide de deux covariants linéaires, aux formes-types dont les coefficients sont tous des invariants de la forme initiale. Une application extrêmement intéressante de ces théorèmes généraux concerne les formes du cinquième degré. Ces formes possèdent quatre invariants fondamentaux, en fonctions entières desquels s'expriment tous les autres invariants; les trois premiers avaient été découverts par Sylvester, et le quatrième est l'invariant gauche dont j'ai parlé plus haut. Les coefficients de la forme-type du cinquième degré s'expriment rationnellement à l'aide de ces invariants; Hermite en déduit qu'on peut amener toute équation du cinquième degré à ne dépendre que de deux paramètres qui sont des invariants absolus, et la discussion complète de la nature, réelle ou imaginaire, des racines de l'équation générale du cinquième degré se fait de la manière la plus élégante.

La lecture de ces beaux Mémoires laisse une impression de simplicité et de force; aucun mathématicien du XIX^e siècle n'eut, plus qu'Hermite, le secret de ces transformations algébriques profondes et cachées qui, une fois trouvées, paraissent d'ailleurs si simples. C'est à un tel art du calcul algébrique que pensait sans doute Lagrange, quand il disait à Lavoisier que la Chimie deviendrait un jour facile comme l'Algèbre.

Nous avons dit que l'objet primitif d'Hermite dans ses Études sur les formes binaires avait été arithmétique. Il voulait en particulier approfondir cette proposition, que les formes à coefficients entiers et en nombre infini, qui ont les mêmes invariants, ne forment qu'un nombre limité de classes distinctes. Il a développé surtout ses recherches pour les formes cubiques et les formes biquadratiques, mais il a indiqué sur les formes de degré impair quelconque un théorème bien inattendu, qui se déduit de la considération des formes-types : toutes les formes binaires de degré impair (à partir du cinquième) à coefficients entiers ne forment qu'un seul genre, au sens d'Eisenstein, c'est-à-dire sont transformables les unes dans les autres par des substitutions linéaires de déterminant *un* à coefficients entiers ou fractionnaires. Que de problèmes restent ouverts dans cette vaste théorie des formes! quelles seront les transcendantes numériques permettant d'exprimer le nombre des classes en fonctions des invariants? c'est le secret de l'avenir.

Détourné par de nouvelles études, Hermite ne devait plus revenir qu'incidemment sur ses premières recherches arithmétiques; je l'ai entendu plusieurs fois regretter de ne pas

avoir approfondi davantage certaines parties des Mémoires dont je viens d'essayer de donner une idée. Gauss eut sans doute de tels regrets en relisant vers la fin de sa vie ses *Disquisitiones arithmeticæ*. Une grande œuvre scientifique n'est jamais achevée. Les méthodes générales introduites par Hermite ont ouvert à la théorie des nombres des horizons entièrement nouveaux qui ne sont pas encore complètement explorés. Tous ceux qui, depuis lui, se sont occupés de la théorie des formes ont profondément subi son influence; il suffira de citer le beau Mémoire de Camille Jordan sur l'équivalence des formes, et de rappeler que le merveilleux principe de la réduction continuelle s'adapte même à des recherches toutes modernes sur la théorie de certaines fonctions uniformes.

Hermite, dans la première partie de sa carrière, que je viens de retracer, c'est-à-dire jusque vers 1855, fut en relations suivies, d'abord avec Jacobi et ensuite avec Dirichlet, qui était peut-être à cette époque le plus apte à le comprendre; il avait, à ses débuts, trouvé auprès de ces grands géomètres le meilleur accueil et en avait gardé un fidèle souvenir. Il écrivait encore quelques semaines avant sa mort qu'il avait toujours été et qu'il serait jusqu'à son dernier jour un disciple de Gauss, de Jacobi et de Dirichlet. Les affinités entre esprits de premier ordre sont toujours intéressantes et utiles à suivre; le témoignage d'Hermite à ce sujet est précieux, et l'étude de la plus grande partie de son œuvre le confirme bien. Cauchy, qu'il a cependant beaucoup connu, n'a pas exercé sur lui, au moins à ses débuts, la même influence scientifique.

III.

La théorie des fonctions abéliennes n'avait jamais cessé de préoccuper Hermite depuis l'époque où il était élève à l'École Polytechnique. Il voulut étendre à ces fonctions le problème de la transformation qu'avaient traité avec tant d'éclat Abel et Jacobi dans le cas des fonctions elliptiques; son Mémoire de 1855 sur la transformation des fonctions abéliennes est une de ses plus belles œuvres. Étant données les deux équations différentielles qui, pour un radical portant sur un polynome d'ailleurs arbitraire du cinquième ou du sixième degré, définissent les fonctions abéliennes, Hermite considère simultanément les quinze fonctions uniformes quadruplement périodiques introduites par Göpel et Rosenhain, et qui sont les analogues de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ et $\operatorname{dn} x$. Le problème de la transformation est alors ainsi posé : Pour un polynome donné, déterminer un nouveau polynome tel qu'en formant deux combinaisons linéaires convenables des équations différentielles relatives à ce polynome, les quinze fonctions abéliennes correspondantes s'expriment rationnellement à l'aide des quinze premières. Pour la solution de ce problème algébrique, Hermite se place au point de vue transcendant, et cherche d'abord à étendre aux fonctions Θ de deux variables l'analyse indiquée jadis dans sa seconde lettre à Jacobi pour les fonctions Θ d'une variable. Mais des difficultés d'une nature arithmétique, que n'avait pas connues la théorie des fonctions elliptiques, se présentent dans le nouveau problème. Les périodes des anciennes fonctions doivent être des sommes de multiples des périodes des nouvelles. Or il existe une relation bilinéaire bien connue entre ces périodes; les nombres

entiers figurant dans la transformation des périodes ne sont donc pas arbitraires, ce qui conduit à un ensemble remarquable de substitutions linéaires à coefficients entiers dont les propriétés doivent d'abord être étudiées. Un nombre entier k joue dans l'étude de ces substitutions un rôle essentiel; la notion de systèmes équivalents et non équivalents se pose alors, et il est établi que le nombre des substitutions non équivalentes est égal à $1 + k + k^2 + k^3$, si k est premier. On en peut conclure que le nombre des transformations distinctes des fonctions abéliennes relatives à un nombre premier k est égal à $720 \times (1 + k + k^2 + k^3)$. En même temps que ce théorème fondamental, correspondant au théorème d'Abel et de Jacobi sur le nombre $6(n+1)$ des transformations d'ordre n des fonctions elliptiques (n étant premier), Hermite donne le moyen de former les relations algébriques entre les anciennes et les nouvelles fonctions, résolvant ainsi complètement le problème qu'il s'était posé. Cet admirable travail, rédigé d'une manière très concise, a fait l'objet de nombreux commentaires, et ouvert la voie à des recherches de nature variée, dont quelques-unes ne se rapportent qu'indirectement à la théorie des fonctions abéliennes. Citons entre autres le Mémoire de Laguerre sur le Calcul des systèmes linéaires, où se trouve généralisée la notion des formes quadratiques correspondant aux substitutions linéaires indiquées plus haut; en Algèbre, à un point de vue tout différent, la notion importante de substitution abélienne, telle qu'elle est utilisée par M. Jordan, trouve son point de départ dans une importante remarque du Mémoire sur la transformation des fonctions abéliennes.

Au milieu de tant de travaux, Hermite ne cessait de s'intéresser à la théorie des fonctions elliptiques. Je crois bien qu'elle a été son étude de prédilection. Les belles formules, d'une allure si parfaite, qu'on y rencontre remplissaient de joie, comme il le disait, son âme d'algébriste, ainsi que les rapports si remarquables de ces transcendantes avec l'Algèbre et les propriétés des nombres; les *Fundamenta nova* de Jacobi étaient toujours sur sa table de travail. Une addition à la sixième édition du Traité de Lacroix est restée célèbre dans la théorie des fonctions doublement périodiques; c'est de l'intégration d'une fonction doublement périodique, le long d'un parallélogramme de périodes, qu'Hermite, ici disciple de Cauchy, déduit les propriétés fondamentales de ces fonctions, et en particulier la décomposition en éléments simples si importante pour le Calcul intégral.

En 1858, Hermite reprend l'étude de la transformation des fonctions elliptiques, et cherche à en approfondir davantage le mécanisme. Il rencontre ainsi une abondante moisson et tout d'abord la résolution de l'équation du cinquième degré. Jacobi avait montré que, dans la transformation de degré n (n étant premier), il y a une relation de degré $n+1$ entre les racines quatrièmes de l'ancien et du nouveau module; c'est l'équation qu'on appelle l'*équation modulaire*. Deux fonctions vont jouer un rôle essentiel. Employant les notations de Jacobi, on sait que $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{k'}$ sont des fonctions uniformes de $\omega = \frac{K'i}{K}$; Hermite les désigne par $\varphi(\omega)$ et $\psi(\omega)$ et étudie les transformations qu'elles subissent quand on effectue sur ω une substitution linéaire. Le fait que les modules satisfaisant à l'équation modulaire s'expriment, en utilisant les fonctions précédentes, par des fonctions uniformes d'un paramètre avait vivement frappé Hermite; il eut le pressentiment que cette circonstance n'était possible qu'à cause

de la nature singulière de ces fonctions, et la fonction $\varphi(\omega)$ sur laquelle il attira si vivement l'attention forme le premier exemple de ces fonctions, ayant des lignes de singularités essentielles, dont M. Poincaré devait plus tard faire une étude générale sous le nom de *fonctions fuchsiennes*.

Galois avait énoncé que pour $n = 5, 7, 11$ les équations modulaires sont susceptibles d'un abaissement au degré inférieur d'une unité; ce résultat, retrouvé aussi par M. Betti, avait été vérifié par Hermite dès l'époque déjà lointaine de ses lettres à Jacobi. Il effectue maintenant la réduction d'une manière complète pour $n = 5$, en employant pour former une réduite une fonction convenable des six racines; il trouve ainsi une équation du cinquième degré, susceptible d'être identifiée avec l'équation

$$x^5 - x - a = 0,$$

forme à laquelle un géomètre anglais, Jerrard, avait ramené l'équation générale du cinquième degré sans employer d'autres irrationnalités que des radicaux carrés et cubiques. a étant donné, l'identification conduit à une équation du quatrième degré pour trouver le module de la fonction elliptique. L'équation du cinquième degré se trouve donc résolue, en ce sens que ses racines se trouvent représentées par des expressions s'exprimant simplement à l'aide de $\varphi(\omega)$ et $\psi(\omega)$. Cette résolution de l'équation du cinquième degré frappa vivement l'attention des géomètres et, quelque temps après, Kronecker et Brioschi traitaient la même question sans faire la réduction préalable à l'équation de Jerrard et en utilisant la relation algébrique entre le module et le multiplicateur dans la transformation du cinquième ordre.

Dans un Mémoire étendu sur l'équation du cinquième degré, Hermite exposa ensuite ses travaux, ainsi que ceux de Kronecker et de Brioschi, en utilisant ses anciennes recherches sur les formes du cinquième degré. On trouve, de plus, dans ce Mémoire, quelques résultats généraux concernant les équations de degré quelconque. Il y est montré que, pour une équation de degré quelconque, on peut former un certain nombre d'invariants dont les signes donnent le nombre des racines réelles et imaginaires de l'équation; pareillement on peut former un système de covariants doubles, c'est-à-dire à deux séries de variables, servant, comme les fonctions de Sturm, à déterminer le nombre des racines réelles comprises entre deux nombres. Hermite complétait ainsi d'une manière remarquable ses premières études sur des suites analogues à celles de Sturm.

Nous rencontrons bientôt après un long Mémoire sur la théorie des équations modulaires. Pour réaliser effectivement l'abaissement de l'équation modulaire dans les trois cas prévus par Galois, il fallait calculer le discriminant de cette équation. Hermite entreprend alors d'une manière générale une étude du discriminant des équations modulaires et sa décomposition en facteurs, et est ainsi conduit à d'importantes notions arithmétiques sur le nombre des classes de formes quadratiques. La théorie des équations modulaires n'est d'ailleurs pas le seul lien où la théorie des fonctions elliptiques vient se lier à la théorie des formes quadratiques binaires de déterminant négatif. Un autre plus élémentaire s'offre lorsqu'on développe en séries trigonométriques certains quotients de fonctions Θ; on obtient ainsi des identités, d'où découlent des propositions très cachées d'Arithmétique, et c'est ainsi, entre autres résultats, qu'Hermite retrouve les propositions de Legendre et de Gauss sur la décomposition des nombres en trois carrés. Ces rapprochements étranges, entre des questions de natures si différentes, exerçaient sur son esprit une sorte de fascination et étaient une des causes de l'attrait qu'il eut toujours pour la théorie des fonctions elliptiques. Aussi écrivait-il un jour à propos des travaux de Legendre et de Gauss sur la décomposition des nombres en carrés : « Ces illustres géomètres, en poursuivant au prix de tant d'efforts leurs profondes recherches sur cette partie de l'Arithmétique supérieure, tendaient ainsi à leur insu vers une autre région de la Science et donnaient un mémorable exemple de cette mystérieuse unité, qui se manifeste parfois dans les travaux analytiques en apparence les plus éloignés. »

IV.

De telles analogies et de tels rapprochements se retrouvent aussi dans d'autres parties des Mathématiques. La théorie des fractions continues en Arithmétique, c'est-à-dire la représentation approchée d'un nombre incommensurable par un nombre rationnel, avait été étendue aux fonctions d'une variable. Étant donnée une fonction d'une variable x développée suivant les puissances positives et entières de x, on peut se proposer de représenter cette fonction par une fonction rationnelle de x, dont le numérateur et le dénominateur soient de degré n, avec une approximation de l'ordre $2n+1$ par rapport à x; cette théorie des fractions continues algébriques offre la plus grande analogie avec la théorie des fractions continues arithmétiques. Hermite, qui s'était occupé de la représentation simultanée de plusieurs nombres par des fractions de même dénominateur, devait naturellement s'attacher au problème analogue pour plusieurs fonctions. Ce mode nouveau d'approximations algébriques simultanées le conduisit à une de ses plus belles découvertes, je veux parler de la transcendance du nombre e, base des logarithmes népériens. Son point de départ, dans ce Mémoire célèbre *Sur la fonction exponentielle,* publié en 1873, est l'approximation simultanée d'un certain nombre d'exponentielles de la forme e^{ax} au moyen de fractions rationnelles; les différences entre ces exponentielles et leurs valeurs approchées sont représentées à l'aide d'intégrales définies, et ces approximations permettent d'établir, en faisant $x=1$ et en supposant entiers les nombres a, que e ne peut satisfaire à aucune équation algébrique à coefficients entiers. On savait depuis longtemps former des séries représentant des nombres transcendants; Liouville paraît avoir donné le premier de tels exemples, mais ces nombres ne jouaient aucun rôle en Analyse. L'intérêt qui s'attache à un nombre aussi fondamental que e donnait, au contraire, un prix immense à la démonstration de sa transcendance. Quelques années après, M. Lindemann, en s'inspirant des études d'Hermite, démontrait la transcendance du rapport π de la circonférence au diamètre; en même temps se trouvait, par suite, établie l'impossibilité de la quadrature du cercle. L'étude de ces belles questions a été, dans ces dernières années, notablement simplifiée, mais les principes au fond sont restés les mêmes, et les démonstrations très simples que nous possédons aujourd'hui ont été suggérées par les méthodes d'Hermite.

Après son Mémoire sur l'exponentielle, Hermite continua ses recherches sur les fractions continues algébriques. On connaissait depuis Gauss le rôle des polynomes de Legendre dans le développement de $\log\frac{x-1}{x+1}$ en fraction continue, et

les recherches de M. Heine et de M. Christoffel avaient montré les rapports de la théorie des fractions continues avec certaines équations différentielles linéaires du second ordre. Hermite étend tous ces résultats en montrant comment une certaine équation linéaire d'ordre $n+1$, généralisant l'équation de Gauss, se lie aux modes d'approximations simultanées dont il avait donné une application dans son Mémoire *Sur la fonction exponentielle;* il étend ainsi, pour ne citer qu'un exemple, le résultat de Gauss, en développant n logarithmes de la forme $\log\frac{x-z_i}{x-z_0}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ en fractions continues, ce qui le conduit à généraliser à un point de vue très intéressant les polynomes de Legendre.

Nous avons déjà eu l'occasion de dire que la théorie des fractions continues arithmétiques peut se généraliser de diverses manières. De même, la théorie des fractions continues algébriques peut être étendue dans des directions différentes. Le problème suivant paraissait à Hermite de grande importance et l'a souvent préoccupé : étant données n séries S_1, $S_2, \ldots, S_n$ procédant suivant les puissances croissantes de x, déterminer les polynomes X_1, X_2, $\ldots$, X_n de degrés μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_n$ de manière à avoir pour la somme

$$S_1X_1+S_2X_2+\ldots+S_nX_n$$

une approximation d'ordre $\mu_1+\ldots+\mu_n+n-1$. Il en donne une solution très simple dans le cas où les S sont des exponentielles e^{ax}, et réussit dans le cas général, pour $n=3$, à trouver un algorithme conduisant au résultat cherché sans avoir de systèmes d'équations à résoudre. Chemin faisant, il traite, mais d'une tout autre manière, le problème suivant, résolu par Tchebycheff et analogue à un problème déjà mentionné d'Arithmétique : Trouver deux polynomes X et Y de degrés m et n, de manière à avoir pour $S_1 X + S_2 Y - S_3$ une approximation d'ordre $m + n - 2$. L'allure arithmétique, si je puis le dire, de ces problèmes intéressait vivement Hermite; ils se rattachaient pour lui à des questions importantes d'Analyse; le Mémoire sur e en est la meilleure preuve. Il avait antérieurement consacré un élégant Mémoire au cas particulier de la détermination d'un système de polynomes U, V, W, tels que $U \sin x + V \cos x + W$ commence par la plus haute puissance possible de la variable; il en avait tiré une démonstration immédiate du théorème de Lambert sur l'incommensurabilité de π^2 et peut-être avait-il songé un instant à déduire de ce genre de considérations la transcendante de π.

La puissance de travail d'Hermite était considérable. La transcendance de e, les fractions continues algébriques ne lui font pas abandonner les fonctions elliptiques. Dès 1872, il est en possession de l'intégration de l'équation de Lamé, comme le montrent les feuilles lithographiées de son Cours de l'École Polytechnique. En 1877, il commence la publication dans les *Comptes rendus* de son grand Mémoire *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*. Les fonctions doublement périodiques de seconde espèce, c'est-à-dire les fonctions qui se reproduisent à un facteur constant près par l'addition d'une période, jouent un rôle capital dans le travail d'Hermite; il étend à ces fonctions la décomposition en éléments simples qu'il avait donnée jadis pour les fonctions de première espèce. Il est prêt alors pour faire l'intégration d'une équation rencontrée par Lamé dans la théorie de la chaleur. Cette équation linéaire du second ordre renferme une constante arbitraire. Lamé en avait fait l'intégration pour certaines valeurs de cette constante; Hermite l'intègre dans tous les cas au moyen des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, et rattache à cette intégration la solution de quelques problèmes classiques de Mécanique, comme la recherche du mouvement d'un corps solide ayant un point fixe et n'étant soumis à aucune force, et celui du pendule conique. Le côté algébrique tient aussi une grande place dans ce Mémoire, et les équations correspondant aux cas examinés par Lamé y sont l'objet d'une discussion approfondie. Ces études sur l'équation de Lamé ont ouvert la voie à bien des recherches analytiques; mais, ce qui intéressait le plus Hermite, ce sont les applications qu'on en pouvait faire à la Mécanique et à l'Astronomie. Le titre qu'il avait donné à son Mémoire est à cet égard significatif, ainsi que la sympathie avec laquelle il suivit les efforts de Gyldén pour introduire les fonctions elliptiques en Mécanique céleste.

J'ai déjà bien longuement parlé des travaux d'Hermite sur les fonctions elliptiques. Je ne puis m'arrêter sur toutes les questions qu'il a étudiées dans cette théorie. Que de Mémoires seraient encore à citer, renfermant des idées ingénieuses et originales sur lesquelles il revenait avec joie : décomposition des fonctions doublement périodiques de troisième espèce, à laquelle M. Appell devait apporter des compléments très importants, développements des fonctions elliptiques suivant les puissances croissantes de la variable, recherches des valeurs asymptotiques de quelques fonctions numériques, et tant d'autres.

Hermite, comme Kronecker, s'est toujours servi des notations de Jacobi. Il se trouvait trop vieux pour adopter les notations de Weierstrass, quand elles ont commencé à se répandre. Il en reconnaissait sans doute l'avantage au point de vue de la théorie générale, et certains invariants mis en évidence étaient faits pour lui plaire. Mais je crois que la symétrie introduite le touchait peu, la dissymétrie entre les périodes se produisant nécessairement dans les applications. Rien n'aurait pu le décider à abandonner les fonctions Θ et les admirables identités, si précieuses pour l'Arithmétique, dont la forme lui était familière depuis tant d'années.

V.

C'est en 1869 qu'Hermite fut nommé professeur à la Faculté des Sciences. Au début, il traita de la théorie des équations, mais à partir de 1875, abandonnant l'Algèbre dans ses Leçons, il se consacra au Calcul intégral et à la théorie des fonctions. Ceux qui l'ont entendu, et il y en a certainement parmi vous, garderont toujours le souvenir de cet enseignement incomparable. Quelles merveilleuses causeries, d'un ton grave que relevait par moments l'enthousiasme, où, à propos de la question la plus élémentaire, il faisait surgir tout d'un coup d'immenses horizons, et où à côté de la Science d'aujourd'hui on apercevait la Science de demain. Jamais professeur ne fut moins didactique, mais ne fut plus vivant. Je ne puis, dans mes souvenirs, le comparer qu'à Wurtz; sous des formes très différentes l'enseignement fut pour eux un apostolat, et j'ai connu des auditeurs peu familiers avec les sciences et égarés dans les amphithéâtres de l'illustre géomètre et de l'illustre chimiste, sortir stupéfaits de voir qu'une leçon d'Analyse et une leçon de Chimie pussent être si poignantes et si dramatiques. Quand Hermite parlait de la Science, il faisait songer à Pasteur, et il aurait pu faire sienne cette phrase qui revenait souvent sur les lèvres de son grand contemporain, que la Science se fait non seulement avec l'esprit, mais aussi avec le cœur. C'est ce dont témoigne l'inépuisable dévouement d'Hermite pour ses élèves; que d'heures il a passées à correspondre avec des géomètres de tous pays, connus ou inconnus, lui soumettant leurs essais et sollicitant ses avis. Vrai directeur scientifique, il répondait à tous avec une exquise bienveillance, donnant sans compter son temps et ses idées, persuadé qu'un savant ne contribue pas seulement aux progrès de la Science par ses travaux personnels, mais aussi par les conseils donnés, particulièrement à ceux qui entrent dans la vie scientifique. Une manifestation grandiose devait montrer à Hermite, au soir de sa vie, qu'il n'avait pas eu affaire à des ingrats; beaucoup d'entre nous ont sans doute assisté à cette belle et touchante cérémonie du 24 décembre 1892, où a été fêté son soixante-dixième anniversaire.

L'enseignement d'Hermite à la Sorbonne a exercé une très grande influence. Ses cours ont été lithographiés et ont été lus et médités par tous les géomètres contemporains. Il ne craignait pas de s'arrêter sur les débuts du Calcul intégral, et il donnait à réfléchir à ses lecteurs sur les sujets les plus élémentaires. Ainsi une remarque immédiate sur l'expression de $\log \frac{x-a}{x-b}$ par une intégrale définie l'amène un jour à la notion de ce qu'il appelle une *coupure*, notion qu'il développe ensuite d'une manière générale. Les théories fondamentales de Cauchy relatives aux fonctions d'une variable complexe tenaient une grande place dans son cours. Vers 1880, un Mémoire de Weierstrass récemment paru appela vivement l'attention; les leçons d'Hermite firent connaître en France les idées du grand analyste allemand. Depuis vingt ans, tous les géomètres ont étudié dans ces leçons la théorie