

チャネル型ポテンシャルをもつ2次元非線形シュレディンガー方程式の数値計算

影山, 祐介

<https://doi.org/10.15017/1441278>

出版情報：九州大学, 2013, 博士（理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：全文ファイル公表済



チャンネル型ポテンシャルをもつ2次元非線形 シュレディンガー方程式の数値計算

影山 祐介

目次

第1章 序論	1
1.1 研究の目的と背景	1
1.2 ソリトン	4
1.3 変調不安定性	8
第2章 2次元非線形シュレディンガー方程式の数値計算	10
2.1 非線形シュレディンガー方程式と数値計算法	10
2.1.1 非線形シュレディンガー方程式の導出	10
2.1.2 数値計算法	19
2.2 ソリトン	23
2.2.1 初期条件と近似計算	23
2.2.2 狭まっていくポテンシャル	26
2.2.3 分岐するポテンシャル	29
2.2.4 直角に曲がるポテンシャル	33
2.2.5 分岐・再結合するポテンシャル	37
2.3 変調不安定性とブリーザー	44
2.3.1 調和振動子型ポテンシャル	47
2.3.2 チャンネル形ポテンシャル	60
第3章 総括	63

第1章 序論

1.1 研究の目的と背景

非線形波動

波動は単に波とも呼ばれ最も簡単な運動の1つである。我々が生活する上で波は水面の波、地震の波、光の波、人の波など様々なところで見ることができる。例えば脳波の様な周期的な信号を時間経過とともに記録すると波形を得ることができる。これも波として扱うことができ、一般的に時間的、空間的な変動は波として扱うことができる。このような波は線形波動と非線形波動に分類できる。例えば音や光など物理的な現象がはっきりとしている場合、複雑な波形は分析を行うと簡単な足し算の和となっている。これを重ねあわせ現象と呼び、線形現象の一種である。非線形波動はその名の通り、線形現象の考えが通用しない波動である。真空中の光や普通の音など特殊な場合を除く全ての波は非線形波動である。非線形効果が顕著に現れる波は多く存在するものの、数学的に扱う手段がなかったために、無理やり重ねあわせの原理を適用するなどの解析が行われてきた。しかし計算機の発達に合わせ、非線形波動現象は大きな進歩を遂げている。非線形波動もおおまかに、線形の波と同様に散逸性を持つものと分散性を持つもの2つに分けられるが、多くの場合は散逸性や分散性を無視すると波の位相速度は振幅で決まることが多い。このような場合は振幅が大きいほど速度が速い。非線形波動では振幅が大きい波が振幅の小さい波の振幅の波の後方にある場合、振幅の大きい波は小さい波に追いつき波の突立が起こり波は崩壊する。数学的には散逸性や分散性のない非線形発展方程式では滑らかな解が有限時間後に不連続な解となり解が存在しなくなる。これが線形波動との大きな違いとなる。散逸性や分散性は分散

性は非線形性による突立を抑えなめらかな解を維持する役割を持つ。波の位相速度が波長によって異なる分散性の媒質を伝搬する典型的な例は孤立波である。この孤立波が粒子のように振る舞うときにその波をソリトンと呼び、分散効果と非線形性により形を保ったまま伝搬する。

非線形シュレディンガー方程式

光ファイバ内やボースアインシュタイン凝縮 (BEC) 中のソリトンの運動は非線形シュレディンガー方程式で記述できることが知られている。ソリトンは非線形シュレディンガー方程式の解の1つでソリトンの他に'Akhmediev breathers'[1], 'Peregrine solution'[2], 'Kuznetsov-Ma soliton' などがある。それぞれは図 1.1 のような関係性がある。

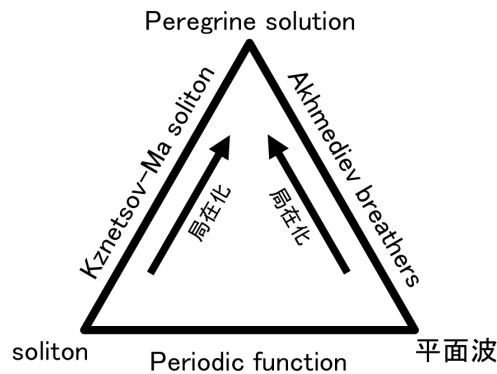


図 1.1: 非線形シュレディンガー方程式の解とそれぞれの関連性

例えば平面波は空間的にも時間的にも周期的に存在し、'Akhmediev breathers' 図 1.2(a) は空間的には周期的で空間的には時間的で 'Peregrine solution' 図 1.2(b) は空間的にも時間的にも局所的である。平面波を時間的に局在化したものが 'Akhmediev breathers' 図 1.2(a) でさらに空間的にも局在化したものが 'Peregrine solution' 図 1.2(b) と考えることができる。[3] ソリトン図 1.2(d) は空間的には局所的で時間的には安定して存在している。'Kuznetsov-Ma soliton' は空間的には局所的で時間的には周期的になってる。ソリトンが時間的に局在化したものが 'Kuznetsov-Ma soliton'。

で更に局在化ものが 'Peregrine solution' と考える事できる。このような非線形シュレディンガー方程式の解は関連性ととも非常に面白い特徴がある。

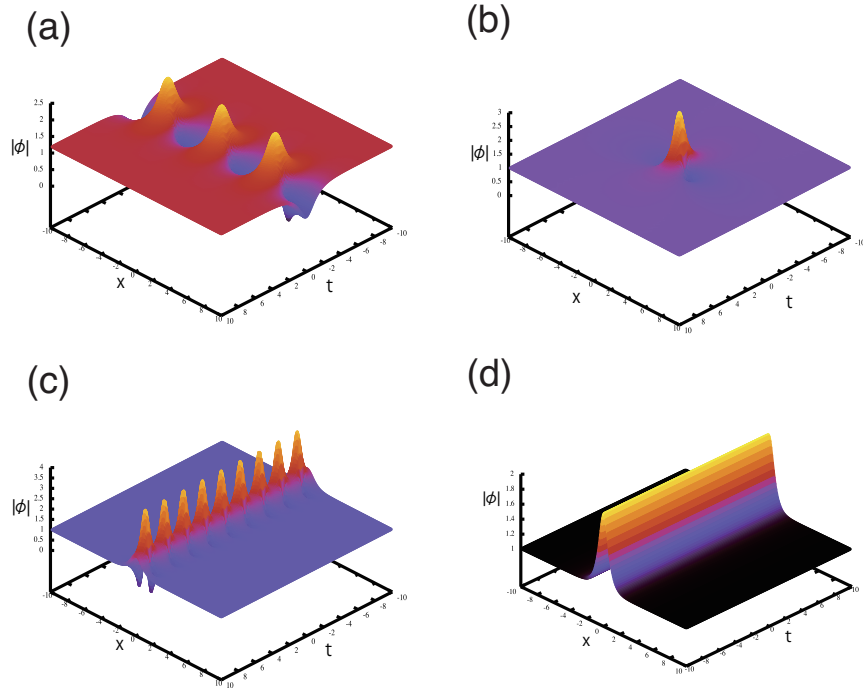


図 1.2: 非線形シュレディンガー方程式のそれぞれの解の 3 次元プロット
 (a)Akhmediev breathers,(b)Peregrine solution,(c)Kuznetsov-Ma soliton,(d)soliton

また近年注目を集めているローグ波のモデルとして非線形シュレディンガーの breather 解や Peregrine solution が注目を集めている。rogue wave は突然発生する巨大波で初め海洋の波で研究が始まった。この突然発生する巨大波により海洋の船舶や構造物への被害に合わせ報告されている。rogue wave の生成機構についてさまざまなアイデアが提案されているがその中に ” 水面波自身の非線形効果 (変調不安定性) による波の自己収束 ” がある。'breather' 解や 'Peregrine solution' は突然大きくなる特異性質を持ち rogue wave のモデルと考えられている。また近年光ファイバ内で 'Peregrine solution' が観測され、関心が高まっている。

目的

本研究ではソリトンの運動と変調不安定性について調べる。

- ・ソリトンの運動

光ファイバのネットワークでは分岐や再結合などの要素回路は重要であるものの、あまり数理的な研究は行われていない。本研究では様々な形のチャネル型ポテンシャルを設定し、その中でのソリトンの振る舞いについて調べる。

- ・変調不安定性

2次元或は3次元調和ポテンシャル中のGP方程式はBECに関係し多く存在するものの1次元的なポテンシャルの研究はあまり行われていない。本研究では1次元的なポテンシャル（調和振動子型ポテンシャル、チャネル型ポテンシャル）での変調不安定性について調べる。

1.2 ソリトン

ソリトンは自己強化孤立波（波束、パルス）で波形や速度を保ちながら進む、ソリトンは非線形性と分散効果の打ち消しにより引き起こされる。（分散効果は系の固有の性質で速度は周波数に依存する）ソリトンは一般に弱い非線形分散の偏微分方程式に分類される物理系で引き起こされる。

初めてソリトン現象を発見したのはスコット・ラッセル（1808-1882）で、運河の水面上にできた隆起がこわれることなく伝搬していることを観察し、彼は水槽の移動波でこの現象を再現した。[4] ソリトンが現れる系をソリトン系といい、ソリトン系に従う発展方程式をソリトン方程式という。ソリトン方程式はソリトン解をもつ。ソリトン方程式の代表的なものにKdV方程式、KP（Kadomtsev-Petviashvili）方程式、サインゴルドン（Sine-Gordon）方程式、非線形Schrödinger方程式、戸田格子方程式、箱玉系のセルオートマトンなどがある。ソリトン方程式が新たに発見されるたびに、発見者の名前が付けられていったが、1981年の佐藤理論の完成により、ソリトン方程式は無限に存在することが示されたためそのようなことはなくなった。またソリトン方程式を解く手法には逆散乱法、広田の方法などがある。

る。

今節では非線形シュレディンガー方程式で記述できる光ファイバ内などの光ソリトンと BEC 中の物質波ソリトンについて簡単に紹介する。

光ソリトン

光ソリトンとは媒質を伝播中に線形効果と非線形効果の釣り合いにより形状が変わらない光学場を指す。光ソリトンはおおまかに時間ソリトンと空間ソリトンの2つに分類できる。ここで、簡単に紹介する。

時間ソリトン

時間ソリトンは電磁場が空間的に制限を受けている場合に現われ、非線形効果と分散のバランスによりパルスの形状は時間変化しない。光学では多くの場合これを”ソリトン”と呼ぶ。時間ソリトンは光通信への応用として研究がすすめられてきた。

・1973年にベル研究所に所属する長谷川晃と F. D. タップパートが最初に異常分散性と自己位相変調の釣り合いにより光ファイバ内でソリトンが存在することを指摘した。同1973年 Robin Bullough は光ソリトンの存在について数学的な報告を行った。また彼は光通信の性能を向上させるソリトンをベースとした通信方式について提案した。[5]

光ファイバ系におけるソリトンは Manakov 方程式により記述される。[6]

・1987年 P. ブリュッセル大学, リモージュ大学の Emplit, J.P. Hamaide, F. Reynaud, C. Froehly and A. Barthelemyha 光ファイバにおいて、ダークソリトンの伝播の最初の実験的観察を行った。[7]

・1988年 Linn Mollenauer と彼のチームはラマン効果を使った通信方式により 4000km を超えるパルスの伝送に成功した。

・1991年、ベル研究所の研究チームは、エルビウム光ファイバ増幅器を使用して、

14000 キロ以上にわたって 2.5 ギガビットでソリトンのエラーのない送信に成功した。光信号は励起光とファイバーに入り、添加されたイオンとのエルビウムイオンとの相互作用によって増幅される。[8]

・1998 年には、ティエリージョルジュとフランステレコム R&D センターでの彼のチームはティエリージョルジュと異なる波長（波長分割多重）の光ソリトンを組み合わせたは、毎秒 1 テラビット（毎秒情報の 1,000,000,000,000 単位）のデータ伝送を実証した。[9]

近年の光ソリトンの研究としてベクトルソリトン（2つの偏光面有するソリトン）の研究も進められている。[10,11]

空間ソリトン

空間ソリトンは 2 次元導波路中の導波光のように 1 次元方向に光が閉じ込められている時に回折効果と非線形効果が釣り合う事により生じる。電磁場は伝播中の媒質の屈折率により変化し、グレーデッドインデックスファイバ（屈折率分布が緩やかに変化したファイバ）と同じ形状ができる。場がこのようなガイド伝搬モードの場合にソリトンは閉じ込められ形状を変えず伝搬する。

空間ソリトンは Ashkin と Bjorkholm によって 1974 年に蒸気ナトリウムで充填されたセル内にて初めて実験的に観測された。[12] 約 10 年後の 1985 年にリモージュ大学での二硫酸炭酸内での実験による観測でこの場について再検討されることになった。[13] この 2 つの実験のあと空間ソリトンはガラス中、半導体、ポリマーなどで観測された。[13] この 10 年間ではネマティック液晶内でのソリトン（ネマティコンと呼ばれる）が報告されている。[14] 光学インターコネクトや、光ピンセット、光学的外科術式などへの応用が期待されている。

ダークソリトン

ダークソリトンは 1973 年に正常分散ファイバでの非線形シュレディンガー方程式の解として予言されていた。[5] このソリトンは均一な背景からへこみを持つこ

とからダークソリトン（暗いソリトン）と呼ばれる。また通常考えるソリトン（明るいソリトン）と呼ぶこともある。ダークソリトンの生成のためには、時間ソリトンでは非線形部が負又は正常分散であることが必要で、空間ソリトンでは自己位相変調が自己収束を引き起こす必要がある。ダークソリトンは形状を変化させず伝播するという意味ではソリトンであるが通常のパルスとは違い連続時間ビームのエネルギーの欠損部分の伝播を表す。通常のソリトンよりも扱いが難しいものの安定で損失が少ない特徴がある。

ボース＝アインシュタイン凝縮体中のソリトン

ボース＝アインシュタイン凝縮体（BEC）は、多数のボース粒子が1つの量子状態を占めることで現れる。偶数個のフェルミ粒子から構成される原子は、ボース粒子とみなすことができる。中性原子気体（理想ボース気体）をレーザー冷却により μK 以下の極低温状態にするとボース＝アインシュタイン凝縮し、ボース原子はコヒーレント状態になる。1995年、コロラド大学の Eric A. Cornell, Carl E. Wieman らはルビジウム原子（ ^{87}Rb ）を冷却することにより初めてボース＝アインシュタイン凝縮を実現した。この成果 [18,19] により Cornell、Wieman、Ketterle の3名は2001年ノーベル物理学賞を受賞した。この発見により物質波ソリトンが現実的に観測できるようになり、物質波ソリトンの伝搬が研究されている。その結果 BEC 中のソリトンの振る舞いは Gross-Pitaevskii（GP）方程式に従うことがわかってきた。この方程式は外部ポテンシャルを含む非線形シュレディンガー方程式と同じである。

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(r)\psi + U_0 |\psi|^2 \psi \quad (1.1)$$

ψ は巨視的な（肉眼で観測できる）波動関数、 $V(r)$ は放物線状の閉じ込めポテンシャル、 $U_0 = +4\pi\hbar^2(a/m)$ は2粒子間相互作用によって特徴づけられるパラメータで散乱長 a に比例する。粒子間相互作用は $a > 0$ で斥力、 $a < 0$ で引力として働

く。散乱長 a は外部磁場を変化させることにより連続的に変えることができる。物質波ソリトンのダイナミクスは GP 方程式で表されシミュレーションの結果とよく合致することがわかってきている。

1.3 変調不安定性

変調不安定性とは非線形現象により定常状態から変調を引き起こす現象を表す。光ファイバでの変調不安定性は異常分散ファイバであることが必要とされる。光ファイバ内での変調不安定性は連続、準連続輻射を超短パルス列に分裂させる。

・連続ビームの安定性

光ファイバ中の連続ビームの伝搬について考える。まずファイバ損失を無視した非線形シュレディンガー方程式は

$$i\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2}\beta_2\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \gamma|A|^2A \quad (1.2)$$

$A(z, T)$ はパルスの包絡線の振幅、 β_2 は群速度分散のパラメータ、 γ は自己位相変調を引き起こす非線形パラメータである。連続輻射の場合はファイバの入射側の端 $z = 0$ で振幅 A は T に依存しない。またファイバ内を伝搬する間 $A(z, T)$ は時間に依存しないと仮定すると定常状態の解は

$$A = \sqrt{P_0} \exp(i\phi_{NL}) \quad (1.3)$$

となる。ここで P_0 は $z = 0$ での入射パルスのパワーで ϕ_{NL} は

$$\phi_{NL} = \gamma P_0 z \quad (1.4)$$

で与えられる位相シフトであり、cw 光は強度に依存した位相シフトを生じる以外は変化なくファイバ内を伝播する。

ここで定常解 (1.3) が小さな摂動に対し安定かどうか調べるため、定常状態に小さい摂動を与え、

$$A = (\sqrt{P_0} + a) \exp(i\phi_{NL}) \quad (1.5)$$

の発展を調べる。これを代入し a について線形化し

$$i \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 a}{\partial T^2} - \gamma P_0 (a + a^*) \quad (1.6)$$

を得る。摂動の波数と周波数をそれぞれ K , Ω として、

$$a(z, T) = a_1 \exp(iKz + i\Omega T) + a_2 \exp(-iKz - i\Omega T) \quad (1.7)$$

と一般解を仮定すると、(1.6) 式は a_1 と a_2 に対する1組の同次方程式となる。この方程式より、 K と Ω の分散関係は

$$K = \pm \frac{1}{2} (\beta_2 \Omega^4 + 2\gamma P_0 \beta_2 \Omega^2)^{1/2} \quad (1.8)$$

となる。これより定常状態の安定性はファイバの媒質が正常分散か異常分散のどちらの領域を通るかということに依存する。正常分散の場合 ($\beta_2 > 0$)、波数 K はすべての Ω について実数となり、定常状態は小さな摂動に対して安定である。これとは対照的に異常分散の場合 ($\beta_2 < 0$)、 K は $\Omega < \Omega_c$ に対して虚数となり、摂動 $a(z, T)$ は z とともに指数的に増大する。その結果 $\beta_2 < 0$ であれば cw 解 (1.3) は不安定であることになる。この不安定は、定常状態から自発的な変調を生じるので変調不安定性と呼ばれている。同様の不安定は他の多くの非線形系で起こり、自己パルス化不安定性とも呼ばれる。

第2章 2次元非線形シュレディンガー 方程式の数値計算

2.1 非線形シュレディンガー方程式と数値計算法

2.1.1 非線形シュレディンガー方程式の導出

非線形媒質中を伝搬するビームの自己収束は非線形シュレディンガー方程式によって記述できる。この方程式は、マクスウェル方程式を近似することにより得られる。今節ではこの近似について説明する。

マクスウェル方程式は

$$\text{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\text{rot} H = j - \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\text{div} D = \rho \quad (2.3)$$

$$\text{div} B = 0 \quad (2.4)$$

E :電場ベクトル, H :磁場ベクトル, D :電束密度, B は磁束密度で, j :電流密度ベクトル, ρ :電磁場の湧き出しである。ただし、光ファイバー内のように自由電子のない媒質中では $j = 0, \rho = 0$ である。

分極を考慮した、電束密度 D と電場 E 、電束密度 E と電場 H はそれぞれ

$$D = \epsilon_0 E + P \quad (2.5)$$

$$B = \mu_0 H + M \quad (2.6)$$

となる。 ϵ_0 は真空の誘電率、 μ_0 は真空の誘磁率である。また P は誘電電気分極、 M は誘電磁気分極である。ただし光ファイバは非磁性体なので $M = 0$ である。

(2.1) , (2.2) , (2.5) , (2.6) より B, D を消去すると、

$$\nabla \times \nabla \times E = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

を得る。ここで c は真空中の光速で $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ を使った。光ファイバ内のレーザーのような電界強度が高い場合は誘導電気分極 P と電場 E は

$$P = \epsilon_0 \{X^1 \cdot E + X^2 \cdot EE + X^3 \cdot E^3 + \dots\} \quad (2.8)$$

と比例項以外に2次、3次の項が無視できなくなる。2次の感受率 X^2 は高周波発生や和周波発生などを引き起こすが、光ファイバの分子構造は対称なので通常は現れない。3次の感受率 X^3 は第三高周波発生、4光波混合、非線形屈折を引き起こす。後述するが、一般には第三高周波発生及び4波混合は起こらない。つまり光ファイバの非線形効果は非線形屈折が大部分を占める。よって3次の非線形効果まで考えると誘電分極は

$$P(r, t) = P_L(r, t) + P_{NL}(r, t) \quad (2.9)$$

と表すことができる。 P_L :線形部分、 P_{NL} :非線形部分とする。

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 P_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

となる。光の電界 E は中心周波数 ω_0 に対して光の周期に対しゆるやかに変化する包絡線を持っているとする。また光が x 方向に直線偏光していると仮定し、電場の急変成分を分離すると

$$E = \frac{1}{2}u_x[E(r,t)\exp(i\omega_0 t) + c.c.] \quad (2.11)$$

となる。ここでの u_x は偏光面を示す単位ベクトルで $c.c$ は複素共役を表す。同様に分極性分 P_L 、 P_{NL} も同様に

$$P_L(r,t) = \frac{1}{2}u_x[P_L(r,t)\exp(i\omega_0 t) + c.c.] \quad (2.12)$$

$$P_{NL} = \frac{1}{2}u_x[P_{NL}(r,t)\exp(i\omega_0 t) + c.c.] \quad (2.13)$$

ここでラマン効果（分子振動への寄与）を無視し、非線形応答が瞬間的であると仮定する。一般には電子も原子核も光の場に対し非線形に応答するが、原子核の応答は電子に比べ遅い。光ファイバーでは振動応答、ラマン応答は $60 \sim 70 fs$ の時間領域で起こる。そのためパルス幅が $> 0.1 ps$ ではこの仮定は正当化できる。よって (2.10)、(2.11) は、

$$P_L(r,t) = \epsilon_0 X^{(1)} E(r,t) \quad (2.14)$$

$$P_{NL} = \epsilon_0 X^{(3)} E(r,t)E(r,t)E(r,t) \quad (2.15)$$

となる。

ここで、角周波数が ω_1 、 ω_2 、 ω_3 、 ω_4 でいずれも x 軸に平行に偏光し z 方向に伝播している4つの光波を考える。この4波の合成電界は、

$$E = u_x \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 E_i \exp[i(k_i z - \omega_i t)] + c.c. \quad (2.16)$$

また、非線形分極 P_{NL} は

$$P_{NL} = u_x \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 P_i^{(3)} \exp[i(k_i z - \omega_i t)] + c.c \quad (2.17)$$

と書くと、 $P_{NL}^{(3)}$ は

$$P_{NL}^{(3)} = \epsilon_0 X^3 \cdot E^3 \quad (2.18)$$

で与えられる。これを (2.16) を代入し、例えば P_3^4 を計算すると、

$$P_3^{(4)} = \frac{3\epsilon_0}{4} X_{xxxx}^3 \{ [|E_4|^2 + 2(|E_4|^2 + |E_2|^2 + |E_3|^2)] E_4 + 2E_1 E_2 E_3 \exp(i\theta_+) + 2E_1 E_2 E_3^* \exp(i\theta_-) + \dots \} \quad (2.19)$$

を得る。ここでの θ_+, θ_- は

$$\theta_+ = (k_1 + k_2 + k_3 - k_4)z - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)t \quad (2.20)$$

$$\theta_- = (k_1 + k_2 - k_3 - k_4)z - (\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)t \quad (2.21)$$

で $\exp[i(\omega_4 t - k_4 z)]$ が括りだされていてそれを相殺するためには ω_4, k_4 が加えられている。3次非線形分極 X_{xxxx} の添字の最初の x は発生した ω_4 の分極 P_{NL} (この分極 ω_4 の光波を発生) が x 成分であることを表し、次の3つの x は考えている他の3波 ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$) の偏光がいずれも x 方向であることを意味する。例えば x 軸方向の偏波を $(E_1)_x$ と表した時に $(E_1)_x, (E_1)_y, (E_1)_z$ によって発生する x 成分の分極 $(P_{NL})_x$ は X_{xxyz} を用いると

$$(P_{NL})_x = X_{xxyz} (E_1)_x (E_1)_y (E_1)_z \quad (2.22)$$

で与えらる。よって $P_3^{(4)}$ に $\exp[i(\omega_4 t - k_4 z)]$ を掛けたものが $P_{NL}^{(3)}$ になる。が直流分であれば P_{NL} は角周波数 ω_4 をもった分極となる。このように4光波混合が起こるためには θ_+, θ_- などの位相のほとんど0にする必要がある。したがって

各周波数の項と伝播係数の項のそれぞれが0にならなければならない。伝播係数の項が0になることを位相整合という。各周波数が0になることより

$$\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \quad (2.23)$$

が要請され、 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ であれば第三高周波発生となる。この場合の位相整合条件

$$k_4 = k_1 + k_2 + k_3 \quad (2.24)$$

となることは光ファイバでは難しく、第三高周波発生は光ファイバでは発生しない。

一方

$$\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 \quad (2.25)$$

では、位相整合条件は

$$k_4 = k_1 + k_2 - k_3 \quad (2.26)$$

となり $\omega_1 \sim \omega_3$ が接近している場合、(2.25) によって発生した ω_4 も $\omega_1 \sim \omega_3$ も近傍にあるため比較的容易に実現できる。このように、 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 の3つの波が3次の非線形分極により第4の波が発生する現象を第4光波混合と呼ぶ。ただし一般には発生しない。

(2.13),(2.17)-(2.19) より、

$$P_{NL} = \epsilon_0 \epsilon_{NL} E(r, t) \quad (2.27)$$

$$\epsilon_{NL} = \frac{3}{4} X_{xxx}^{(3)} |E(r, t)|^2 \quad (2.28)$$

である。(2.11)-(2.13) を (2.10) に代入すると

$$\nabla^2 E(r, t) + \frac{\omega_0^2}{c^2} (1 + X_{xx}^{(1)} + \epsilon_{NL}) E(r, t) = 0 \quad (2.29)$$

を得る。ファイバ内の電界の伝播定数は周波数特性のため、 $\tilde{E}(r, \omega)$ は $E(r, t)$ のフーリエ変換

$$\tilde{E}(r, \omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} E(r, t) \exp\{i(\omega - \omega_0)t\} dt \quad (2.30)$$

とし、(2.29) は、

$$\nabla^2 \tilde{E}(r, \omega - \omega_0) + \epsilon(\omega) k_0 \tilde{E}(r, \omega - \omega_0) = 0 \quad (2.31)$$

となる。ただし

$$k_0 = \omega_0 / c \quad (2.32)$$

$$\epsilon(\omega) = 1 + X_{xx}^{(1)} + \epsilon_{NL} \quad (2.33)$$

である。誘電率を屈折率で書くと、

$$\epsilon(\omega) = (n - \nabla n)^2 \simeq n^2 + 2n \cdot \nabla n \quad (2.34)$$

となる。 ∇n は吸収に伴う屈折率の虚数部を含めて、

$$\nabla n = n^2 |E|^2 - i \left(\frac{\alpha}{2k_0} \right) \quad (2.35)$$

とする。(2.31) の解を

$$\tilde{E}(r, \omega - \omega_0) = R(r, \theta) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \exp(-i\beta_0 z) \quad (2.36)$$

と仮定する。 $R(r, \theta)$ は光ファイバの横モード分布、 $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$ は z について振幅変化を表す。(2.36) を (2.31) に代入し整理すると

$$\left[\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2} + (n^2 k_0^2 - \beta_0^2) R \right] \tilde{A} + (-2i\beta_0 \frac{\partial A}{\partial z} - i\alpha n k_0 \tilde{A} + 2nn_2 |E|^2 k_0^2 \tilde{A}) R = 0 \quad (2.37)$$

を得る。 $\tilde{A}$ の z 方向に対する変化は緩やかであるとして、 $\partial^2 A / \partial z^2 \ll \beta_0^2 \tilde{A}$ なので $\partial^2 \tilde{A} / \partial z^2$ は省いた。(2.36) の左辺の第1項は ∇n を考慮しない無摂動の波動方程式の形でその固有値を β とし屈折率 n の時の伝播係数を表す。その方程式は、

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2} + (n^2 k_0^2 - \beta_0^2) R = 0 \quad (2.38)$$

と置くことができるので、これを (2.37) に代入し、

$$(\beta^2 - \beta_0^2) R \tilde{A} - [-2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} - i\alpha n k_0 \tilde{A} + 2nn_2 |\tilde{E} k_0^2 \tilde{A}|] R = 0 \quad (2.39)$$

となる。 $\beta^2 - \beta_0^2 \simeq 2\beta_0(\beta - \beta_0)$ 、 $\beta_0 \simeq nk_0$ なので、(2.39) から $2\beta_0 \simeq 2nk_0$ で消去すると、

$$(\beta - \beta_0) R \tilde{A} + [-i \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + i \frac{\alpha}{2} \tilde{A} n_2 |E|^2 k_0 \tilde{a}] R = 0 \quad (2.40)$$

となる。ここで $\beta(\omega)$ をテーラー展開すると、

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_0) \frac{d\beta}{d\omega} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \frac{d^2\beta}{d\omega^2} + \dots \quad (2.41)$$

となる。包絡線の群速度は

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{d\beta/d\omega} \quad (2.42)$$

となり、分散の関係 $D = d\tau/d\lambda$ と $\lambda = 2\pi c/\omega$ より

$$\frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \quad (2.43)$$

より、分散は

$$D = \frac{d\tau}{d\omega} \frac{d\omega}{d\lambda} = (-2\pi c/\lambda^2) \frac{1}{d^2\beta/d\omega^2} \quad (2.44)$$

となる。(2.41) の第三項までを (2.40) を代入すると、

$$(\omega - \omega_0)\beta_1 \tilde{A}R + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta_2 \tilde{A}R + (-i\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} - i\frac{\alpha}{2}\tilde{A} + n_2|E|^2k_0\tilde{A}) = 0 \quad (2.45)$$

を得る。ここで β の周波数依存性を組み込むことができたので微分フーリエ変換 $\frac{d^n t}{dt^n} \leftrightarrow (i\omega)^n F(\omega)$ を用いて (2.45) を時間領域の方程式に戻すと、

$$-i\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} R - \frac{1}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + (-i\frac{\partial A}{\partial z} - i\frac{\alpha}{2}A + n_2|E|^2k_0A)R = 0 \quad (2.46)$$

となる。 $E(r, t) = R(r, \sigma)A(z, t) \exp(-i\beta_0 z)$ を (2.46) に代入すると

$$-i\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} R - \frac{1}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} R + (-i\frac{\partial A}{\partial z} - i\frac{\alpha}{2}A + n_2|R|^2|A|^2k_0A)R = 0 \quad (2.47)$$

となる。これに R^* を掛け、ファイバ断面の積分 $\int_0^{2\pi} \int_0^\infty |R|^2 r dr d\theta$ で割算すると

$$-i\beta_1 \frac{\alpha A}{\alpha t} - \frac{1}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - i\frac{\partial A}{\partial z} - j\frac{\alpha}{2}A + \eta k_0 n_2 |A|^2 A = 0 \quad (2.48)$$

となる。ただし、

$$\eta = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\infty |R|^4 r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^\infty |R|^2 r dr d\theta} \quad (2.49)$$

であり、おおよそ 1/2 である。光パルスが非線形媒質中の伝播を考えると、パルスの電界強度よりパルスのピークパワー P を与え、波形の振る舞いについて考える。ピークパワーは

$$P_c = n_0 \epsilon_0 c A^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty |R|^2 r dr d\theta \quad (2.50)$$

なので、

$$A^2 = \frac{P_c}{n_0 \epsilon_0 c \int_0^{2\pi} \int_0^\infty |R|^2 r dr d\theta} \quad (2.51)$$

となる。これを (2.47) に代入し R^* をかけファイバ断面で積分し割算すると、

$$-i\beta \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{1}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + (-i \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\alpha}{2} A + k_2 P_c A) = 0 \quad (2.52)$$

となる。ただし

$$k_2 = \frac{n_2 k_0}{n_0 \epsilon_0 c A_{eff}} = \frac{n'_2 k_0}{A_{eff}} \quad (2.53)$$

$$A_{eff} = [\int_0^{2\pi} \int_0^\infty |R|^2 r dr d\theta]^2 / \int_0^{2\pi} \int_0^\infty |R|^4 r dr d\theta \quad (2.54)$$

である。ただし、 $n'_2 = n_2 / n_0 \epsilon c$ で A_{eff} は非線形現象が起こる実効コア断面積で、およそ $45 \mu m^2$ である。また、石英ファイバでは $n_2 = 1.22 \times 10^{-22} m^2 / V^2$ 、 $n'_2 = 3.18 \times 10^{-20} m^2 / W$ である。ピークパワー P_c として、 $A(z, t)$ を

$$A(z, t) = \sqrt{P_c} \phi(z, t) \quad (2.55)$$

と表すと、(2.52) は

$$-i\beta \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - i \frac{\partial \phi}{\partial z} - i \frac{\alpha}{2} \phi + k_2 P_c \phi = 0 \quad (2.56)$$

が導かれ、これが減衰を含む非線形シュレディンガー方程式である。ただし ϕ の振幅は 1 に規格化している。

2.1.2 数値計算法

非線形シュレディンガー方程式は非線形偏微分方程式であり、一般的に逆散乱法が適用できるいくつかの特別な場合を除き、解析的な解を求めることができない。よって光ファイバにおける非線形効果を理解するためには、数値解を求める手法を用いる必要がある。数値計算法は大きく分けて有限差分法とスペクトル法の2つに分類できる。同じ精度を出すためにはスペクトル法の方が一桁速い。ここでは、非線形分散媒質中のパルスの伝搬の問題を解くためによく用いられてる手法であるスプリットステップフーリエ法を紹介する。このスプリットステップフーリエ法は高速フーリエ変換を使用しているために高速に計算することができる。

スプリットステップフーリエ法

非線形シュレディンガー方程式を線形媒質の分散と吸収を表す線形演算子: $\hat{D}$ とパルス伝搬に対するファイバの非線形性を表す非線形演算子: $\hat{N}$ に分離して書くと、

$$\frac{\partial A}{\partial z} = (\hat{D} + \hat{N})A \quad (2.57)$$

となる。これらの演算子はそれぞれ

$$\hat{D} = i\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{1}{6}\beta_3\frac{\partial^3}{\partial T^3} - \frac{\alpha}{2} \quad (2.58)$$

$$\hat{N} = i\gamma(|A|^2 + \frac{2i}{\omega_0 A}\frac{\partial}{\partial T}(|A|^2 A) - T_R\frac{\partial|A|^2}{\partial T}) \quad (2.59)$$

ここで線形演算子 D はファイバ分散、分散ブローブ、減衰を考慮し、非線形演算子 N はカー効果、ラマン効果を考慮していて、通常光通信に使われる数 ps 程度のパルス幅の領域ではこれらの項を考慮すればよい。また一般に分散と非線形性はファイバー方向に沿って一緒に現れる。

スプリットステップフーリエ法では、分散効果と非線形効果が独立に作用すると仮定し、線形演算子 D と非線形演算子 N を交互に作用させて計算を行う。線形演

算子 D は周波数領域において作用させて、非線形演算子 N は時間領域で作用させる。時間波形とスペクトル分布の間の変換に高速フーリエ変換を用いる。まず非線形性だけが存在しているとし (2.57) で $\hat{D} = 0$ とおく。次のステップでは (2.57) で $\hat{N} = 0$ とおく。式で書くと、

$$A(z+h, T) \simeq \exp(h\hat{D}) \exp(h\hat{N}) A(z, T) \quad (2.60)$$

と表せる。

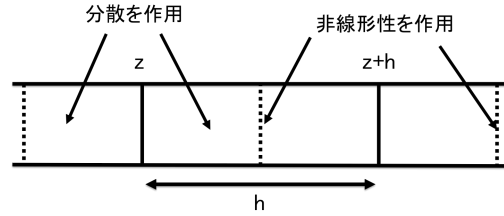


図 2.1: スプリットステップフーリエ法の模式図

指数演算子 $\exp(h\hat{D})$ の演算はフーリエ空間で行う。

$$\exp(h\hat{D})B(z, T) = \{F^{-1} \exp[h\hat{D}(i\omega)]F\}B(z, T) \quad (2.61)$$

ここで、 F はフーリエ変換を表す演算子で、 $\hat{D}(i\omega)$ は (2.58) で微分方程式 $\partial/\partial T$ を $i\omega$ で置き換えたものである。 ω はフーリエ空間の周波数を表す。フーリエ空間では $\hat{D}(i\omega)$ は単なる数となるので、(2.61) を直接計算できる。

スプリットステップフーリエ法の精度は次の様にして推定できる。まず $\hat{N}$ が z に依存しないと仮定すると、(2.57) の厳密解が

$$A(z+h, T) = \exp[h(\hat{D} + \hat{N})]A(z, T) \quad (2.62)$$

で与えられることに注目する。ここで交換しない2つの演算子 $\hat{a}$ と $\hat{b}$ に対する Baker-Hausdorff 方式

$$\exp(\hat{a})\exp(\hat{b}) = \exp(\hat{a} + \hat{b} + \frac{1}{2}[\hat{a}, \hat{b}] + \frac{1}{12}[\hat{a} - \hat{b}, [\hat{a}, \hat{b}]] + \dots) \quad (2.63)$$

ただし、 $[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}$ に注意する。(2.60) を (2.62) と比較するとわかるように、スプリットステップフーリエ法では演算子 $\hat{D}$ と $\hat{N}$ の非可換性を無視している。 $\hat{a} = h\hat{D}$ 、 $\hat{b} = h\hat{N}$ として (2.63) を用いると、主要な誤差は1つの交換関係 $(1/2)h^2[\hat{D}, \hat{N}]$ によるものであることがわかる。したがってスプリットステップフーリエ法はステップ幅 h の2次の精度を持つことが分かる。

光パルスを z から $z+h$ までの区間を伝搬させる方法を変更すれば、スプリットステップフーリエ法の精度をさらに上げることができる。この方法では (2.60) の代わりに

$$A(z+h, T) \simeq \exp(\frac{h}{2}\hat{D}) \exp(\int_z^{z+h} \hat{N}(z')dz') \exp(\frac{h}{2}\hat{D}) A(z, T) \quad (2.64)$$

と3ステップで考える。主な違いは、非線形性の効果が区間の境界ではなく中間部分に取り入れられている。(2.64) の指数演算子が対称的であることから、対称化されたスプリットステップフーリエ法とも呼ばれている。真ん中の指数演算子は非線形演算子の z 依存性を取り入れられているときに役立つ。この項は、ステップ幅 h が十分小さいときは $\exp(h\hat{N})$ で近似でき、(2.60) と同等のものとなる。(2.64) で表せる対象化された方法を用いられる最も重要な点は、誤差の主要部分が (2.63) の2重の交換関係で与えられ、誤差がステップ幅 h の3次となることである。

(2.63) の積分を $h\hat{N}(z)$ と近似するよりさらに正確に計算をすればスプリットステップフーリエ法の精度を高めることができる。最も簡単な方法の1つは積分の台形公式

$$\int_z^{z+h} \hat{N}(z')dz' \simeq \frac{h}{2}[\hat{N}(z) + \hat{N}(z+h)] \quad (2.65)$$

で近似することである。しかし、中間点 $z+h/2$ では $\hat{N}(z+h)$ がまだ求まっていないので、(2.65) をそのまま用いるのは簡単ではない。また積分の計算には $\hat{N}(z+h)$

の初期値を $\hat{N}$ として反復法を用いる必要がある。(2.64) を用いて $A(z+h, T)$ を求め、さらにそれを用いて $\hat{N}(z+h)$ の新しい値を計算する。反復計算をやるのは時間がかかるが、このアルゴリズムに基づく計算法の精度が高いためステップ幅 h を大きくすることができ、最終的な計算時間を短くすることができる。実際の計算では一般には2回の反復で十分である。

スプリットステップフーリエ法において望む精度を得るためには、 z と T のステップ幅に注意する必要がある。またファイバー方向に積分するときに、パルスエネルギー（吸収していないとして）などの保存量を計算して精度が落ちていないか確認する必要がある。時間刻みはパルスエネルギーがその刻みから外に出ないように大きく取る必要がある。（典型的な時間刻みはパルス幅の10-20倍と取る。）ある種の問題ではパルスエネルギーの一部が急速に広がり、時間刻みの境界にあたってしまうこと避けられないことがある。時間刻みの一つの端に到達したエネルギーは、自動的に時間刻みの反対側から再びはいつてくるため（FFT アルゴリズムでは周期境界条件を用いる）、数値計算の不安定化が生じる。これを避けるため、パルスエネルギーは保存しなくなるが、刻みの端で人為的に輻射を吸収させる ”吸収刻み” がよく用いられる。

2.2 ソリトン

2.2.1 初期条件と近似計算

通常のシュレディンガー方程式のソリトンは1次元で研究されていることが多い。本研究では2次元性を考慮したチャネル型ポテンシャルの形を様々な形に変化させ1次元では得られないソリトンの運動について調べる。ソリトンのモデル式である2次元非線形シュレディンガー方程式は

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nabla^2\phi - |\phi|^2\phi + U(x,y)\phi \quad (2.66)$$

であり、 $U(x,y)$ はチャネル型ポテンシャルを表す。ポテンシャルがまっすぐ進む場合は $U(x,y) = -U_0(-x_0 \leq x \leq x_0)$ でその他の領域は $U(x,y) = 0$ である。ポテンシャルの幅は $2x_0$ 、深さは U_0 とする。(2.66) の定常解はフィードバック項を含むギンツブルグ・ランダウ方程式

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{2}\nabla^2\phi - |\phi|^2\phi + U(x,y)\phi + \mu\phi \quad (2.67)$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \alpha(N_0 - N) \quad (2.68)$$

で得られる。 μ は化学ポテンシャルに相当する。 $N = \int \int |\phi|^2 dx dy$ はノルムで N_0 はノルムの目標値である。長時間、時間発展させるとノルムは目標値に近づいていく。ギンツブルグーランダウ方程式はエネルギー散逸方程式なので何らかの定常解に自動的に漸近する。ノルムを一定にする項がなければ通常、一様解に漸近するが、ノルムを一定にする項があるためにソリトン解のような局在解が自動的に得られる。[20] ギンツブルグーランダウ方程式は非線形シュレディンガー方程式の左辺に虚数単位 i を書けると得られる式なので、時間微分項を0とおいたギンツブルグーランダウ方程式はそのまま非線形シュレディンガー方程式の解となる。図2.2(a) は、 $N_0 = 5, U_0 = 5, x_0 = 3$ における ϕ の3次元プロットでソリトンが中央に局在していることが分かる。図2.2(b) は $x = x_p = 0$ での $|\phi(x_p, y)|$ 、図2.2(c)

は $y = y_p$ における $|\phi(x, y_p)|$ のプロファイルで (x_p, y_p) はソリトンのピークの座標である。

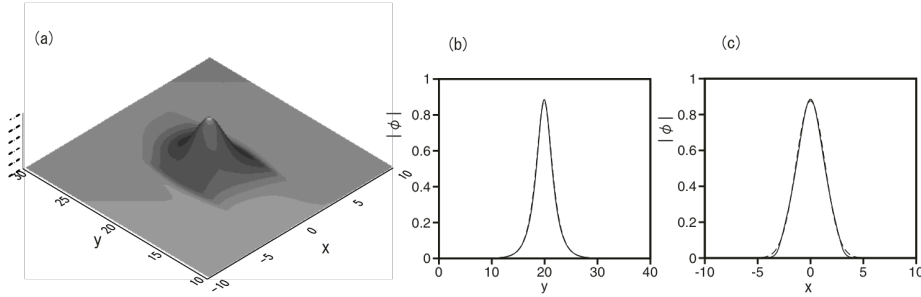


図 2.2: (a) ソリトンの定常状態の 3D プロット、(b) ソリトン $x = 0$ における断面の概形、破線は近似計算の結果、(c) ソリトン $y = 0$ での断面の概形、破線は近似計算の結果

非線形シュレディンガー方程式 (2.66) に対するラグランジアンは

$$L = \int \int \left\{ \frac{1}{2} \left[i \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \phi^* - i \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \phi - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{2} |\phi|^4 - U(x, y) |\phi|^2 \right] \right\} dx dy \quad (2.69)$$

である。 ϕ を

$$\phi = A \operatorname{sech}(y/a) \exp[-x^2/(2b^2)] \quad (2.70)$$

と仮定しラグランジアンを計算すると、

$$L_e = N \left[-\frac{1}{4b^2} - \frac{1}{6a^2} + \frac{N}{6\sqrt{2\pi}ab} + U_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x_0}{b}\right) \right] \quad (2.71)$$

となり、ノルムは

$$N = \int \int |\phi|^2 dx dy = 2A^2 \sqrt{\pi} ab \quad (2.72)$$

誤差関数は

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\zeta^2) d\zeta \quad (2.73)$$

となる。それぞれ変数は

$$\frac{\partial L_e}{\partial a} = \frac{\partial L_e}{\partial b} = 0 \quad (2.74)$$

で求められ、 a と b はそれぞれ

$$a = \frac{2\sqrt{2\pi}b}{N} \quad (2.75)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{N^2}{24\pi} + \frac{2U_0}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x_0^2}{b^2}\right)(-x_0b) = 0 \quad (2.76)$$

となる。 $N = 5, U_0 = 5, x_0$ のときに $a = 1.357$ 、 $b = 1.353$ 、 $A = 0.876$ と見積もることができる。図 2.2(a) の破線は $\xi = 20$ においての $\phi = A \operatorname{sech}[(y - \xi)/a]$ 図 2.2(c) の破線の曲線は $\phi = A \exp[-x^2/(2b^2)]$ である。この変分法はチャネル内の 2 次元ソリトンをよく近似していることがわかる。

2.2.2 狭まっていくポテンシャル

y 方向に進むにつれチャンネルの幅が変わる最も簡単な不均一な系について考える。まずポテンシャルの幅を $x_0(y)$ とし、 $x_0(y)$ が $y < y_1$ で $x_0(y) = x_{01}$ 、 $y_1 < y < y_2$ では $x_0(y) = x_{01} + (x_{02} - x_{01})(y - y_1)/(y_2 - y_1)$ 、 $y > y_2$ では $x_0(y) = x_{02}$ とし、てだんだん狭まっていくポテンシャル (図 2.3(a)) について考える。チャンネル中心は $x = 0$ とする。図 2.2(a) のような初期状態の定常ソリトンに

$$\phi(x, y) = \phi_0 \exp(iky) \quad (2.77)$$

と運動量を与えソリトンを動かす。このとき $N = 5$ 、 $x_0 = 3$ 、 $U_0 = 5$ で k は y 方向の初期波数である。もし幅を変えずにまっすぐ進むポテンシャル (図 2.3(b)) においては2次元ソリトンは速度 $v_y = k$ 、形状を変えず伝搬する。図 2.3(c)

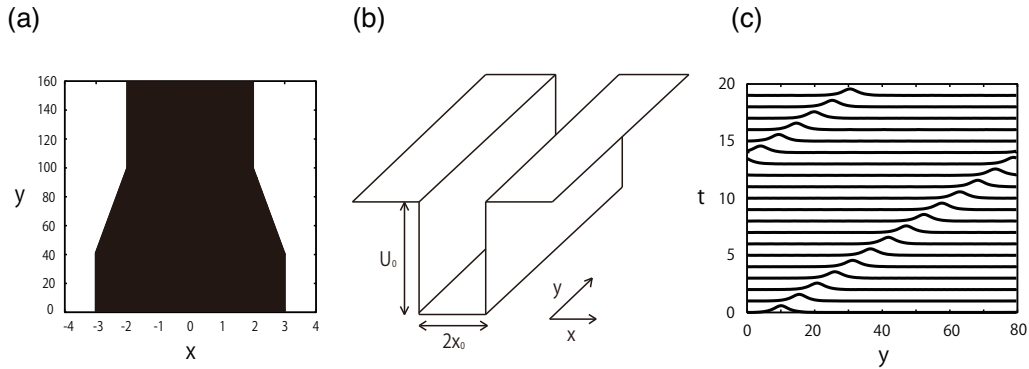


図 2.3: (a) 狭まっていくポテンシャルの概形、(b) まっすぐ進むポテンシャルの概形、(c) $\phi(x, y, t)$ の時間発展, $x = 0, k = 0.77$

$y_2 - y_1$ を $x_{01} - x_{02}$ に比べて非常に大きくし、チャンネルの幅を滑らかに変化させると図 2.4(a),(b) のような結果が得られる。図 2.4(a) は $k = 0.77$ 、 $x_{01} = 3$ 、 $x_{02} = 2$ 、 $y_1 = 40$ 、 $y_2 = 100$ でのソリトンの時間発展を表している。ソリトンの初期ピーク的位置は $(0, 20)$ である。ソリトンはだんだん狭くなっていくポテンシャル中を伝搬する。ポテンシャルの幅が狭まっていくにつれ、速度はだんだん遅くなっていき、ソリトンの振幅は大きくなっていく。図 2.2(b) は同じ形のポテンシャル内の

$k = 0.74$ での時間発展を示している。ソリトンは狭まっていくポテンシャルを通過せずに反射する。このポテンシャルで閾値は $k_c = 0.76$ である。図 2.2(c) は閾値と狭まりきった時の幅との関係を表している。このとき $x_{01} = 3$ 、 $U_0 = 5$ 、 $y_1 = 40$ 、 $y_2 = 100$ である。また図 2.2(c) の菱形の点は数値計算を行った結果である。

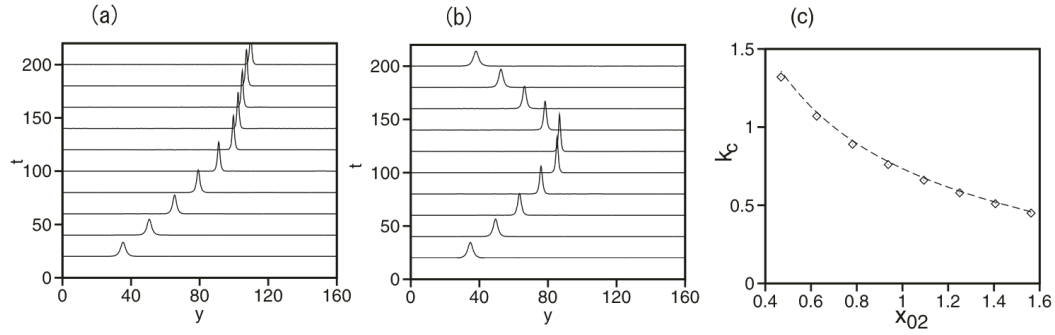


図 2.4: (a) $\phi(x, y, t)$ の時間発展, $x = 0, k = 0.77$ 、(b) $\phi(x, y, t)$ の時間発展、 $x = 0, k = 0.74$ 、(c) 反射の閾値 k_c の変化（菱形）と近似計算による閾値の変化

この狭まっていくポテンシャルでのソリトンの透過・反射現象をより理解するために非線形シュレディンガー方程式に対するラグランジアンの変分法による近似計算を行う。波動関数を

$$\phi(x, y, t) = A \operatorname{sech}\left[\frac{y - \xi(t)}{a}\right] \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \exp\{ip[y - \xi(t)] - i\mu t\} \quad (2.78)$$

と仮定すると、有効ラグランジアンは

$$L_{\text{eff}} = N\left[p\xi_t(t) - \frac{p^2}{2} - \frac{1}{4b^2} - \frac{1}{6a^2} + \frac{N}{6\sqrt{2\pi}ab} + U_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x_0}{b}\right)\right] \quad (2.79)$$

となる。ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \xi_t} = \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial p} = 0 \quad (2.80)$$

より

$$\frac{d\xi}{dt} = p, \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \xi} \quad (2.81)$$

を得る。ここで有効ポテンシャルは、

$$U_{\text{eff}} = -\frac{1}{4b^2} + \frac{1}{6a^2} - \frac{N}{6\sqrt{2\pi}ab} - U_0 \text{erf}\left(\frac{x_0}{b}\right) \quad (2.82)$$

であり、パラメータ a 、 b は

$$\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial a} = \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial b} \quad (2.83)$$

より $y = \xi(t)$ の各点より求まる。また (2.81) は有効ポテンシャル U_{eff} 内のニュートンの運動方程式を表す。 y_1 から y_2 までのあいだに有効ポテンシャルは単調増加する。閾値の k_c である波数 k は

$$\frac{k_c^2}{2} = U_{\text{eff}}(x_{02}) - U_{\text{eff}}(x_{01}) \quad (2.84)$$

で得られる。図 2.4(c) の破線はこれにより求めた値で、この近似はよく数値計算と一致していることがわかる。

2.2.3 分岐するポテンシャル

次に、1つのチャンネルが2つのチャンネルに分岐する様なポテンシャル中のソリトンの運動を考える。ポテンシャル $U(x, y)$ を $y < y_1$ かつ $-x_{01} < x < x_{01}$ の時に $U(x, y) = -U_0$ 、 $y_1 < y < y_2$ かつ $-x_{12} < x < -x_{13}, x_{13} < x < x_{12}$ の時に $U(x, y) = -U_0$ 、 $y_1 < y < y_2$ かつ $-x_{13} < x < x_{13}$ で $U(x, y) = U_1$ として $y > y_2$ かつ $-x_{02} < x < -x_{03}, x_{03} < x < x_{02}$ の時に $U(x, y) = -U_0$ で、 $x_{12} = x_{01} + (x_{02} + x_{01}) \times (y - y_1)/(y_2 - y_1)$ そして $U_1 = U_0 \times (y_2 - y)/(y_2 - y_1)$ としその他の領域では $U(x, y) = 0$ とする。 U_1 は y 方向にスムーズにポテンシャルを変化させるために導入した。図 2.5(a) は $U(x, y) = -U_0$ 、 $x_{01} = 3$ 、 $x_{03} = 3$ 、 $x_{02} = 6$ 、 $y_1 = 40$ 、 $y_2 = 100$ とした時のポテンシャルの概形を示す。初期条件は狭まっていくポテンシャルの場合と同様で

$$\phi(x, y, t) \sim \text{Asech}[(y - 20)/a] \exp[-x^2/(2b^2)] \exp[ik(y - 20)] \quad (2.85)$$

とする。図 2.5(b) は $k = 0.4$ の時の $x = 0$ における $|\phi(0, y, t)|$ の時間発展である。その他のパラメータは $U_0 = 5$ 、 $N = 5$ としている。これよりソリトンはポテンシャルの分岐点で反射が起こっていることがわかる。図 2.5(c) は $|\phi(x, y_p)|$ の時間発展で y 方向は $|\phi|$ のピークの位置で初期波数は $k = 0.8$ としている。これよりソリトンはチャンネルが2つに分岐するときに伝搬しながら2つに分裂する。

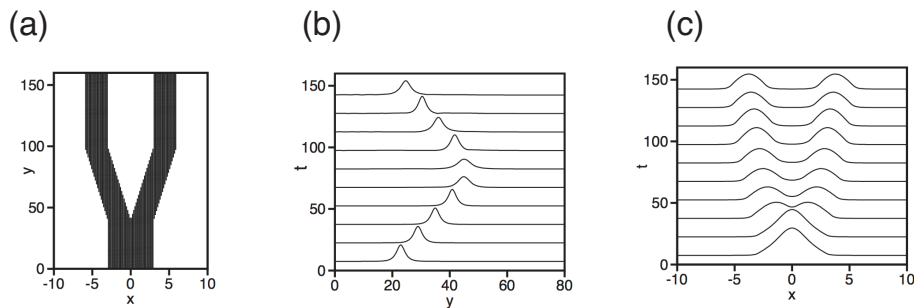


図 2.5: (a) 分岐するポテンシャルの概形、(b) $\phi(x, y, t)$ の時間発展、 $x = 0, k = 0.4$ 、(c) $\phi(x, y, t)$ の時間発展（ピークの点での x 方向の断面） $k = 0.8$

この反射・分裂現象の閾値 k_c は $k_c \sim 0.74$ である。図 2.6 は $k = 0.8$ の時の (x, y) 空間でのピークの軌跡を示している。ソリトンのピークは $y < 43.8$ では $x = 0$ に存在し、 $y > 43.8$ では $x = 0$ から離れ 2 つに分裂していることがわかる。

非線形シュレディンガー方程式に対するラグランジアンによる変分法を用いて、分裂するプロセスについて考える。波動関数 ϕ を

$$\phi = \left(\frac{A}{2}\right) \text{sech}\left[\frac{y - \xi(t)}{a}\right] \left\{ \exp\left[-\frac{(x - \eta)^2}{2b^2}\right] + \exp\left[-\frac{(x + \eta)^2}{2b^2}\right] \right\} \exp\{ip[y - \xi(t)] - i\mu t\} \quad (2.86)$$

と仮定するとラグランジュ方程式は

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \xi} \quad (2.87)$$

となる。ここで有効ポテンシャルは

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}} = & \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{4b^2} - \frac{\eta e^{-\eta^2/b^2}}{2b^4(1 + e^{-\eta^2/b^2})} - \frac{N}{12\sqrt{2\pi}ab} \frac{1 + 3e^{-2\eta^2/b^2} + 4e^{-4\eta^2/b^2}}{(1 + e^{-\eta^2/b^2})^2} \\ & - U_0 \frac{\text{erf}[(x_2 - \eta)/b] + \text{erf}[(x_2 + \eta)/b] + \text{erf}[(\eta - x_1)/b] - \text{erf}[(\eta + x_1)/b]}{2(1 + e^{-\eta^2/b^2})} \\ & - U_0 \frac{2e^{-\eta^2/b^2} [\text{erf}(x_2/b) - \text{erf}(x_1/b)]}{2(1 + e^{-\eta^2/b^2})} \\ & - U_1 \frac{\text{erf}[(x_1 + \eta)/b] - \text{erf}[(\eta - x_1)/b] + 2e^{-\eta^2/b^2} \text{erf}(x_1/b)}{2(1 + e^{-\eta^2/b^2})} \quad (2.88) \end{aligned}$$

で $y < y_1$ では $x_1 = 0, x_2 = x_{01}$ となり、 $y_1 < y < y_2$ では $x_1 = x_{03}, y > y_2$ では $x_2 = x_{02}$ とする。図 2.6 の破線はこれより得られた結果を示す。この軌跡は変分法による近似計算により得られた。また変分法により得られた閾値は $k_c = 0.77$ で数値計算により得られた閾値 $k_c \sim 0.74$ より少し大きい、それはチャンネルにトラップされるためと考えられる。

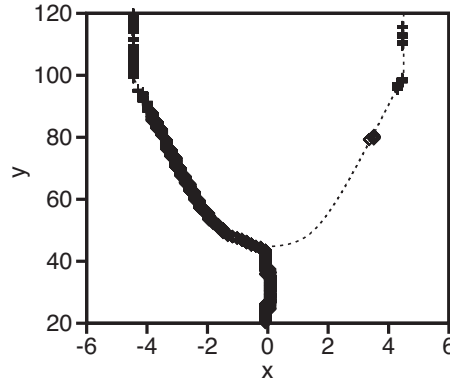


図 2.6: ソリトンのピークの軌跡、破線は変分法による結果

パルスを分裂させる応用を考えると分岐点でのパルスの反射は望ましくない現象であり、このような分岐する点でのソリトン反射を抑える必要がある。有効ポテンシャルの差

$$U_{\text{eff}}(y_2) - U_{\text{eff}}(y_1) \quad (2.89)$$

が反射の原因であり、反射を抑えたい場合には

$$|U_{\text{eff}}(y_2) - U_{\text{eff}}(y_1)| \quad (2.90)$$

を小さくする必要がある。ここで調整できるのは溝の幅 $x_{02} - x_{03}$ とポテンシャルの深さ $U_0(y)$ である。 $U_0(y)$ の値を発展方程式

$$\frac{dU_0(y)}{d\tau} = -\beta[U_{\text{eff}}(y_1) - U_{\text{eff}}(y)] \quad (2.91)$$

, ($\beta > 0$) で調整すると、 U_{eff} は $y > y_1$ における $U_{\text{eff}}(y_1)$ の各点に近づく。 U_1 は $U_1 = 5 \times (y_2 - y)/(y_2 - y_1)$ である。図 2.7(a) は $x_{01} = 3$ 、 $x_{02} = 2$ 、 $y_1 = 40$ 、 $y_2 = 100$ における $U_0(y)$ の値を示す。図 2.7(b) は初期波数 $k = 0.2$ とした場合の時間発展を示す。このように小さな初期波数でも反射が起きず、ソリトンはチャネルの分岐に沿って2つに分裂している。

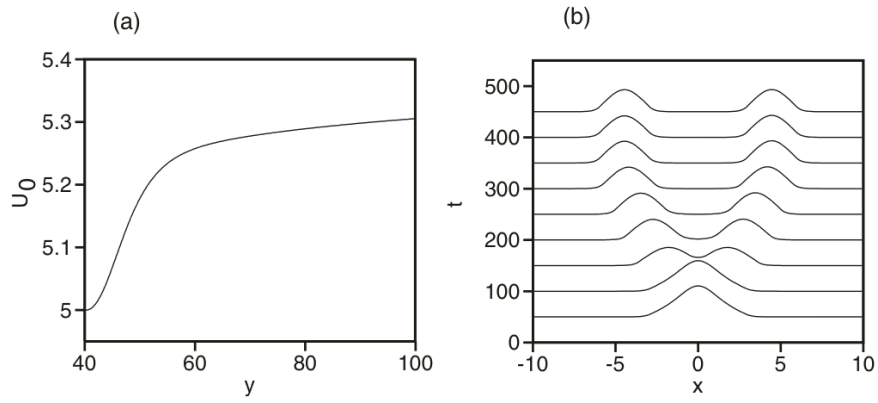


図 2.7: (a) 変分法による反射しないポテンシャルの深さの設定、(b) $\phi(x, y, t)$ の時間発展, $k = 0.2$ (x 方向のピークの点での断面)

2.2.4 直角に曲がるポテンシャル

ポテンシャルが曲がる場合について考える。

まず図 2.8(a) のような滑らかに曲がるヘアピンコーナーの形をしたポテンシャルについて考える。ポテンシャルの内側の半径は3で外側の半径は9とし、2次元ソリトンのノルム $N = 4$ で $x = -16, y = 12.5$ の位置に初期条件を設定する。そして初期速度 $k_y = 0.2$ としてソリトンを動かす。図 2.8(b) はソリトンの重心の軌跡を表しており、ソリトンが滑らかに曲がったポテンシャルに沿って進む。このようなポテンシャルにおいて速度を変えた場合、例えば $k_y = 0.6$ の様に大きくした場合はチャンネルが曲がった中央付近から重心の軌跡が振動する現象が得られる。図 2.8(c) は $k_y = 0.2$ の場合のヘアピンカーブをソリトンが通っている時の等高線図である。2次元ソリトンが変形し滑らかにヘアピンカーブを通っていることがわかる。

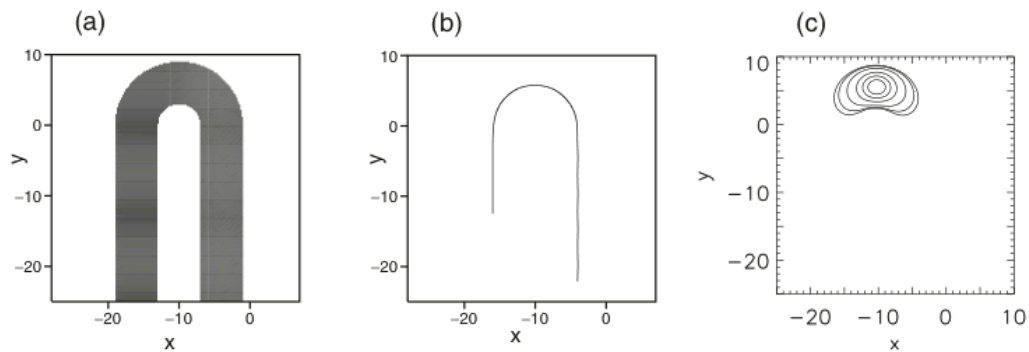


図 2.8: (a) ヘアピンカーブ形チャンネルの概形、(b) 初期速度 0.2 での重心の軌跡、(c) ヘアピンカーブを進むソリトンの等高線

次に図 2.9 のようなポテンシャルを直角に接続したポテンシャルについて考える。ポテンシャルを接続するときに、内側はそのまま直角に接続し、外側は曲率半径 r で滑らかに接続したポテンシャルについて考える。この時ノルム N は 5.5 とし初期位置は $(-16, -12.5)$ とし初期速度は $k_y = 0.2$ とする。図 2.9(a)-(c) は 2 次元ソリトンの重心の軌跡を示し、外側の半径はそれぞれ (a) $r = 5$ 、(b) $r = 3$ 、(c) $r = 1$ とする。

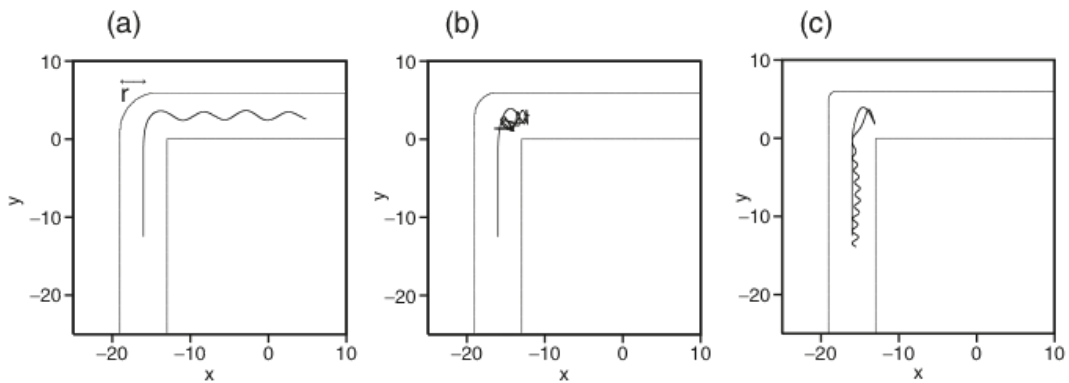
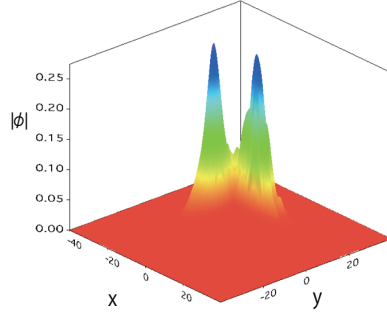


図 2.9: 初期速度 0.2 でのソリトンの重心の軌跡で外側の曲率半径が (a) $r = 5$, (b) $r = 3$, (c) $r = 1$

曲率半径 $r = 5$ の場合はソリトンはそのまま通過し、曲率半径 $r = 1$ の場合にはソリトンは反射する。また曲がった地点付近から振動現象が起きていることがわかる。 $r = 3$ においては複雑な現象が起こる。この場合ソリトンは内側と外側のポテンシャルに衝突しつづけ曲がり角から抜け出せなくなる。ソリトンの透過は半径が $r > 3$ の場合、反射は半径が $r < 1.5$ の場合、束縛（抜け出せなくなる）は $1.5 \leq r \leq 3$ の場合に起きる。図 2.9 のソリトンのノルム $N = 5.5$ 、速度 $k_y = 0.2$ の場合はソリトンは形を保ち続ける。また r の中間領域において、ソリトンの条件（初期速度 k_y を大きくした場合や、ノルム N を小さくした場合）を変化させた場合においてソリトンは 2 つに分裂することも確認できた。図 2.10 このように曲がったポテンシャルにおいて内側の接続が十分に小さく曲がっている場合には、束縛現象が曲率半径の中間の値を取る場合に起こることがわかる。

図 2.10: 曲がり角でのソリトンの分裂、初期速度 $k = 1.4$, ノルム $N = 4$

次にラグランジアンによる近似計算を行う。非線形シュレディンガー方程式に対するラグランジアンは

$$L = \int \int \left\{ \frac{1}{2} \left[i \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \phi^* \right) - i \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial t} \phi \right) \right] - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{2} |\phi|^4 - U(x, y) |\phi|^2 \right\} dx dy \quad (2.92)$$

とし $N = 5.5$ とし、2次元ソリトンは等方的とする。 ϕ は

$$\phi = A \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2W^2} \right] \exp [ip_x(x - x_0) + ip_y(y - y_0) - i\mu t] \quad (2.93)$$

と仮定するとラグランジアンは

$$L = N \left[\mu - \frac{1}{W} + \frac{N}{2\pi W^2} + p_x x_{0t} + p_y y_{0t} - p_x^2/2 - p_y^2/2 + U_{\text{eff}}(x_0, y_0) \right] \quad (2.94)$$

と計算できる。ソリトンのノルム N は

$$N = \iint |\phi|^2 dx dy = \pi A^2 W^2 \quad (2.95)$$

で、有効ポテンシャル U_{eff} は

$$U_{\text{eff}} = \iint U(x, y) |\phi|^2 dx dy / N \quad (2.96)$$

である。ソリトンのピークの大きさ $N = 5.5$ は $A = 1.16$ である。 $W = 1.14$ となる。ラグランジュ方程式は

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = -\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial x_0}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial y_0} \quad (2.97)$$

(2.97) はポテンシャル U_{eff} 内でのニュートンの運動方程式となる。この方程式のシミュレーションを行う。 $U_{\text{eff}} = \iint U(x, y) |\phi|^2 dx dy / N$ で

$$|\phi|^2 = 1.16^2 \exp\{ -[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] / 1.14^2 \} \quad (2.98)$$

とする。図 2.11(a)-(c) は (x_0, y_0) の軌跡でそれぞれ (a) $r = 5$, (b) $r = 3$, (c) $r = 1$ の場合である。透過・反射の移り変わりは r を小さくすると変わることがわかる。また $2.8 \leq r \leq 4$ の時に多重散乱し最終的に曲がり角から通り抜けていくことが観測された。多重散乱が多くなると反射透過がわずかな r の違いで移り変わるカオス散乱と呼ばれる現象になる。[21] カオス散乱はこのような簡単な状況で起こり内側の曲がり角が鋭くなると生じる。

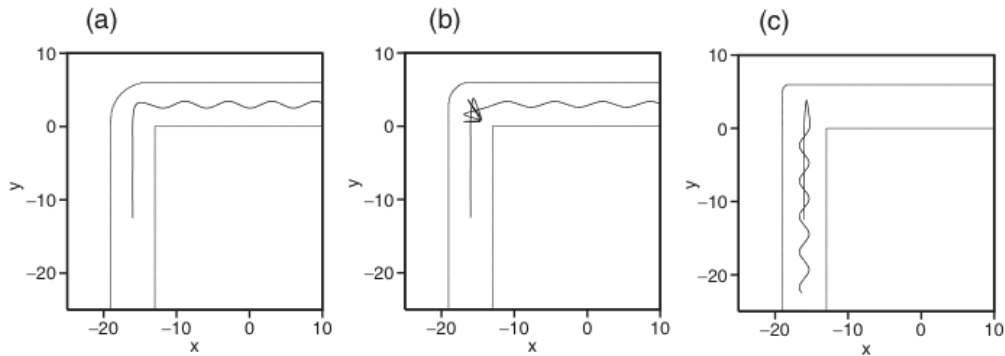


図 2.11: (2.97) での (x_0, y_0) の軌跡、初期速度 0.2、外側の曲率半径が (a) $r = 5$, (b) $r = 3$, (c) $r = 1$

2.2.5 分岐・再結合するポテンシャル

2.2.3 では分岐するポテンシャルにおいて、2次元ソリトンが2つのソリトンに分岐することについて考えた。次に、図 2.12(a) のように分岐した後再合流した場合について考える。このような導波路は光学ではマッハツェンダー干渉計と呼ばれる。分岐地点は $y = -40$ で合流地点は $y = 40$ としている。分岐したソリトンに位相の差 $\Delta\varphi$ を $y = 0$ で

$$\phi(x, y) \rightarrow \phi(x, y) \exp(i\Delta\varphi), x < 0 \quad (2.99)$$

$$\phi(x, y) \rightarrow \phi(x, y) \exp(-i\Delta\varphi), x > 0 \quad (2.100)$$

で与える。この位相差は分岐した左右の経路差に由来する。このような構造を考えるのは数値計算を簡単に行うためである。実際の実験では位相シフトはマッハツェンダー干渉計のような2つのチャネルの形や屈折率のプロファイルで変わる。 $\Delta\varphi = 0$ のときソリトンはポテンシャル合流地点である $y = 40$ において合流する。 $\Delta\varphi \neq 0$ のときソリトン重心は図のようなジグザグ振動が得られる。図 2.12(b) は重心の軌跡で位相シフトは $\Delta\varphi = 0, \pi/64, \pi/32, \pi/16$ の4つの値をとり、初期速度は $k_y = 1$ ノルムは $N = 5$ としている。ジグザグ振動は $y > 20$ から発生し、この振動の振幅は $\Delta\varphi$ と共に大きくなるが周期はほぼ同じである。

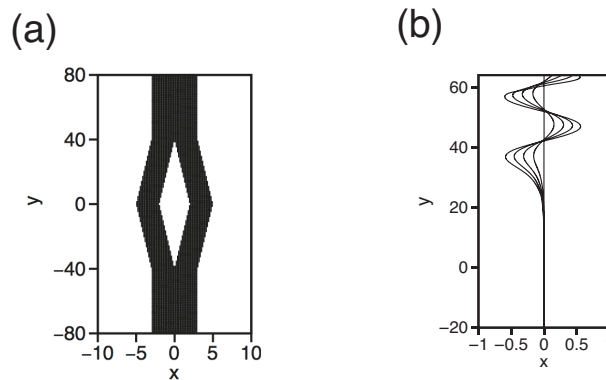


図 2.12: (a) 分岐・再結合するポテンシャルの概形、(b) ソリトンの重心の軌跡, 初期速度, $k_y = 1$ 、 $y = 0$ での位相シフト $\Delta\varphi = 0, \pi/64, \pi/32, \pi/16$

このジグザグ振動はジョセフソン振動のなごりと解釈することができる。ジョセフソン振動は2つのチャンネルのポテンシャルの深さ U_0 でのトンネル効果に起因し発生する。ジョセフソン振動について以下で説明する。位相シフトを一定にして、初期速度 k_y を小さくすると、ソリトンは合流点である $y = 40$ の前で反射する。図 2.13(a) は $k_{yc} = 0.37$ 、 $\Delta\varphi = \pi/256$ における左右のポテンシャル中心線での $|\phi|$ の時間発展を示す。反射する前は、左右にわかれた2つのソリトンの振幅はほぼ同じであるが、反射後に2つのソリトンの差は大きくなり、最終的に2つのチャンネル内の1つに統合される。ここで得られた臨界速度は $\Delta\varphi = \pi/256$ にて $k_{yc} = 0.38$ である。図 2.13(b) は k_{yc} と位相シフト $\Delta\varphi$ の関係を示す。水平軸は対数でプロットされ臨界速度 k_{yc} は $\Delta\varphi = 0$ で急激に増大している。

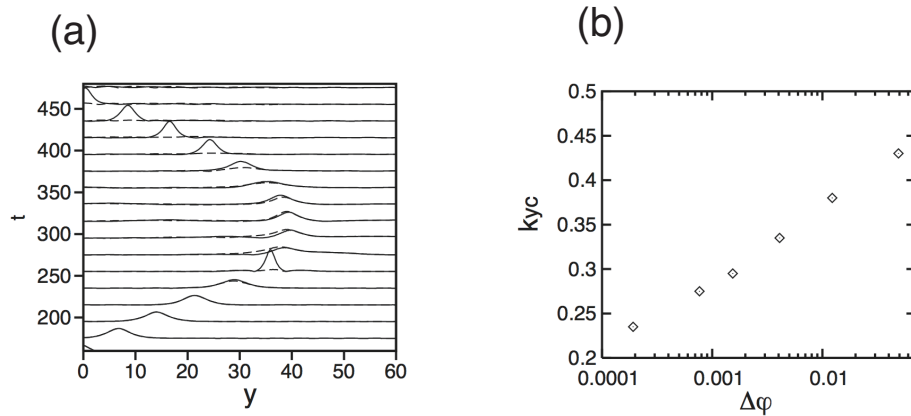


図 2.13: (a) 中心線上の $|\phi|$ の時間変化, $k_y = 0.37, \Delta\varphi = \pi/256$ 、(b) 反射の閾値 k_y と $\Delta\varphi$ の関係

異なるチャンネル内の2つのソリトン解の位相が異なっていると2つのソリトンがポテンシャルの高さ U_0 の壁を超えトンネル効果により相互に作用するためにジョセフソン振動が起こる。[22,23] $\phi(x,y)$ は次の様に仮定することができる。

$$\begin{aligned}\phi(x, y) = u(y, t) \exp\left\{-\frac{[x - \eta(y)]^2}{2b^2}\right\} \exp(-i\mu t) \\ + v(y, t) \exp\left\{-\frac{[x + \eta(y)]^2}{2b^2}\right\} \exp(-i\mu t) \quad (2.101)\end{aligned}$$

$\pm\eta(y)$ は x 座標 y における左右の中央点を表している。これを非線形シュレディンガー方程式に対するラグランジアン

$$L = \int \int \left\{ \frac{1}{2} \left[i \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \phi^* \right) - i \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial t} \phi \right) \right] - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{2} |\phi|^4 - U(x, y) |\phi|^2 \right\} dx dy \quad (2.102)$$

に代入し計算をするとラグランジュ方程式はそれぞれ

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta L}{\delta u_t} \right) = \frac{\delta L}{\delta u}, \quad (2.103)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta L}{\delta v_t} \right) = \frac{\delta L}{\delta v} \quad (2.104)$$

となり、 u と v の従う方程式は

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c(|u|^2 + g|v|^2)u - d(v - u) \quad (2.105)$$

$$i \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - c(|v|^2 + g|u|^2)v - d(v - u) \quad (2.106)$$

と見積もられ、

$$g = 2 \exp[-2\eta(y)^2/b^2] \quad (2.107)$$

$$d = 2U_0 \exp[-2\eta(y)^2/b^2] \quad (2.108)$$

である。ここで u^*v^2 や v^*u^2 のような複素項は無視した。ソリトンは対称で $u = v$ で形を変えず伝搬すると仮定すると

$$c = 1/[\sqrt{2}(1 + g)] \quad (2.109)$$

と見積もることができる。 η が大きい時、相互作用は弱くソリトンは独立して伝搬する。しかしながら y が合流点 $y = 40$ 付近に近いとき、 η は小さくなり、ジョセフソン効果は大きくなる。

図 2.14(a) は $|u|$ と $|v|$ の方程式 (2.105), (2.106) で $k_y = 0.2$ における時間発展を示す。 u と v の初期条件は

$$u = A / \cosh(y/W) \exp(i\Delta\varphi) \quad (2.110)$$

$$v = A / \cosh(y/W) \exp(-i\Delta\varphi) \quad (2.111)$$

で $b = 0.9$ 、 $N_0 = 5/(\sqrt{\pi}b)$ 、 $W = 4\sqrt{2}/N_0$ 、 $A = \sqrt{N_0/(4W)}$ 、 $\Delta\varphi = \pi/256$ である。2つのソリトンは反射され、反射後に1つのチャンネルにソリトンは統合する。臨界波数 $k_y = 0.295$ で非線形シュレディンガー方程式の数値計算の値とは少し異なるが定性的には一致する。2つのソリトンの差を

$$R = \frac{(N_u - N_v)}{(N_u + N_v)} \quad (2.112)$$

で定義する。それぞれのノルムは

$$N_u = \int |u|^2 dy, N_v = \int |v|^2 dy \quad (2.113)$$

である。 R の時間発展は図 2.14(b) で表している。 R は 0 から反射後に正の定数値に達する。1つのソリトンが反射したあと u チャンネルにソリトンが集まったことを意味している。

さらに

$$u(y, t) = A \operatorname{sech}[(y - \xi)/W] \exp[ip(y - \xi) - i\theta_1] \quad (2.114)$$

$$v(x, y) = B \operatorname{sech}[(y - \xi)/W] \exp[ip(y - \xi) - i\theta_2] \quad (2.115)$$

と仮定すると、有効ラグランジアンは

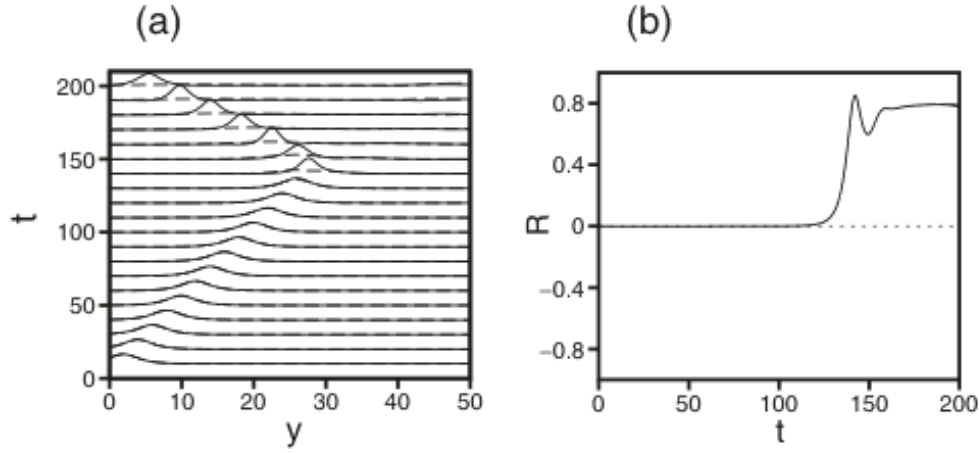


図2.14: (a) $|u|$ (実線)、 $|v|$ (破線) の時間発展, $k_y = 0.29$ 、(b) $R = (N_u - N_v)/(N_u + N_v)$ の時間発展

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \int [i(u_t u_t^* - u u_t^* + v_t v_t^* - v v_t^*) - |u_y|^2 - |v_y|^2 + c(|u|^4 + |v|^4 + 2g|u|^2|v|^2) + 2d(uv^* + vu^*) - 2d(|u|^2 + |v|^2)] dy \quad (2.116)$$

$$L_{\text{eff}} = N_0 \left\{ p\xi_1 - \frac{p^2}{2} - \frac{1}{6W^2} + \frac{\theta_{1t} + \theta_{2t}}{2} + \frac{R(\theta_{1t} - \theta_{2t})}{2} + \frac{R^2 N_0 e}{16W^2} + \tilde{d}[\sqrt{1 - R^2} \cos(\theta_2 - \theta_1) - 1] \right\} \quad (2.117)$$

と計算される。ここで

$$N_0 = \int |u|^2 + |v|^2 dy = 2(A^2 + B^2)W \quad (2.118)$$

$$R = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} \quad (2.119)$$

$$e(\xi) = \int c(y)[1 - g(y)] \text{sech}^4\left(\frac{y - \xi}{W}\right) dy \quad (2.120)$$

$$\tilde{d}(\xi) = \int d(y) \operatorname{sech}^2\left(\frac{y-\xi}{W}\right) dy / \int \operatorname{sech}^2\left(\frac{y-\xi}{W}\right) dy \quad (2.121)$$

$$W = \frac{4}{[1 + R^2 + (1 - R^2)g]N_0c} \quad (2.122)$$

$\xi, P, R, \Delta\theta$ に対するラグランジュ方程式は

$$\frac{d\xi}{dt} = p \quad (2.123)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{R^2 N_0}{16W^2} \frac{\partial e}{\partial \xi} + [\sqrt{1 - R^2} \cos(\theta_2 - \theta_1) - 1] \frac{\partial \tilde{d}}{\partial \xi} \quad (2.124)$$

$$\frac{dR}{dt} = 2\tilde{d}\sqrt{1 - R^2} \sin \Delta\theta \quad (2.125)$$

$$\frac{d\Delta\theta}{dt} = \frac{RN_0e}{4W^2} - \frac{2\tilde{d}R}{\sqrt{1 - R^2}} \cos \Delta\theta \quad (2.126)$$

となる。ここで、 $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ で ξ はソリトンの重心の y 座標である。 $R = 0$ かつ $\theta_1 + \theta_2$ 、 $dp/dt = 0$ 、の場合は2つのソリトンは一定の速度で伝搬する。 $R \ll 1$ で $\Delta\theta \ll 1$ の場合 (2.125)、(2.126) は

$$\frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} = -2\tilde{d} \frac{2\tilde{d} - N_0e}{4W^2} \Delta\theta \quad (2.127)$$

となりジョセフソン振動を記述している。

$$\frac{N_0e}{(4W^2) - 2\tilde{d}} > 0 \quad (2.128)$$

の時にジョセフソン振動は増大し、対称の状態 $u = v$ は不安定になる。 $e(\xi)$ と $\tilde{d}(\xi)$ は一様でないので dp/dt はジョセフソン振動の増幅により、負の値をとるようになる。負の加速度のため、ソリトンは減速しさらに逆方向に動くようになる。図 2.15(a) と図 2.15(b) は $N_0 = 5/(\sqrt{\pi}b)$ 、 $b = 0.9$ 、 $\xi(0) = 0$ 、 $p(0) = k_y = 0.2$ で位相変調 $\Delta\theta(0) = 2\Delta\varphi = \pi/128$ における ξ と R の時間発展である。反射が起こる位

置でジョセフソン振動の増幅の様子が見える。 $\Delta\theta(0) = \pi/128$ での k_{yc} の臨界値は (2.126) によりきまり 0.305 である。この値は (2.105), (2.106) での計算により決まる臨界値 0.295 の値に近く、よい近似になっていることがわかる。

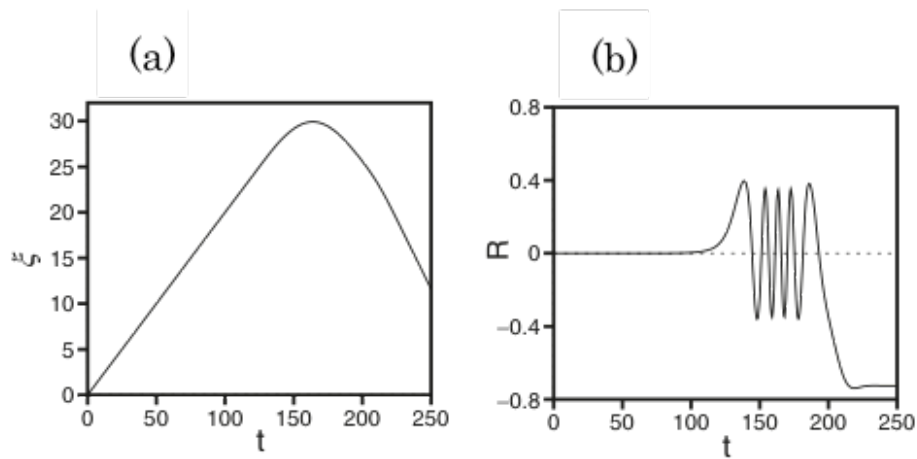


図 2.15: (a) ξ の時間発展, $k = 0.29, \Delta\theta = \pi/128$ 、(b) R の時間発展

2.3 変調不安定性とブリーザー

1次元非線形シュレディンガー方程式

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - g|\phi|^2\phi \quad (2.129)$$

はソリトンの他にも様々な解を持つ。解の1つである Peregrine solitons は x, t 軸に局在する。[2] また1次元非線形シュレディンガー方程式の解の1つである Akhmediev breathers は t 軸に対して局在する。[1] これらの一時的に局在する解は ロープ波（突然起こる非常に大きな波動）に関連しており、関心が高まっている。これらの (2.129) の定常解は $\epsilon = -gA^2$ において

$$\phi = A_0 \exp(-i\epsilon t) \quad (2.130)$$

である。これらの定常解の安定性を調べるために、

$$\phi = \{A_0 + \delta B(t) \cos(ky)\} \exp(-i\epsilon t) \quad (2.131)$$

を考える。ここで $\delta B = \delta B_r + i\delta B_i$ は複素数である。 δB_r と δB_i を線形化した方程式は

$$\frac{d\delta B_r}{dt} = (k^2/2)\delta B_i \quad (2.132)$$

$$\frac{d\delta B_i}{dt} = (k^2/4 + 2gA_0^2)\delta B_r \quad (2.133)$$

となる。この2つの方程式より

$$\frac{d^2\delta B_r}{dt^2} = (k^2/4)(-k^2 + 4gA_0^2)\delta B_r \quad (2.134)$$

ここで

$$k < k_c = \sqrt{4g}A_0 \quad (2.135)$$

のとき δB_r は指数関数的に大きくなる。このような不安定性は変調不安定性と呼ばれる。

Akhmediev breathers は変調不安定性と密接な関連があり, 光ファイバ内でスーパーコンティニウム (super continuum) を生成する。[24] Akhmediev breather は

$$A(y, t) = A_0 \frac{(1 - 4a) \cosh(bt) + ib \sinh(bt) + \sqrt{2a} \cos(ky)}{\sqrt{2a} \cos(ky) - \cosh(bt)} \quad (2.136)$$

で表される。 k は波数、 $2a = 1 - (k/k_c)^2$ 、 $b = [8a(1 - 2a)]^{1/2}$ 、 $k_c = \sqrt{4g}A_0$ である。

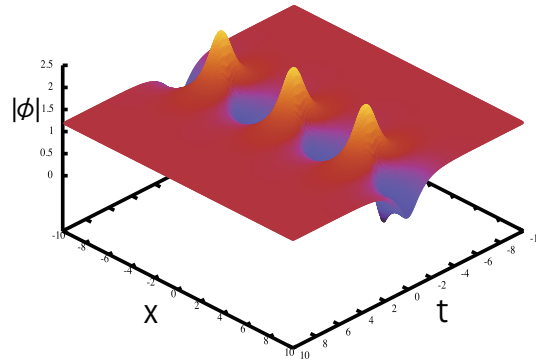


図 2.16: Akhmediev breather $a = 1/2$

Akhmediev breather は t 方向には $t = 0$ にてピークを持ち、 y 方向には周期的に変動する。一定の振幅 A_0 の状態は波数 k が $k < k_c$ 満たす変調摂動に対して不安定である。初期条件 $t = 0$ で

$$\phi(y, t) = A_0(1 + \delta \cos(ky)) \quad (2.137)$$

での変調不安定性の非線形時間発展を調べる。ここで、 δ は

$$\delta = \mu\{1 + i(2b/k)^2\} \quad (2.138)$$

と仮定すると、Akhmediev breather に近いブリーザー解が現れるが Akhmediev breather と異なり、ブリーザー運動は周期的に起こる。

さまざまな種類の非線形シュレディンガー方程式の変調不安定性、横方向不安定性、2次元や3次元への一般化についての研究がこれまでなされてきた。[25] 今回は1次元ポテンシャルにトラップされた2次元非線形シュレディンガー方程式に焦点を合わせ、1次元での結果やラグランジアンを使った変分法近似計算の結果を比較しながら考察する。ラグランジアンを使った変分法は可積分系ではない非線形波動の近似には有効な方法である [26] が、発見的手法であり、擬似的な不安定性に対しては問題点もあるという報告もあるので留意する必要がある。[27-31]

2.3.1 調和振動子型ポテンシャル

モデル式と近似計算の手法

1次元調和振動子型ポテンシャル中の2次元非線形シュレディンガー方程式を考える。

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nabla^2\phi - |\phi|^2\phi + \frac{1}{2}\Omega^2x^2\phi \quad (2.139)$$

Ω はトラップ振動数である。物質波は x 方向に調和振動子型ポテンシャル $(1/2)\Omega^2x^2$ でトラップされる。この系は y 方向に対しては一様となっている。 $\Omega = 0$ ならば、一様な解

$$\phi = A_0 \exp(-i\epsilon t) \quad (2.140)$$

がある。波数 k が

$$|k| < k_c = 2A_0 \quad (2.141)$$

を満たす摂動に対してこの一定な解は変調不安定性を示す。 Ω が0ではない場合、定常解

$$\phi(x, y, t) = u(x)e^{-i\epsilon t} \quad (2.142)$$

は y 方向に対して一様である。このような解はエネルギーの最低状態である。今回は変調不安定性を簡単化して調べることを目標とし、より一般的な定常解である $k \neq 0$ である

$$\phi(x, y, t) = u(x)e^{ik_y y}e^{-\alpha_0 x^2} \quad (2.143)$$

を考えない。非線形項がない場合

$$u(x) = A_0(2\alpha_0/\pi)^{1/4}e^{-\alpha_0 x^2}, \alpha_0 = \Omega/2 \quad (2.144)$$

が定常解である。非線形項があってもガウス関数近似

$$u(x) = A_0(2\alpha_0/\pi)^{1/4}e^{-\alpha_0 x^2} \quad (2.145)$$

はよい近似解と考えられる。しかしこの解は y 方向の摂動に対して変調不安定である。この変調不安定化のあとのブリーザー運動について考えていく。

(2.139) に対するラグランジアンは

$$L = \iint \left\{ \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \phi^* - \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \phi \right) - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^2 - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|^2 + \frac{1}{2} |\phi|^4 - \frac{\Omega^2 x^2}{2} |\phi|^2 \right\} dx dy \quad (2.146)$$

である。ここで解を

$$\phi(x, y) = u_0 e^{-[\alpha(t) + i\beta(t)]x^2} \phi(y, t) \quad (2.147)$$

$$u_0 = (2\alpha/\pi)^{1/4} \quad (2.148)$$

と仮定する。 L は

$$L = N_y \frac{\dot{\beta}}{4\alpha} + \int \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \phi^* - \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \phi \right) dy - N_y \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha} - \frac{1}{2} \int \left| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|^2 dy + \sqrt{\frac{\alpha}{4\pi}} \int |\phi|^4 dy - N_y \frac{\Omega^2}{8\alpha} \quad (2.149)$$

$$N_y = \int |\phi|^2 dy \quad (2.150)$$

となる。変分方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\alpha}} = \frac{\delta L}{\delta \alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\beta}} = \frac{\delta L}{\delta \beta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \phi^*} = \frac{\delta L}{\delta \phi^*} \quad (2.151)$$

となり、

$$\frac{d\alpha}{dt} = 4\alpha\beta \quad (2.152)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = 2(\beta^2 - \alpha^2) + \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} \frac{N_{2y}}{N_y} + \frac{\Omega^2}{2} \quad (2.153)$$

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - g|\phi|^2\phi \quad (2.154)$$

となる。ここで $g = \sqrt{\alpha/\pi}$ で、

$$N_{2y} = \int |\phi|^4 dy \quad (2.155)$$

であり、y 方向のシステムサイズは L_y としている。また y 方向に周期境界条件をとる。2次元非線形シュレディンガー方程式から、定常解は

$$\alpha = \alpha_0, \beta = 0, \phi(y, t) = A_0 e^{-i\epsilon t} \quad (2.156)$$

のときに得られパラメータ ϵ は1次元非線形シュレディンガー方程式と α, β との結合方程式が得られた

$$\epsilon = -\sqrt{\alpha_0/\pi} A_0^2 \quad (2.157)$$

となる。ノルム N_y と N_{2y} は

$$N_y = A_0^2 L_y \quad (2.158)$$

$$N_{2y} = A_0^4 L_y \quad (2.159)$$

となり、 α_0 は (2.153) より

$$-2\alpha_0^2 + \sqrt{\frac{\alpha_0^3}{\pi}} A_0^2 + \frac{\Omega^2}{2} = 0 \quad (2.160)$$

の解として与えられる。

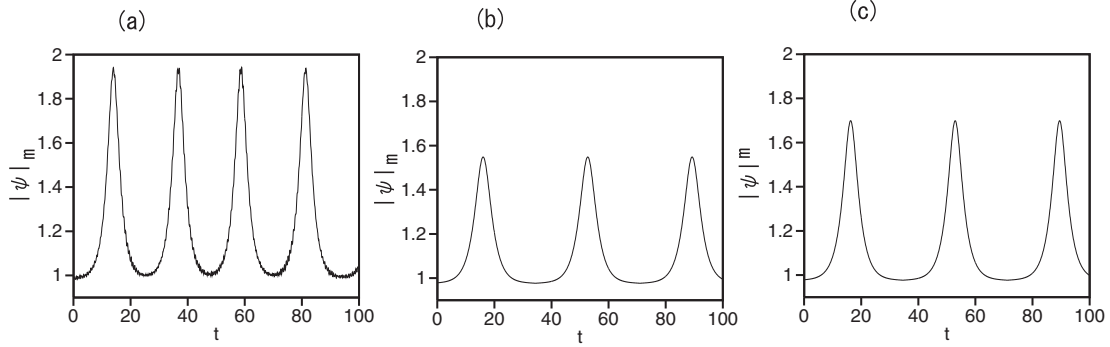


図 2.17: (a) 振幅のピーク $|\phi|_m$ の時間発展 (2次元非線形シュレディンガー方程式)、(b) 振幅のピーク $|\phi|_m = (2\alpha_0/\pi)^{1/4}|\psi|_m$ の時間発展 (1次元非線形シュレディンガー方程式), 非線形パラメータ $g = \sqrt{\alpha_0/\pi}$ 、(c) 振幅のピーク $|\phi|_m = (2\alpha(t)/\pi)|\psi|_m$ の時間発展 ((2.152)-(2.154) より)

2次元性によるブリーザー運動の増幅

y 方向に一様な安定解の変調不安定性の数値計算を行う。パラメータ Ω を 2.5 とする。(2.160) の $A_0 = 1$ での解は $\alpha_0 = 1.43$ となる。初期条件は

$$\phi(x, y, 0) = (2\alpha_0/\pi)^{1/4} e^{-\alpha_0 x^2} A_0 [1 + \mu \{1 + i(2b/k)^2\} \cos ky] \quad (2.161)$$

$A_0 = 1, \mu = 0.0002, k = 2\pi/L_y, k_c = \sqrt{4(\alpha_0/\pi)^{1/2}}, 2a = 1 - (k/k_c)^2, b = [8a(1 - 3a)]^{1/2}$ である。パラメータ μ は摂動の大きさを意味する。変調不安定性は $k = 2\pi/4$ で起こり、図 2.17(a) は振幅のピーク $x = y = 0$ での $|\phi|_m$ の時間発展を示す。変調不安定性のためにブリーザー運動が起こっていることが分かる。またピークの振幅は 0.94 である。次に 1次元非線形シュレディンガー方程式 (2.154) で α を $\alpha_0 = 1.43$ に固定したときの数値計算を行う。1次元非線形シュレディンガー方程式の初期条件は

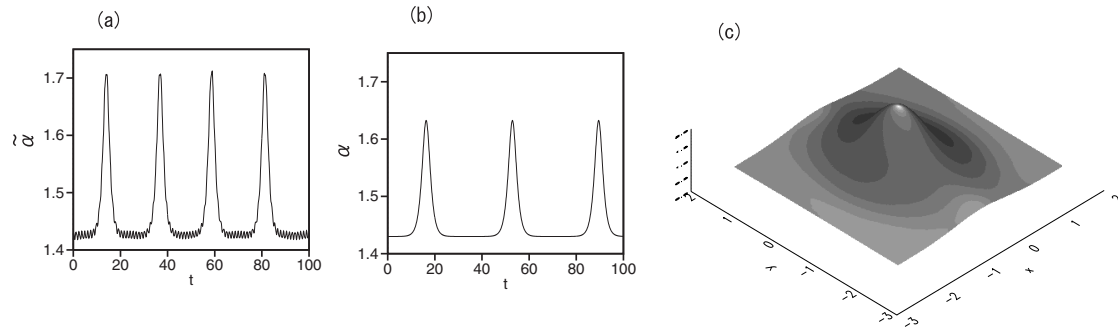


図 2.18: $\tilde{\alpha}$ の時間発展 (2次元非線形シュレディンガー方程式)、(b) α の時間発展 ((2.152)-(2.154) より)、(c) $|\phi|$ ($t = 13.7$) での3次元プロット (2次元非線形シュレディンガー方程式)

$$\phi(y, 0) = A_0[1 + \mu\{1 + i(2b/k)^2\} \cos ky] \quad (2.162)$$

$A_0 = 1, \mu = 0.002, k = 2\pi/L_y, k_c = \sqrt{4(\alpha_0/\pi)^{1/2}}, 2a = 1 - (k/k_c)^2, b = [8a(1 - 2a)]^{1/4}$ とする。図 2.17(b) は $y = 0$ での $|\phi|_m = (2\alpha_0/\pi)^{1/4}|\phi(y, t)|$ の時間発展で $\phi(y, t)$ を示す。1次元非線形シュレディンガー方程式において変調不安定性によりブリーザー運動が起こり、ピークの構造は Akhmediev breather により近似できる。変調の振幅は 0.57 となっている。変調の増幅は2次元の場合に比べ小さい。次に (2.152)-(2.154) を計算行う。これらの式の初期条件は

$$\alpha = \alpha_0, \beta = 0 \quad (2.163)$$

$$\phi(y, 0) = A_0[1 + \mu\{1 + i(2b/k^2)\} \cos ky] \quad (2.164)$$

である。 $A_0 = 1, \mu = 0.02, k = 2\pi/L_y, k_c = \sqrt{4(\alpha_0/\pi)^{1/2}}, 2a = 1 - (k/k_c)^2, b = \{8a(1 - 2a)\}^{1/2}$ とする。図 2.17(c) は $y = 0$ での $|\phi|_m = [2a(t)/\pi]^{1/4}|\phi(y, t)|$ における時間発展を表したものである。この場合にもブリーザー運動が現れるが、振幅は 0.73 となる。これは図 2.17(b) の時よりも大きく、図 2.17(a) の場合よりも小さい。

ソリトンの幅についても比較する。図 2.18(a) は2次元非線形シュレディンガー方程式 (2.139) に対して

$$\tilde{\alpha} = \frac{\int |\phi|^2 dx dy}{4 \int x^2 |\phi|^2 dx dy} \quad (2.165)$$

の時間発展を計算した結果である。x方向のソリトンの幅は $1/\sqrt{4\tilde{\alpha}}$ と見積もられる。図2.18(b)は(2.152)-(2.154)による α の時間発展を表したものである。 α の時間発展はy方向の変調不安定性に起因している。 α の増加は(2.154)の非線形パラメータ

$$g = \sqrt{\alpha/\pi} \quad (2.166)$$

を通じて変調不安定性をさらに増幅させる。これが2次元非線形シュレディンガー方程式でのブリーザー運動の増幅のメカニズムである。しかし図2.18(a)、2.18(b)から2次元非線形シュレディンガー方程式ではソリトンはx方向により強く圧縮されていることがわかる。図2.18(c)は図2.18(a)の最大振幅である $t = 13.7$ での ϕ の3次元プロットである。 $|\phi|$ は x, y が共に $x = y = 0$ で強く局在していることがわかる。2次元的な集中点は(2.152)-(2.154)ではうまく記述できず、その違いが図2.17(a)と図2.18(c)や図2.18(a)と図2.18(b)との違いとなっている。1次元調和振動子ポテンシャル中での2次元非線形シュレディンガー方程式のブリーザー運動は、1次元非線形シュレディンガー方程式のAhkmediev breatherより増幅されていることがわかった。それはソリトンの2次元圧縮に起因する。一方2次元の非線形シュレディンガー方程式の圧縮によるコラプスはノルム $N = \int |\phi|^2 dx dy$ が閾値 $N = 5.85$ を超えた場合に発生する。コラプス現象はこれまで多く研究されており[32,33]、外部ポテンシャルがあっても発生する。最大振幅は $N = 5.6$ 付近から急激に増大し(図2.19 菱型)、これは2次元非線形シュレディンガーのコラプスを意味する。最大振幅 $|\phi|_{mm}$ の(2.152)-(2.154)での数値計算では $N = 6$ 付近で急激に大きくなる(図2.19 四角)。一方1次元の非線形シュレディンガー方程式ではコラプスは起きない(図2.19 バツ印)。これより、(2.152)-(2.154)の結合方程式はコラプス現象に対しても2次元非線形シュレディンガー方程式と定性的に一致していることがわかる。

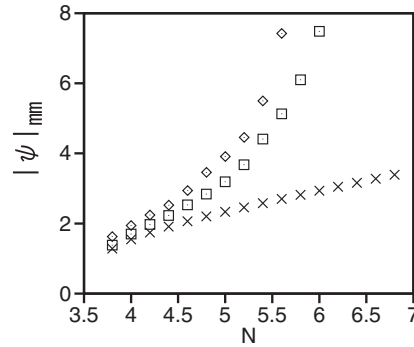


図 2.19: ピークの振幅とノルムの関係、菱形:2次元非線形シュレディンガー方程式、四角:(2.152)-(2.154)、バツ印:1次元非線形シュレディンガー方程式

x 方向のブリーザー運動による変調不安定性の抑制

2次元非線形方程式 (2.139) には y 方向に一樣で x 方向にブリーザー運動する解が存在する。この x 方向のブリーザー運動による y 方向の変調不安定性への影響を考察する。 y 方向の変調不安定性のための初期条件として

$$\phi(x, y, t) = (2\alpha_1/\pi)^{1/4} e^{-\alpha_1 x^2} A_0 (1 + \delta \cos ky) \quad (2.167)$$

を用い、2次元非線形シュレディンガー方程式 (2.139) で時間発展させる。ここでの α は定常解 α_0 から外れた値をととする。このような初期条件はトラップ振動数を Ω から Ω' 変えた系の基底状態として得られる。 Ω' を急にもとの状態 Ω に戻した場合、ポテンシャル $(1/2)\Omega^2 x^2$ 内でブリーザー運動を起こす。

$\delta = 0$ で y 方向に対して一樣であれば α_1 は α_0 からずれているとするとここです x 方向にブリーザー運動が生じる。方程式 (2.152) - (2.154) を x 方向のブリーザー解に対する変調不安定性の理解のために用いる。(2.152) - (2.154) を改めて書くと

$$\frac{d\alpha}{dt} = 4\alpha\beta \quad (2.168)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = 2(\beta^2 - \alpha^2) + \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} \frac{N_{2y}}{N_y} + \frac{\Omega^2}{2} \quad (2.169)$$

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - g|\phi|^2\phi \quad (2.170)$$

$$g(t) = \sqrt{\alpha(t)/\pi} \quad (2.171)$$

である。定常解は y 方向に対し一様で、 $\theta(t)$ が

$$d\theta/dt = -g(t)A_0^2 \quad (2.172)$$

を満たす

$$\phi(y, t) = A_0 \exp[i\theta(t)] \quad (2.173)$$

である。 α の初期値 α_1 が α_0 からずれている場合、 α 、 β は周期運動を示す。(2.168) と (2.170) には保存量 H

$$H = \alpha + \frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\Omega^2}{4\alpha} - \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}A_0^2 \quad (2.174)$$

が存在する。この式より β を消去した $\alpha(t)$ だけの方程式を得ることができる。周期運動 $\alpha(t)$ は x 方向のブリーザー運動を示す。振幅 $[2\alpha(t)/\pi]^{1/4}$ 、幅 $1/\sqrt{4\alpha(t)}$ で $\alpha(t)$ の時間発展により振幅と幅も周期的に変化する。

ここで x 方向のブリーザー解の y 方向の変調不安定性を考えるために解を

$$\phi = \{A_0 + \delta B_0 \cos(ky)\} \exp[-i\theta(t)] \quad (2.175)$$

と仮定する。ここで $\delta B = \delta B_r + i\delta B_i$ と複素量である。ブリーザー運動の摂動 δB_r 、 δB_i は線形方程式に従い、

$$\frac{d\delta B_r}{dt} = (k^2/2)\delta B_i \quad (2.176)$$

$$\frac{d\delta B_i}{dt} = \{-k^2/2 + 2g(t)A_0^2\}\delta B_r \quad (2.177)$$

を得る。ここで $g(t) = \sqrt{\alpha(t)/\pi}$ で与えられる。この2つの方程式は

$$\frac{d^2 \delta B_r}{dt^2} = (k^2/4) \{-k^2 + 4g(t)A_0^2\} \delta B_r \quad (2.178)$$

となる。この方程式は係数が周期的に変化するヒル方程式に似ている。 $g(t)$ が時間に対して一定であれば、変調不安定性は $k^2 < 4gA_0^2$ で起こる。しかし時間周期係数 $g(t)$ の振幅や周期により変調不安定性は変化する。系が不安定な時は摂動 $|\delta B_r|$ は $\exp(\lambda t)$, $\lambda > 0$ のように増加する。非線形パラメータは

$$g(t) = \sqrt{\alpha(t)/\pi} \quad (2.179)$$

のように、(2.168),(2.170) と初期条件 $\alpha(0) = \alpha_1, \beta(0) = 0$ により決まる。(2.168) と (2.178) により決定される成長係数 λ のシミュレーションの結果が図 2.20(a) である。

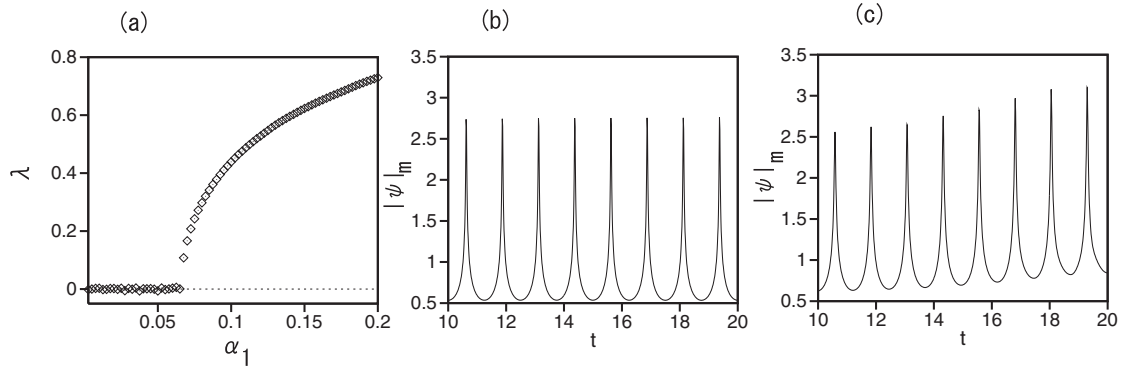


図 2.20: (a) 安定性指数 λ と α の関係、(b) 振幅のピーク $|\phi|_m = [\alpha(t)/\pi]^{1/4}, \alpha(0) = 0.05$ の時間発展 ((2.152)-(2.154) より)、(c) 振幅のピーク $|\phi|_m = [\alpha(t)/\pi]^{1/4}, \alpha(0) = 0.08$ の時間発展

図 2.20(a) は $A_0^2 = 1.6$ での λ と α_1 の関係を示す。 $y = 4$ でノルムは

$$N = A_0^2 L_y = 6.4 \quad (2.180)$$

である。このノルムは2次元非線形シュレディンガー方程式のコラプスの閾値を越えている。 $\alpha_1 < 0.065$ で $\lambda = 0$ となっている。これは y 方向の変調不安定性が x 方向のブリーザー運動によって抑制されていることを意味する。変調不安定性が抑制されるとコラプスも生じなくなる。図 2.20(b) は $\alpha(0) = 0.05$ での $y = 0$ での最大振幅

$$|\phi|_m = [2\alpha(t)/\pi]^{1/4} |\phi(y, t)| \quad (2.181)$$

の (2.152)-(2.154) での方程式の時間発展を示す。初期条件は

$$\alpha(0) = 0.05, \beta(0) = 0, \phi(y, 0) = A_0 + 0.001i \cos\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right), A_0 = \sqrt{1.6} \quad (2.182)$$

としている。最大振幅は x 方向のブリーザー運動より振動をしているが、 y 方向の変調不安定性は起こっていない。図 2.20(c) は $\alpha = 0.08$ での

$$|\phi|_m = [2\alpha(t)/\pi]^{1/4} |\phi(y, t)| \quad (2.183)$$

とした時の時間発展を示す。 y 方向の $\alpha(0)$ が閾値 0.065 より大きいので y 方向で変調不安定性を起こしていることが分かる。振幅のピーク $|\phi|_m$ は振動し、振動の振幅が増幅していることがわかる。初期条件 α_1 が α_0 からわずかしき離れていない場合 x 方向のブリーザー運動は式 (2.168)(2.170) でよく記述される。しかしながら α_1 が α_0 からかなり離れている場合には2つの α, β のパラメータによる近似は悪くなりブリーザー運動はより複雑になる。ここで2次元非線形シュレディンガー方程式にもどり y 方向に一定で、 x 方向に一般的な形をした解 $\phi = A_0 u(x, t)$ を仮定する。 $u(x, t)$ は1次元非線形シュレディンガー方程式

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A_0^2 |u|^2 u + \frac{1}{2} \Omega^2 x^2 u \quad (2.184)$$

を満たし、 A_0 は一定の振幅で

$$N_x = \int |u|^2 dx = 1 \quad (2.185)$$

と仮定することができる。(2.184)での $u(x, t)$ の初期条件は

$$u(x, 0) = (2\alpha_1/\pi)^{1/4} e^{-\alpha_1 x^2} \quad (2.186)$$

とした。 α_1 が小さい時は複雑なブリーザー運動を示す。

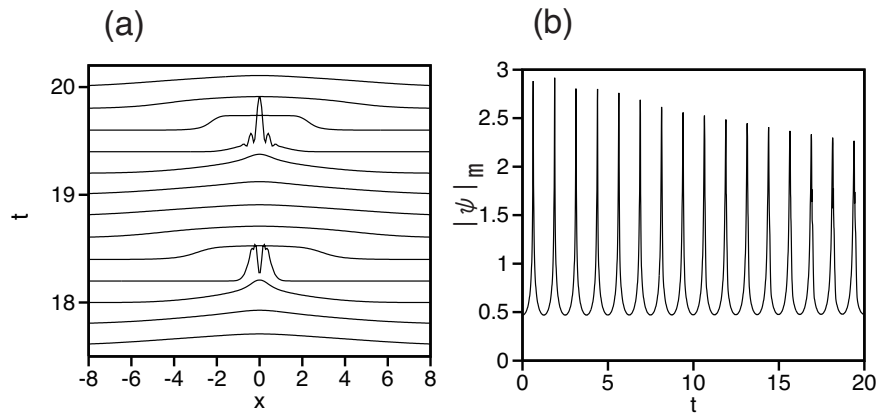


図 2.21: (a) $|u_x|$ の時間発展 (2.184)、(b) 振幅のピーク $A_0|u|_m$ の時間発展 (2.184)

図 2.21(a) は $\alpha_1 = 0.03$ で $|u(x, t)|$ の時間発展を示す。 $|u|$ はブリーザー運動を示すが、その形はガウス関数では近似することはできない。図 2.21(b) は $A_0 = \sqrt{1.6}, \alpha_1 = 0.03$ の x 方向の 1 次元非線形シュレディンガー方程式 (2.184) での振幅のピーク

$$|\phi|_m = |u_m| A_0 \quad (2.187)$$

の時間発展を示す。 $|u|_m$ は $|u|$ の最大値である。振幅のピークは周期運動を示さず $t < 20$ でゆっくりと減衰している。しかしピークの振幅は 0 には減衰せず、 $t > 50$ においても準周期的で複雑な運動を続ける。

次に x 方向のブリーザーによる変調不安定性について考える。(2.139) の解を

$$\phi = u(x, t) A_0 \delta C(x, t) \cos(ky) \quad (2.188)$$

と仮定すると、 δC は線形方程式

$$i \frac{\partial \delta C}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta C}{\partial x^2} - \frac{k^2}{2} \delta C - 2A_0^2 |u|^2 \delta C - A_0^2 u^2 \delta C^* + \frac{1}{2} \Omega^2 x^2 \delta C \quad (2.189)$$

を満たす。 δC の線形成長レート λ は (2.184) の u で決まる。図 2.22(a) は λ と α_1 の関係を示す。この関係は (2.168) と (2.178) の図 2.21(a) と類似しているが臨界値はより小さい。

$$\alpha_1 < \alpha_{1c} = 0.034 \quad (2.190)$$

で λ は 0 になる。これは x 方向のブリーザー運動がガウス関数近似できない場合でも変調不安定性が抑制されることを表している。図 2.22(b) は臨界値 α_{1c} とノルムの関数 $N = A_0^2 L_y$ の関係を示し、ノルムが増加すると臨界値が減少することが分かる。

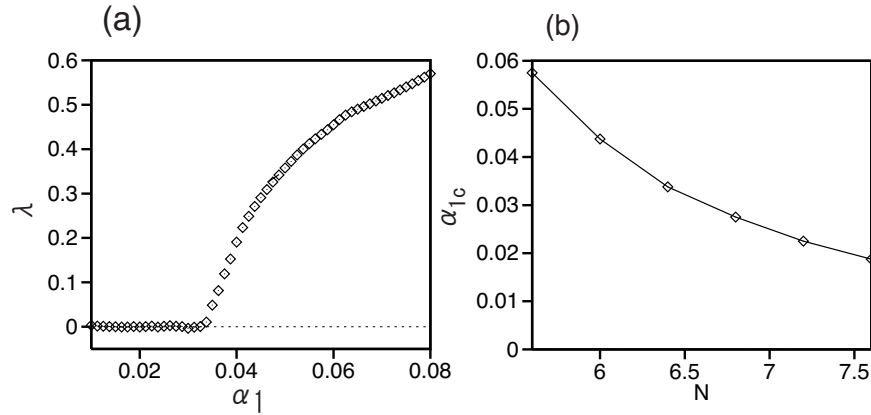


図 2.22: (a) 安定性指数 λ と (2.189) の関数 α_1 との関係、(b) 閾値 α_{1m} と変調不安定性 ((2.189) から計算されたノルム N) との関係

さらに 2次元非線形シュレディンガー方程式 (2.139) の直接計算を行い x 方向のブリーザー運動による変調不安定性の抑制を確認する。図 2.22(a) は最大振幅 $|\phi|_m$ の時間発展を示す。この時の初期条件は

$$\phi(x, y, 0) = \{\sqrt{1.6} + 0.001i \cos(2\pi y/Ly)\}(2\alpha_1\pi)^{1/4} e^{-\alpha_1 x} \quad (2.191)$$

で $\alpha_1 = 0.03$ とする。最大振幅は $0 < t < 20$ で減衰振動し、図 2.22(b) と同じ結果が得られている。この結果は摂動は y 方向には成長せず、変調不安定性は y 方向には起こらないことを示している。図 (b) は $\alpha_1 = 0.03$ での摂動の振幅の時間発展

$$\Delta = \left| \int \phi(x, y, t) \cos(2\pi y/L_y) dx dy \right| \quad (2.192)$$

を示す。この結果は x 方向のブリーザー運動による変調不安定性が抑制されたことを示している。これは 2次元非線形シュレディンガー方程式の初期条件が適切に選ばれていればノルムが閾値を超えていてもコラプスが回避できることを示している。。

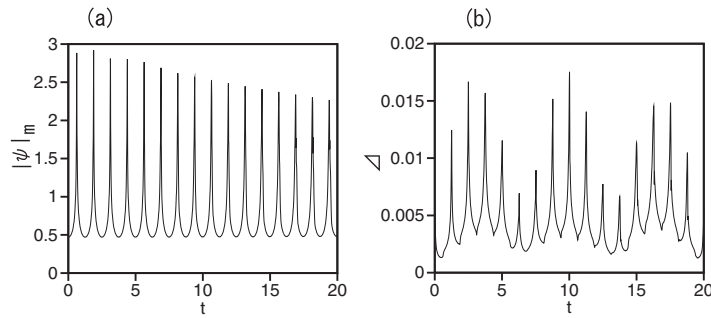


図 2.23: (a) 振幅のピーク $|\phi|_m$ の時間発展, $\alpha_1 = 0.03$ (b) 摂動 (2次元非線形シュレディンガー方程式 (2.139)) の振幅の時間発展

2.3.2 チャネル形ポテンシャル

次にソリトンの時に考えてきたようなチャネル形（溝形）ポテンシャルでの変調不安定性について考える。チャネル形ポテンシャルを含む2次元非線形シュレディンガー方程式は

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nabla^2\phi - |\phi|^2\phi + U(x,y)\phi \quad (2.193)$$

である。ここでチャネル形ポテンシャルの一番シンプル形であるまっすぐ進む場合について考える。ポテンシャルは $U(x,y) = -U_0, -x_0 < x < x_0$ で、その他の領域は $U(x,y) = 0$ である。ポテンシャルの幅: $2x_0$ でポテンシャルの深さ: U_0 である。初期条件を ϕ を

$$\phi(x,y,0) = A_0 u_x (1 - \alpha_m \cos(ky)) \quad (2.194)$$

として2次元非線形シュレディンガー方程式で時間発展させる。ここで $u_x = \exp(-(x^2/x_0)^2)$ とし y 方向には振幅の変調 α_m を与える。図2.24は振幅のピークの時間発展を示し、それぞれ変調振幅 α_m (a):0.1, (b):0.01, (c):0.35 で、ポテンシャルの深さ $U_0 = 5$, 幅 $x_0 = 0.5$, ノルム $\iint \phi dx dy = 12.73$ でパルス1つあたりのノルムはおおよそ4.24ある。

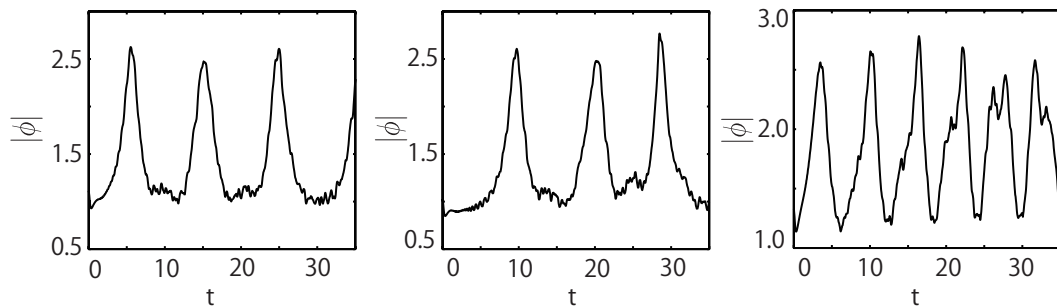


図 2.24: パルスの振幅のピークの時間発展 (a) $\alpha_m = 0.1$ 、(b) $\alpha_m = 0.01$ 、(c) $\alpha_m =$

これより1次元の場合と同様にパルスの生成・消滅が起こっていることが分かる。しかし1次元でのパルスの生成・消滅がおこる変調振幅の範囲は $0.01 < \alpha_m < 0.25$ であるが、2次元系ではこれより広い範囲でパルスの生成・消滅が起こる。

次にチャンネル型ポテンシャルの深さ U_0 、幅 x_0 を変える。図2.25(a) はポテンシャルの幅をより広くした場合で、 $x_0 = 1$ である。ポテンシャルを広くした場合は振幅のピークは小さくなり、パルスの生成・消滅のサイクルの周期は大きくなる。ポテンシャルの幅を広くしていくとブリーザー運動が起こらなくなる。図2.25(b) はポテンシャルの深さを $U_0 = 10$ 、図2.25(c) はポテンシャルの深さ $U_0 = 25$ でこの時のポテンシャルの幅 $x_0 = 0.5$ である。ポテンシャルを深さをより深くすると、x 方向のブリーザー運動の周期が短くなることがわかる。

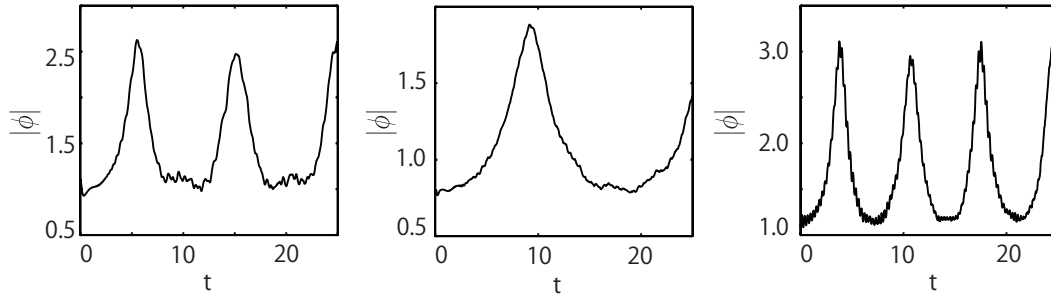


図2.25: チャンネルの深さ U_0 、幅 x_0 を変えた時のパルスのピークの時間発展 (a) $U_0 = 5, x_0 = 0.5$ 、(b) $U_0 = 10, x_0 = 0.5$ 、(c) $U_0 = 25, x_0 = 0.5$

次に1次元非線形シュレディンガー方程式

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + g |\phi|^2 \phi \quad (2.195)$$

で初期条件を

$$\phi(x, 0) = A_{1D}(1 - \alpha_m \cos(kx)) \quad (2.196)$$

の時間発展を調べる。ここでの A_{1D} 、 α_m は2次元での数値計算の条件と同じで $A_{1D} = 0.82, \alpha_m = 0.1$ である。また非線形パラメータ g の値は2次元非線形シュレディンガー方程式の ϕ より

$$g = \iint |\phi|^4 dx dy / \iint |\phi|^2 dx dy \quad (2.197)$$

より見積もられ $g \sim 0.42$ である。図2.26(b)は振幅のピークの時間発展を示す。図2.26(a)は比較のための2次元非線形シュレディンガー方程式での $U_0 = 5, x_0 = 0.5$ の時の振幅のピークの時間発展を示す。この場合では、振幅のピークの増幅は近い値を取るが、ブリーザー運動の周期は2次元は1次元に比べ長い。ポテンシャルの深さをより深くすると、1次元での場合より振幅ピークの増幅は大きくなり、ブリーザー運動の周期は短くなる。ポテンシャルの深さをより深くすると x 方向の変調不安定性は増幅しピークの振幅は大きくなる。ただしポテンシャルの壁の影響には限度があり図2.25(c)と図2.26(c)を比較すると振幅のピークの増幅やブリーザー運動の周期はほぼ変わらない。チャンネル型ポテンシャルのポテンシャルの深さ U_0 や幅 x_0 を変えることで2次元圧縮をある程度制御できることがわかる。

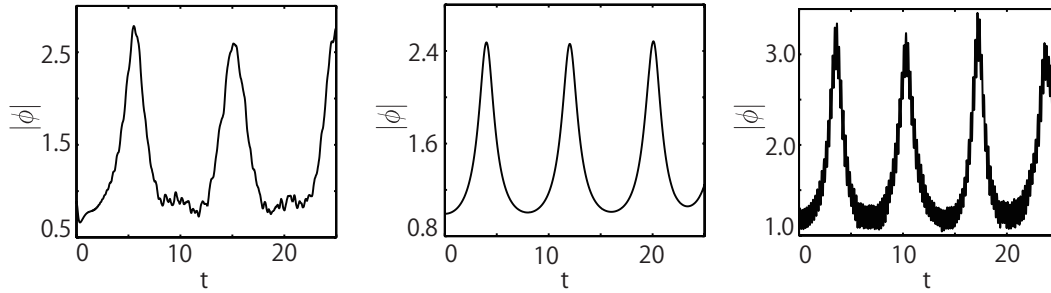


図2.26: 1次元、2次元非線形シュレディンガー方程式での増幅の比較 (a)2次元,(b)1次元、ポテンシャルの深さの限界 (c) $U_0 = 50, x_0 = 1$

第3章 総括

本研究では、チャンネル型ポテンシャルを持つ非線形シュレディンガー方程式のソリトンや変調不安定性とブリーザーの数値計算や近似計算を行い、以下の結果を得た。

(1) ソリトン

A) 狭まっていくポテンシャル

ソリトンは反射・透過する。ポテンシャルがだんだんと狭くなっていくにつれて、ソリトンの速度は遅くなり振幅は大きくなっていく。ソリトンに与える初期速度が大きいと通過し小さいと通過せずに反射する。この場合の初期波数の閾値は $k_c = 0.76$ となる。非線形シュレディンガー方程式に対するラグランジアンによる近似計算を行い、有効ポテンシャル内のニュートンの運動方程式を導出した。その結果数値計算と近似計算の結果とよく一致していることがわかった。

B) 分岐するポテンシャル

ソリトンは反射・分裂する。ソリトンに与える初期波数が大きいとソリトンは伝播しながら2つに分裂する。初期速度が小さいとソリトンは反射する。また非線形シュレディンガー方程式に対するラグランジアンによる変分法により、分裂するプロセスの考察を行った。ポテンシャル深さをうまく設定することで初期波数が小さい場合でもチャンネルの分岐にそって分裂することができる。

C) 直角に曲がるポテンシャル

曲率が大きい場合はソリトンは通過し、小さい場合はソリトンは反射する。またその中間の値ではソリトンは曲がり角から抜け出せなくなり、カオス散乱のような運動をする。非線形シュレディンガー方程式に対するラグランジアンによる近似計算で、数値計算と同様な結果を得た。

D) 分岐・再結合するポテンシャル

ソリトンの重心は合流点付近からジグザグ振動が得られる。このジグザグ振動は位相シフトを大きくすると大きくなるが周期は変化しない。また初期速度を小さい場合、合流点の前でソリトンは反射する。非線形シュレディンガー方程式に対するラグランジアンによる近似計算この現象について考察を行った。

(2) 変調不安定性とブリーザー運動

A) 調和振動子型ポテンシャル

2次元圧縮のために、2次元でのブリーザー運動は1次元の場合に比べより増幅される。またx方向のブリーザー運動によるy方向への変調不安定性への影響は変調不安定性抑制を示し、初期条件が適切に設定されていればノルムの閾値を超えてもコラプスを回避していることを示している。

B) チャンネル型ポテンシャル

1次元でのブリーザー運動の場合より広く変調振幅の値を取ることができる。また、チャンネルの幅を広くしていくと増幅は小さく、ブリーザーの周期は大きくなっていきやがてブリーザー運動を起こさなくなる。チャンネルの深さを深くしていくと限度はあるものの増幅やブリーザーの周期は大きくなっていく。

以上より、さまざまな形のチャンネル型ポテンシャル内でのソリトンの運動や1次元ポテンシャルにトラップされた2次元非線形シュレディンガー方程式の変調不安定性について理解することができた。

参考文献

1. N. Akhmediev and V. J. Korneev : Theor. Math. Phys. 69, 1089 (1986)
2. D. H. Peregrine : J. Australian Math. Soc. Ser. B 25,16 (1983)
3. B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, F. Dias, G. Genty, N. Akhmediev, J.M. Dudley : Nature Physics 6 (10): 790—795. (2010)
4. J. Scott Russell : 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science. Vol. 311. (1844)
5. A Hasegawa, F Tappert : Appl. Phys. Lett. 23, 142 (1973)
6. S. V. Manakov, Sov. Phys. JETP38, 248—253 (1974)
7. Emplit, Philippe, et al. : Optics communications 62.6 374-379. (1987)
8. Mitschke, Fedor M., and Linn F. Mollenauer. : U.S. Patent No. 4,730,105. 8 Mar. 1988
9. Zyskind, J. L., et al. : Electronics Letters 27 2148-2149. (1991)
10. Hansen, Peter Bukhave, et al. Electronics Letters 34 1136-1137. (1998)
11. S. T. Cundiff,;B. C. Collings, N. N. Akhmediev, J. M. Soto-Crespo, K. Bergman, W. H. Knox, Physical Review Letters 82 : 3988. (1999)
12. D. Y.Tang, H. Zhang, L. M. Zhao, X. Wu, Physical Review Letters 101 153904. (2008)
13. J.E. Bjorkholm, A. Ashkin, Phys. Rev. Lett. 32 129 (1974)
14. A. Barthelemy, S. Maneuf and C. Froehly, Opt. Comm. 55 201 (1985)
15. M. Peccianti, C. Conti, G. Assanto , A. De Luca, and C. Umeton : Nature, 432(7018), 733-737. (2004)

16. J.S. Aitchison et al. : Electron. Lett. 28 (20): 1879 (1992)
17. J. Beeckman, K. Neyts, X. Hutsebaut, C. Cambournac, M. Haelterman (2004) : Opt. Express 12 (6): 1011—1018
18. Anderson, Mike H., et al. Science 269.5221 198-201. (1995)
19. Davis, K. B., et al. : Physical Review Letters 75 (1995): 3969.
20. H. Sakaguchi and H.Tkeshita, J. Phys. Soc. Jpn. 77.054003 (2008) 21.
B.Eckhardt : Physica D 33 89 (1988)
22. M.W. Jack, M. J. Collet, and D. F. Walls : Phys. Rev. A 54 R4625 (1986)
23. H. Sakaguchi and B.A.Malomed : Phys. Rev. E 83 036608 (2011)
24. J. M. Dudley, G. Genty, F. Dias, B. Kibler, and N. Akhmediev : Optics Express 17, 21497 (2009)
25. Y. S. Kivshar and D. M. Pelinovsky : Phys. Rep. 331, 117 (2000)
26. B. A. Malomed : Progress in Optics 43, 69 (2002)
27. D. J. Kaup and T. I. Iakota, J. Math : Phys. 37 3442 (1996)
28. T. Kapitula, P. G. Kevrekidis, and B. A. Malomed : Phys. Rev. E 63, 036604 (2001)
29. I. E. Papacharalampous, P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed, and D. J. Frantzeskakis : Phys. Rev. E 68, 046604 (2003)
30. C. Chong, D. E. Pelinovsky, and G. Schneider : Physica D 241, 115 (2011)
31. B. A. Malomed, D. J. Kaup, and R. A. Van Gorder : Phys. Rev. E - bf 85, 026604 (2012)
32. L. P. Pitaevskii : Phys. Lett. A 211, 14 (1986)
33. T. Tsurumi and M. Wadati : J. Phys. Soc. Jpn. 66, 3035 (1997)
34. H. Sakaguchi, Y. Kageyama, J. Phys. Soc. Jpn. 79.113002 (2010)
35. Y. Kageyama, H. Sakaguchi, J. Phys. Soc. Jpn. 81.033001 (2012)
36. H. Sakaguchi, Y. Kageyama, Physical Review E, 88(5), 053203. (2013)
37. G.P. Agrawal 著 小田垣孝 山田興一 共訳「非線形ファイバー光学」原書第2版

38. 山本杲也 著 「光ファイバ通信技術」

39. Linn F. Mollenauer , James P. Gordon : Solitons in Optical Fibers

謝辞

本研究を進めるに当たり、多くの方からのご指導、ご支援を受けたことに深く感謝致します。研究をすすめるにあたり適切な方針やアドバイスなどご指導していただいた坂口英継先生、ゼミ以外でもご指導していただいた本庄春雄先生本当にありがとうございました。

そして同じ研究室でお世話になった皆様には楽しく研究できたことに感謝しております。

本論文審査にあたり、芸術工学研究院 コミュニケーションデザイン科学部門河辺哲次先生と大気海洋環境システム学専攻岡村誠先生からお忙しい中多大なるアドバイスを頂いたことに感謝申し上げます。