

波動関数展開に基づいた散乱音場の準理論解析手法

木田, 佳孝

<https://doi.org/10.15017/1441244>

出版情報：九州大学, 2013, 博士（工学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：全文ファイル公表済



波動関数展開に基づいた散乱音場の準理論解析手法

Semi-analytical methods based on wave function expansion
for calculating acoustic scattering

木田 佳孝

Yoshitaka Kida

2014年3月

目次

第 1 章	序論	1
1.1	研究の背景	1
1.2	本研究の目的	3
1.3	本論文の構成	5
第 2 章	音場の基礎方程式	9
2.1	音場の基礎方程式	9
2.2	音場の積分方程式	10
2.2.1	音場の境界条件	10
2.2.2	Kirchhoff–Huygens の公式	11
2.3	境界要素法	13
2.4	各種座標系における音場の波動関数	19
2.4.1	デカルト座標系における一般解	19
2.4.2	球座標系における一般解	20
2.4.3	楕円体座標系における一般解	22
第 3 章	球波動関数と最小二乗法を用いた散乱音場の準理論解析手法	27
3.1	提案解析手法	27
3.1.1	問題設定	27
3.1.2	定式化	27
3.2	数値計算例	30
3.2.1	障害物の遠方における散乱波の指向特性	31
3.2.2	障害物の近傍における散乱波の指向特性	33
3.2.3	散乱波の周波数応答関数	35
3.3	計算コスト	37
3.4	まとめ	37
第 4 章	球波動関数と Kirchhoff–Huygens の公式を用いた散乱音場の準理論解析手法	39
4.1	提案解析手法	39
4.1.1	問題設定	39

4.1.2	定式化	39
4.2	数値計算例	42
4.2.1	散乱波の指向特性	42
4.2.2	障害物近傍に関する検証	47
4.2.3	障害物のアスペクト比に関する検証	49
4.2.4	散乱波の周波数応答関数	56
4.2.5	計算コスト	57
4.3	まとめ	60
第 5 章	多重極再展開を用いた多重散乱音場の準理論解析手法	61
5.1	提案解析手法	61
5.1.1	問題設定	61
5.1.2	定式化	62
5.2	数値計算例	67
5.2.1	散乱波の周波数応答関数	69
5.2.2	計算結果の収束に関する検証	70
5.2.3	障害物近傍に関する検証	73
5.2.4	障害物間の距離に関する検証	75
5.2.5	障害物の寸法が異なる場合についての検証	77
5.2.6	障害物の個数に関する検証	77
5.2.7	計算コスト	82
5.3	まとめ	86
第 6 章	楕円体波動関数と Kirchhoff-Huygens の公式を用いた散乱音場の準理論解析手法	87
6.1	提案解析手法	87
6.1.1	問題設定	87
6.1.2	定式化	88
6.2	数値計算例	90
6.2.1	扁平な有限長円筒による散乱音場の解析	91
6.2.2	正方形板形状の障害物による散乱音場の解析	97
6.2.3	長方形板形状の障害物による散乱音場の解析	101
6.2.4	計算コスト	103
6.3	まとめ	104
第 7 章	楕円体波動関数と最小二乗法を用いた薄板による散乱音場の準理論解析手法	105
7.1	提案解析手法	105
7.1.1	問題設定	105
7.1.2	定式化	105
7.2	数値計算例	108

7.2.1	正方形の薄板による散乱音場の解析	109
7.2.2	長方形の薄板による散乱音場の解析	113
7.2.3	重み係数の設定に関する検証	116
7.3	まとめ	120
第 8 章	結論	121
付録 A	楕円体波動関数ソースコード	127
参考文献		147
謝辞		151

第 1 章

序論

本章ではまず、本研究の背景について述べる。次に音響分野で用いられている代表的な数値解析手法の概要についてまとめ、それぞれの手法が持つ特徴について整理する。また、それらをふまえて本研究の位置づけと目的を述べ、本論文の構成に沿って実施内容と取り組むべき課題を挙げる。

1.1 研究の背景

近年、ものづくりにおける設計や開発に対して数値解析手法が積極的に用いられており、工学分野全般において数値解析手法の研究・開発の重要性が増している [1]。音響分野においても音環境の設計や音響機器の開発に対し、波動音響理論に基づいた数値解析手法（以下、波動音響数値解析手法と呼ぶ）が活用されている [2, 3]。音場の予測・解析に対し、理論解析解が得られている境界条件等は限られているため [4]、実際の音場と同等の境界条件について解析したい場合には、このような波動音響数値解析手法を利用する必要がある。一般的にこれらの波動音響数値解析手法は、計算力学分野全般において適用される汎用的な離散化手法によって音場の支配方程式を離散化し、音の波動的な振る舞いを予測する手法であるといえる。そのため、建築音響分野で広く用いられている、虚像法 (image source method) や音線法 (ray-tracing method) に代表されるような幾何音響学に基づいた解析手法 [5] とは異なる。また、代表的な波動音響数値解析手法としては、時間領域に対する手法として有限差分法、周波数領域に対する手法として有限要素法および境界要素法が挙げられる。いずれの手法も Fig. 1.1 のように、解析対象となる音場領域または境界面を小さな領域に分割することで解く解析手法であり、分割された領域または境界面のそれぞれは要素、またはセルといい、それらの集合はメッシュと呼ばれる。以下でそれぞれの波動音響数値解析手法の特徴について述べる。

有限差分法

有限差分法 (Finite Difference Method, 以下 FDM と記す) は、微分方程式における微分演算子を差分で置き換え、差分格子点の諸量に関する代数方程式に帰着させて解く方法である。音響分野においては音場の初期状態からの過渡的な現象の推移を時間発展的に解く時間領域解法とし

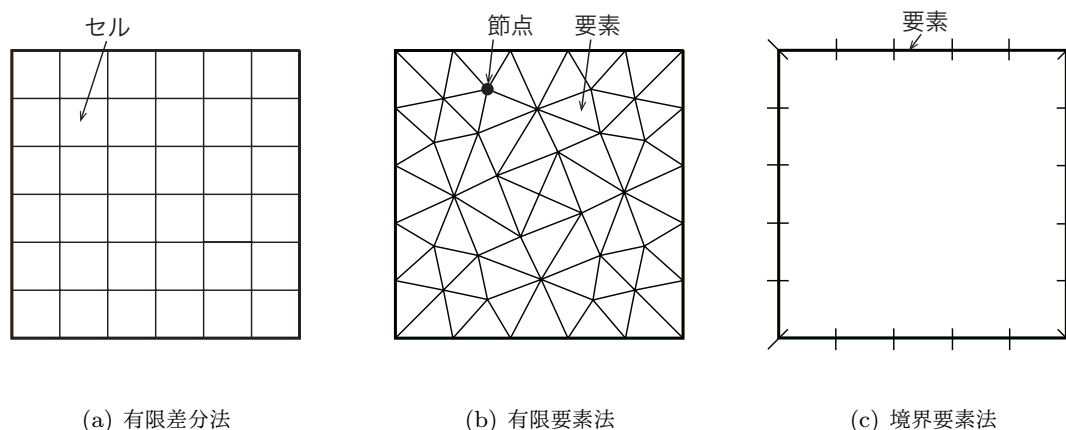


Fig. 1.1 各種手法による要素分割例

てよく用いられ、そのような差分法は特に時間領域有限差分法（Finite Difference Time Domain Method, 以下 FDTD と記す）と呼ばれる。FDTD では連続の式と運動方程式における微分項を差分に置き換え、逐次時間積分を行う。そのため、音響伝搬系を表すマトリクスなどが不要であり、比較的少ない計算機資源で解析が可能である。一方で、基本的に直交直線格子を前提とするため、不整形室などの複雑形状の解析に工夫を要することなどが短所として挙げられる。そこで、2次元音場における不整形室の解析において、直交格子ではなく一般座標系を用いた FDTD が提案されている [7]。

有限要素法

有限要素法（Finite Element Method, 以下 FEM と記す）では、解析対象となる音場の空間全体を有限個の要素に分割し、それぞれの要素ごとに定義された節点を用いて音場を表現する。そのため、自由度は音場の空間全体の大きさに依存する。FEM では、系の振る舞いは質量マトリクスおよび剛性マトリクスによって記述され、これらのマトリクスに関する固有値問題を解くことでモード解析を行うことができるという特徴がある [8]。また、その自由度に関しては、前述のとおり FEM では解析対象の音場空間全体を要素分割する必要があることから、解析に必要とする自由度は大きくなりがちであるが、質量マトリクス等が疎行列であることから、それらの性質を用いて並列化・ベクトル化が比較的容易であり、計算の高速化が可能となる。FEM において開領域を扱うためには無反射境界 [9] を導入するなどの工夫が必要であり、閉領域への適用が主となる。

境界要素法

境界要素法（Boundary Element Method, 以下 BEM と記す）では、波動方程式を解析対象となる領域の境界面における積分方程式に帰着させ、境界面のみを要素分割することにより音場を表現する。そのため BEM では FEM とは異なり音場の境界面のみを要素分割すればよいことから、扱う問題の次元が下がること、開領域を扱うために特別な処理や境界条件等が不要であることが特

徴として挙げられる。このとき、解析に必要な自由度に関しても FEM などと比較して低減されるものの、系の振る舞いを表すマトリクスが密行列となることから行列計算に要する演算量が大きく、計算機負荷の面で他手法と比較して必ずしも有利とはいえない。そこで、計算効率の向上を目的として、高速多重極境界要素法 (Fast Multipole Boundary Element Method:FMBEM) が提案されている [10]。これは、自由度の大きなポテンシャル問題の解法である高速多重極アルゴリズム (Fast Multipole Algorithm:FMM) [11] を BEM に導入したものであり、大規模空間への適用が進められている [12,13]。

BEM は本研究の数値計算例において提案手法との比較対象として用いるため、その詳細を第 2 章にあらためて記す。

以上のような波動音響数値解析手法が音響分野に適用され、音環境や予測や音響機器の設計などの実務に役立てられている。また、今後の計算機資源のさらなる充実や、波動音響数値解析手法自体の研究・開発より、実務への適用はますます進むと予想される。

1.2 本研究の目的

これまでも前節で述べた 3 種の波動音響数値解析手法を用いた数多くの解析例が報告されており、今後もこれらの手法の実務への適用はますます進むと予想される。また、これらの波動音響数値解析手法を用いて、SYSNOISE [14] や WAON [15] といった商用アプリケーションが開発され、実務に役立てられている。

一方で、今ある計算機資源をより有効に活用するためには、新たな解析手法について研究することも重要である。音場解析にまず求められることは、設計段階における音場の基本的な特徴の把握や本質的な物理現象の理解であり、このとき解析対象の音場を厳密にモデル化するのではなく、単純化したモデルについて解析すれば十分な結果が得られることも多い。また、モデルが単純化されることで、計算機に頼らず理論的に解析を進められる部分が存在するような場合には、計算コストを低減することができる可能性がある。このような場合に対しても前述の波動音響数値解析手法を用いるのは、計算機資源の有効利用という観点からすれば、解析対象のモデルに対して計算コストが大きすぎる場合がある。そのため、解析対象のモデルに応じて適切な解析手法を選択する必要があるともいえる。

そこで、 T -マトリクス法 [6] をはじめとした、準理論解析手法 (準解析的・半解析的とも呼ばれる) が研究されている。準理論解析手法は、音場を

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_n A_n \phi_n(\mathbf{r}) \quad (1.1)$$

のように波動関数系 ϕ_n と未知の展開係数 A_n を用いた展開表現で表し、展開係数 A_n については

何らかの方法で境界条件を適用することで

$$\begin{bmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} & \cdots & L_{1,N} \\ L_{2,1} & L_{2,2} & \cdots & L_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{N,1} & L_{N,2} & \cdots & L_{N,N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_N \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

のような、展開係数 A_n を未知数としたマトリクス方程式に帰着させることで数値的に求める解析手法である。そのため、準理論解析手法は

- 基本的には、前述した波動音響数値解析手法のような音場の離散化を必要としない
- 展開係数 A_n が得られてしまえば、積分計算等を必要とせず、Eq. (1.1) を用いることで理論解析解のように観測点の速度ポテンシャル等を求めることができる

といったような特徴を持つ。このような準理論解析手法のひとつとして、2次元音場における比較的単純な形状の障害物による音響散乱問題の解析に対して境界展開法が提案されており、対称な障害物による音響散乱問題に対しては、境界展開法を用いて解析するほうがBEMを用いて解析するよりも計算コストの面で優位であることが示されている [16]。また、3次元音場においても障害物形状が有限長円筒や楕円球である場合に対し、準理論解析手法を用いた解析が行われている [17–20]。一般的に、以上で述べたような準理論解析手法は、BEMと比べて少ない未知数で十分な解析結果を得ることが可能であるといわれている [18]。そのため、扱う障害物形状によってはBEMと比較して計算コストを低減することができ、限られた計算機資源を有効に活用できる可能性がある。

また、一般的なBEMを用いて障害物による散乱音場を解析する際に、解の非一意性により特定の周波数において精度が著しく低下することが知られている [21]。これは、一般的なBEMでは境界積分方程式を解く際に境界上の速度ポテンシャルや音圧を未知量として設定していることから、解析周波数が障害物内部のDirichlet周波数と一致した場合に解を一意に求めることができないことが原因であり、数学的な問題である。この解の非一意性による精度の低下を回避するために、CHIEF法 [22] やBurton–Miller法 [23] が提案され、その有効性が示されているが、これらの手法はGreen関数の修正や法線方向微分型の境界積分方程式の導入が必要となるため、一般に計算コストが増加する傾向にある。一方で、準理論解析手法であれば、BEMのように未知量が境界上の速度ポテンシャル等ではなく、音場の展開表現に用いる波動関数の展開係数となるため、解の非一意性を回避できると考えられる。

そこで、本研究では音場の予測・解析の具体例として、基礎的な音響問題の一つである障害物による散乱音場を取り上げ、その解析手法として波動関数展開に基づいた準理論解析手法を提案する。このとき、障害物形状は比較的単純であり、

- それぞれの障害物は単一の閉曲面で構成されており、区分的に滑らかである
- 境界条件は特定の座標系を用いて単純な形で表すことができ、極端な凹凸を持たない

と想定する。このような障害物形状に対し、本研究では5つの準理論解析手法を提案する。

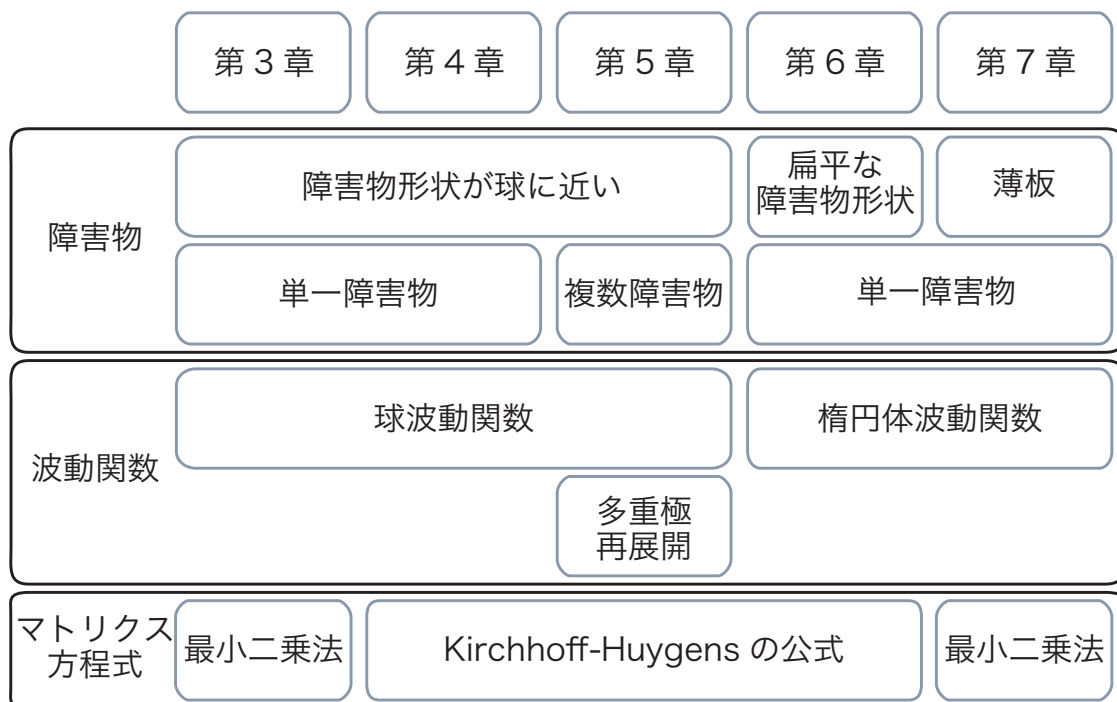


Fig. 1.2 本論文で提案する準理論解析手法

1.3 本論文の構成

本論文で提案する準理論解析手法の概要について述べる。本論文で提案する準理論解析手法はおまかに、

- 球波動関数を用いた準理論解析手法
- 楕円体波動関数を用いた準理論解析手法

の 2 種類に分類することができ、さらに、Fig. 1.2 のように分類することができる。以下では、それぞれの章において扱う内容や準理論解析手法についての概要を記す。

第 1 章

本章である。ここでは本研究の背景となる、波動音響解析手法の現状についてまとめる。また、代表的な波動音響数値解析手法である FDM, FEM および BEM の概要についてまとめ、それぞれの手法における利点や欠点について整理する。それらをふまえて、本研究の目的と本論文の構成について述べる。

第 2 章

第 2 章では、本論文中で用いる各種記号を定義し、音場の基礎関係式である波動方程式および Kirchhoff-Huygens の公式を導出する。次に、本論文の数値計算例において、比較対象として用いる BEM の概要について述べる。最後に、各種座標系における波動関数を導出し、第 3 章以降で定式化する準理論解析手法の準備を行う。

第 3 章

第 3 章では、単一の障害物による散乱音場の準理論解析手法について考える。ここで定式化する準理論解析手法では、波動関数には球波動関数を用い、展開係数については境界条件に関する二乗平均誤差を評価関数とし、そこに最小二乗法を適用することでマトリクス方程式に帰着させ数値的に求める。定式化した準理論解析手法を用いて有限長円筒による散乱音場を解析し、その数値特性について検証する。

第 4 章

第 4 章では、第 3 章と同様に単一の障害物による散乱音場を対象に、波動関数として球波動関数を用いた準理論解析手法を提案する。このとき、第 3 章とは違い、展開係数に関するマトリクス方程式を導く際に、最小二乗法ではなく、音場の積分方程式である Kirchhoff-Huygens の公式を用いる。また、第 3 章と同様に、定式化した準理論解析手法を用いて有限長円筒による散乱音場を解析し、その数値特性について検証する。

第 5 章

第 5 章では、第 4 章で定式化した手法に多重極再展開を導入することで、複数個の障害物による多重散乱音場についても解析することのできる準理論解析手法を定式化する。定式化した準理論解析手法を用いて、複数個の有限長円筒による散乱音場の解析から、その数値特性について検証する。

第 6 章

第 6 章では再び単一の障害物による散乱音場について考える。このとき、第 3 章および第 4 章で定式化した手法では、波動関数として球波動関数を用いているため、板形状のような扁平な障害物による散乱音場について解析を行うのが難しいと考えられる。そこで、第 6 章では新たに波動関数として楕円体波動関数を用いた準理論解析手法を定式化する。このとき、展開係数については第 4 章と同様に Kirchhoff-Huygens の公式を用いてマトリクス方程式に帰着させることで数値的に求める。また、定式化した準理論解析手法を用いて板形状のように扁平な障害物による散乱音場を解析し、その数値特性について検証する。

第 7 章

第 7 章では、第 6 章と同様に波動関数として楕円体波動関数を用いて、薄板による散乱音場を解析するための準理論解析手法を定式化を行う。このとき、展開係数については境界条件に関する評価関数を設定し、そこに最小二乗法を適用することでマトリクス方程式に帰着させる。定式化した準理論解析手法を用いて、薄板による散乱音場を解析し、その数値特性について検証する。

第 8 章

本研究によって得られた成果についてまとめ、残された課題について整理する。

以上が本論文の構成である。

第 2 章

音場の基礎方程式

本章ではまず、本論文中で用いる各種の記号を定義し、波動方程式をはじめとする音場の基礎方程式についてまとめる。次に、本論文中の数値計算例において使用する BEM の概要についてまとめる。最後に各種座標系における一般解を導出し、次章以降において提案する準理論解析手法の準備を行う。

2.1 音場の基礎方程式

空気中を進行する音波について考える。音は圧縮性流体における微小振動であり、音源や障害物を含んだ空間内の音波の性質を知るためには、流体理論から出発した音波の一般式を基礎としなければならない。そこでまずは、流体粒子の運動方程式を導出する。このとき、媒質の密度を ρ とすれば、流体内の微小体積 $\delta x \delta y \delta z$ に対し、その質量は $\rho \delta x \delta y \delta z$ で与えられる。この質量に対して Newton の法則を適用すれば、運動方程式は次式のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -c^2 \text{grad } s \quad (2.1)$$

ここで、 $\mathbf{V}$: 粒子速度、 s : 凝縮率である。 c は媒質中の音速であり、以下の関係式がある。

$$c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} \quad (2.2)$$

ここで、 κ : 体積弾性率である。また、単位時間あたりの体積が膨張する割合が流体の流出する割合に等しいことから、連続の式として次式が得られる。

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{V} = \text{div grad } \Phi = \nabla^2 \Phi \quad (2.3)$$

ここで、 Φ : 速度ポテンシャルであり、音圧 P および粒子速度 $\mathbf{V}$ を用いて次式で定義される。

$$P = \rho \frac{\partial}{\partial t} \Phi \quad (2.4)$$

$$\mathbf{V} = -\nabla \Phi \quad (2.5)$$

さらに、Eq. (2.1), (2.3) から、

$$-\frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \Phi = -c^2 \text{grad } s \quad (2.6)$$

すなわち、状態方程式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = c^2 s \quad (2.7)$$

が得られる。

以上の関係式を用いれば、音場の支配方程式として、

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.8)$$

が得られ、これは波動方程式と呼ばれる。また、時間因子を $\exp(-j\omega t)$ とした調和振動を仮定し、速度ポテンシャルを $\Phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) \exp(-j\omega t)$ とおけば、次の Helmholtz 方程式が得られる。

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (2.9)$$

ここで、 $k = \sqrt{\omega/c} = 2\pi f/c = 2\pi/\lambda$: 波数、 ω : 角周波数、 f : 周波数、 λ : 波長である。同様に、音圧 $P(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}) \exp(-j\omega t)$ 、粒子速度 $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \exp(-j\omega t)$ とおけば、 p 、 $\mathbf{v}$ はともに Eq. (2.9) を満たす。また Eq. (2.4), (2.5) から、関係式として次式が得られる。

$$p = -j\omega \rho \phi \quad (2.10)$$

$$\mathbf{v} = -\nabla \phi \quad (2.11)$$

本論文では Helmholtz 方程式により支配される問題を扱い、以下では、特に断りのない限り時間因子 $\exp(-j\omega t)$ を省略し、空間因子 p 、 $\mathbf{v}$ そして ϕ のそれぞれを単に音圧、粒子速度、速度ポテンシャルと呼ぶ。

2.2 音場の積分方程式

2.2.1 音場の境界条件

Fig. 2.1 に示すような解析領域 Ω について考える。その内部に観測点 $\mathbf{r}$ と音源 $\mathbf{r}_s$ が存在し、解析領域の境界全体 Γ は滑らかでかつ、剛壁境界 Γ_0 、振動境界 Γ_v 、吸音境界 Γ_z の3種類から成るものとする。ここで、吸音境界では局所作用を仮定し、境界 Γ に対する内向きの単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とする。このとき、各種境界面では次の境界条件が成り立つ。

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \in \Gamma_0 \\ -v(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in \Gamma_v \\ \frac{j\omega \rho}{Z(\mathbf{r})} \phi(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in \Gamma_z \end{cases} \quad (2.12)$$

ここで、 $\partial/\partial \mathbf{n}$: 境界面の内向き法線方向微分、 v : 法線方向振動速度（内向きを正とする）、 Z : 比音響インピーダンスである。

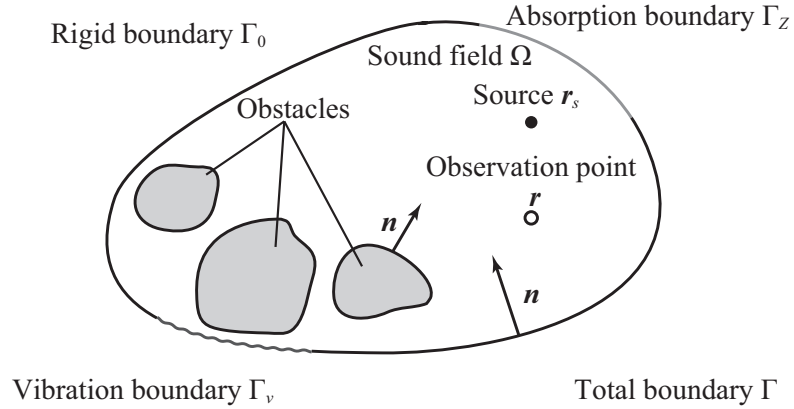


Fig. 2.1 解析対象となる音場の記号定義

2.2.2 Kirchhoff–Huygens の公式

ここでは、音場の基礎積分方程式である Kirchhoff–Huygens の公式を導出する。音場に音源が分布する場合、音源の強さの分布関数を q とすれば、次式の非同次 Helmholtz 方程式が得られる。

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = -q \quad (2.13)$$

上式に重み関数 G をかけ、領域 Ω について積分すれば、次式が得られる。

$$\iiint_{\Omega} (\nabla^2 \phi + k^2 \phi) G dV = - \iiint_{\Omega} q G dV \quad (2.14)$$

このとき、体積分と面積分の関係として、次式の Green の定理が知られている。

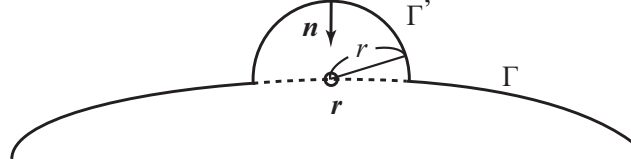
$$\iiint_{\Omega} (\mathcal{F} \nabla^2 \mathcal{G} - \mathcal{G} \nabla^2 \mathcal{F}) dV = \iint_{\Gamma} \left(\mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{n}} - \mathcal{F} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \quad (2.15)$$

Eq. (2.14) の左辺を変形し、Green の定理 Eq. (2.18) を適用すれば、

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\nabla^2 \phi + k^2 \phi) G dV &= \iiint_{\Omega} (\phi \nabla^2 G + k^2 G \phi) dV + \iiint_{\Omega} (G \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 G) dV \\ &= \iiint_{\Omega} \phi (\nabla^2 G + k^2 G) dV + \iint_{\Gamma} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} - G \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \end{aligned} \quad (2.16)$$

となる。さらに、重み関数 G として、音源の強さの分布関数 q を空間的なデルタ関数とし、非同次 Helmholtz 方程式 (2.13) を満たすものを用いる。すなわち、次式が成立するような重み関数 G である。

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.17)$$

Fig. 2.2 境界 Γ 上に観測点 $\mathbf{r}$ がある場合

この方程式の解として定義される重み関数は Green 関数と呼ばれ、3次元音場では次式のようなものがある。

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi r} e^{jkr}, \quad r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (2.18)$$

よって、Eq. (2.16) に Eq. (2.17) を適用し、整理すれば、

$$\phi(\mathbf{r}) = \iiint_{\Omega} qG dV + \iint_{\Gamma} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} - G \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \quad (2.19)$$

を得る。Eq. (2.22) は音場に関する積分方程式であり、観測点 $\mathbf{r}$ が領域 Ω 内にある場合に成り立つ関係式である。

次に、観測点 $\mathbf{r}$ が境界 Γ 上にある場合について考える。このとき、Fig. 2.2 のように観測点 $\mathbf{r}$ の周りに小さな半球面 Γ' を設けると、境界面 Γ' 上における積分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma'} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} - G \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right) dS &= \iint_{\Gamma'} \left(-\phi \frac{\partial G}{\partial r} + G \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) dS \\ &= 2\pi r^2 \left(\phi \frac{1 - jkr}{4\pi r^2} e^{jkr} + \frac{1}{4\pi r} e^{jkr} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \\ &= \phi \frac{1 - jkr}{2} e^{jkr} + \frac{r}{2} e^{jkr} \frac{\partial \phi}{\partial r} \end{aligned} \quad (2.20)$$

となる。ここで、 $\partial/\partial \mathbf{n} = -\partial/\partial r$ の関係を用いた。このとき、Eq. (2.20) において $r \rightarrow 0$ の極限を取れば、

$$\lim_{r \rightarrow 0} \iint_{\Gamma'} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} - G \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = \frac{1}{2} \phi \quad (2.21)$$

となる。

以上より、Eq. (2.19) と、Eq. (2.21) の関係をまとめると、

$$\iiint_{\Omega} qG dV + \iint_{\Gamma} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} - G \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = \begin{cases} \phi(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Omega \\ \frac{1}{2} \phi(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Gamma \end{cases} \quad (2.22)$$

となる。Eq. (2.22) は Kirchhoff–Huygens の公式と呼ばれ、定常音場解析における基礎積分方程式となる。

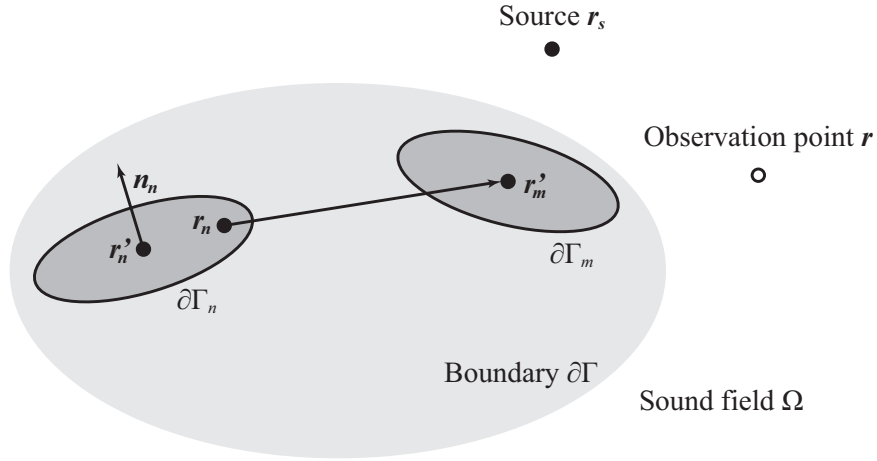


Fig. 2.3 境界要素法に関わる記号定義

2.3 境界要素法

ここでは境界要素法の概要についてまとめる。Fig. 2.3 に示すような音場について考える。Fig. 2.3 において解析領域 Ω は開領域であり、その内部に音源、観測点、障害物があるとする。また、障害物による境界を $\partial\Gamma$ とする。

まずは、境界 $\partial\Gamma$ を速度ポテンシャルおよび法線方向ベクトルの変化が十分小さく、一定とみなすことのできる N_b 個の微小な一定要素に分割する。ここで、各要素における速度ポテンシャルと法線ベクトルは、その中心座標における値で表されるものとし、 n 番目の一定要素を $\partial\Gamma_n$ 、 $n = 1, 2, \dots, N_b$ 、その中心座標を $\mathbf{r}'_n$ 、法線方向ベクトルを $\mathbf{n}_n$ と表す。

いま、観測点 $\mathbf{r}$ が m 番目の一定要素 $\partial\Gamma_m$ の中心座標 $\mathbf{r}'_m$ にあるとき、 n 番目の一定要素 $\partial\Gamma_n$ に関する積分は次式のように近似できる。

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial\Gamma_n} \left(\phi(\mathbf{r}_n) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_n}(\mathbf{r}'_m, \mathbf{r}_n) - G(\mathbf{r}'_m, \mathbf{r}_n) \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}_n}(\mathbf{r}_n) \right) dS \\ &= \iint_{\partial\Gamma_n} \phi(\mathbf{r}_n) \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_n}(\mathbf{r}'_m, \mathbf{r}_n) + a_n G(\mathbf{r}'_m, \mathbf{r}_n) \right) dS_n \\ &= \phi(\mathbf{r}'_n) \iint_{\partial\Gamma_n} \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_n}(\mathbf{r}'_m, \mathbf{r}_n) + a_n G(\mathbf{r}'_m, \mathbf{r}_n) \right) dS_n \end{aligned} \quad (2.23)$$

ここで、 $a_n = -j\omega\rho/Z(\mathbf{r}'_n)$ であり、境界条件を設定するための係数である。Eq. (2.23) から、境界積分方程式は次式のように近似される。

$$\frac{1}{2}\phi(\mathbf{r}'_m) = \iiint_{\Omega} qG dV + \sum_{n=1}^{N_b} \phi(\mathbf{r}'_n) \iint_{\partial\Gamma_n} \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_n}(\mathbf{r}'_m, \mathbf{r}_n) + a_n G(\mathbf{r}'_m, \mathbf{r}_n) \right) dS_n \quad (2.24)$$

以上より、Eq. (2.24) を整理すれば次の連立一次方程式を得る。

$$\sum_{n=1}^{N_b} \phi(\mathbf{r}'_n) \Psi_{m,n} = \phi_i(\mathbf{r}'_m, \mathbf{r}_s), \quad m = 1, 2, \dots, N_b \quad (2.25)$$

ここで,

$$\Psi_{m,n} = \frac{1}{2}\delta_{m,n} - \iint_{\partial\Gamma_n} \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_n}(\mathbf{r}'_m, \mathbf{r}_n) + a_n G(\mathbf{r}'_m, \mathbf{r}_n) \right) dS_n \quad (2.26)$$

$$\phi_i(\mathbf{r}'_m, \mathbf{r}_s) = \iiint_{\Omega} q G dV \quad (2.27)$$

とした。また, $\delta_{m,n}$ は Kronecker のデルタである。Eq. (2.25) は ϕ_n を未知数とする連立一次方程式であり, マトリクスで表現すれば次式のようなになる。

$$\begin{bmatrix} \Psi_{1,1} & \Psi_{1,2} & \cdots & \Psi_{1,m} & \cdots & \Psi_{1,N_b} \\ \Psi_{2,1} & \Psi_{2,2} & \cdots & \Psi_{2,m} & \cdots & \Psi_{2,N_b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Psi_{m,1} & \Psi_{m,2} & \cdots & \Psi_{m,m} & \cdots & \Psi_{m,N_b} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{N_b,1} & \Psi_{N_b,2} & \cdots & \Psi_{N_b,m} & \cdots & \Psi_{N_b,N_b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi(\mathbf{r}'_1) \\ \phi(\mathbf{r}'_2) \\ \vdots \\ \phi(\mathbf{r}'_m) \\ \vdots \\ \phi(\mathbf{r}'_{N_b}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_i(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_s) \\ \phi_i(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}_s) \\ \vdots \\ \phi_i(\mathbf{r}'_m, \mathbf{r}_s) \\ \vdots \\ \phi_i(\mathbf{r}'_{N_b}, \mathbf{r}_s) \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

Eq. (2.28) を解けば, 未知量であった境界上の速度ポテンシャルが得られる。また, 得られた速度ポテンシャルを次式に代入し, 積分計算を行うことで, 任意の観測点における速度ポテンシャルを求めることができる。

$$C\phi(\mathbf{r}) = \phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) + \sum_{n=1}^{N_b} \phi(\mathbf{r}'_n) \iint_{\partial\Gamma_n} \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_n}(\mathbf{r}'_m, \mathbf{r}_n) + a_n G(\mathbf{r}'_m, \mathbf{r}_n) \right) dS_n \quad (2.29)$$

$$C = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \Omega \\ \frac{1}{2}, & \mathbf{r} \in \partial\Gamma \end{cases}$$

以上のような, 音場の基礎方程式として境界積分方程式を用いた BEM は基本型 (Basic Form, 略して BF とも記す) と呼ばれる。また, 境界積分方程式 Eq. (2.22) の両辺に対し, 観測点 $\mathbf{r}$ における法線方向微分を適用した次式を基礎方程式として用い, BEM を定式化することもできる。

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)}{\partial \mathbf{n}} + \iint_{\Gamma} \left(\phi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{n}_0} - \frac{\partial \phi(\mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{n}_0} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_0 \quad (2.30)$$

Eq. (2.30) を用いて定式化した BEM は法線方向微分型 (Normal Derivative Form, 略して NDF とも記す) と呼ばれる [24]。

本論文における数値解析例において, 第 3 章～第 6 章では BF を, 第 7 章では NDF による計算結果を提案手法による計算結果との比較対象として用いる。そこで, 実装した BEM のソースコードを用いた計算結果の妥当性の確認を行う。まずは BF に基づいた BEM のソースコードの妥当性を確認するために, Fig. 2.4 に示すような, 点音源と直径 1 m の球による散乱音場における散乱波の指向特性を計算した。ここで, 音速を $c = 343.7$ [m/s], 媒質密度を $\rho = 1.205$ [kg/m³] とした。また, BEM による計算結果では 1206 個の三角形一定要素 (最大メッシュ長 $l_{max} : 0.096$ [m]) を用いた。実装したソースコードを用いて球による散乱波の指向特性を計算した結果を Fig. 2.5 に

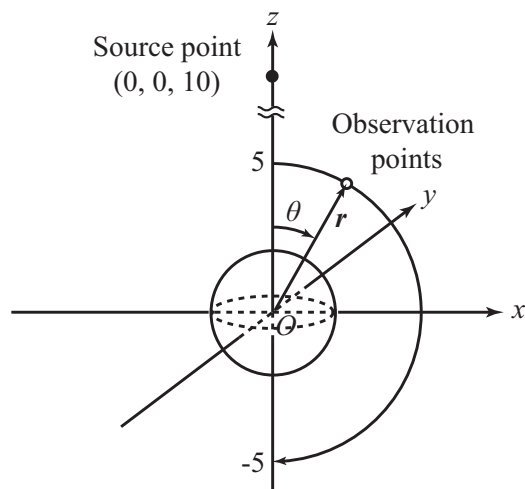
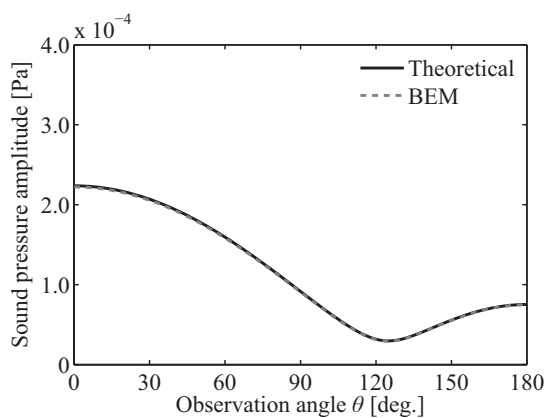
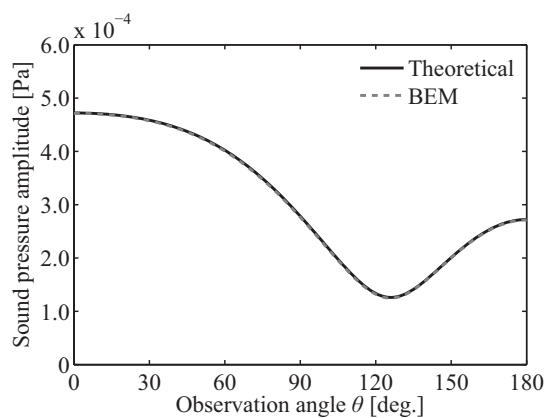


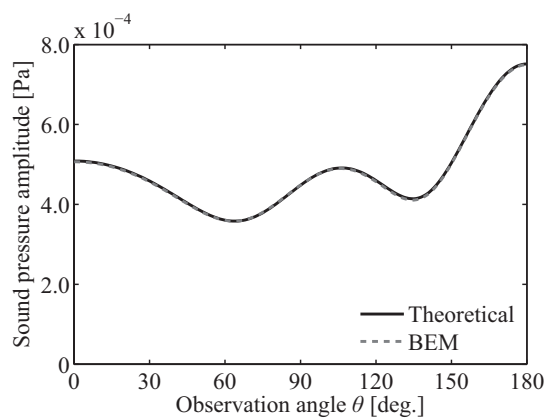
Fig. 2.4 点音源と直径 1m の球による散乱音場



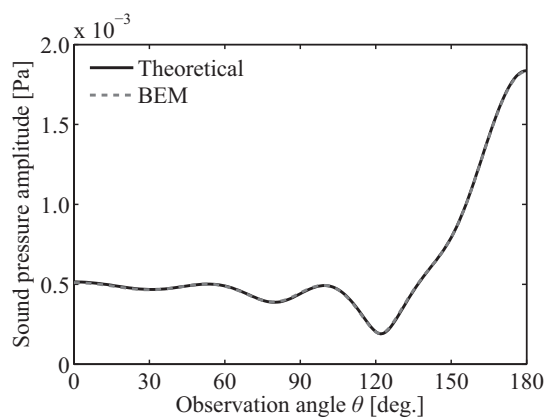
(a) 63 Hz



(b) 125 Hz



(c) 250 Hz



(d) 500 Hz

Fig. 2.5 球による散乱波の指向特性の BEM を用いた計算結果

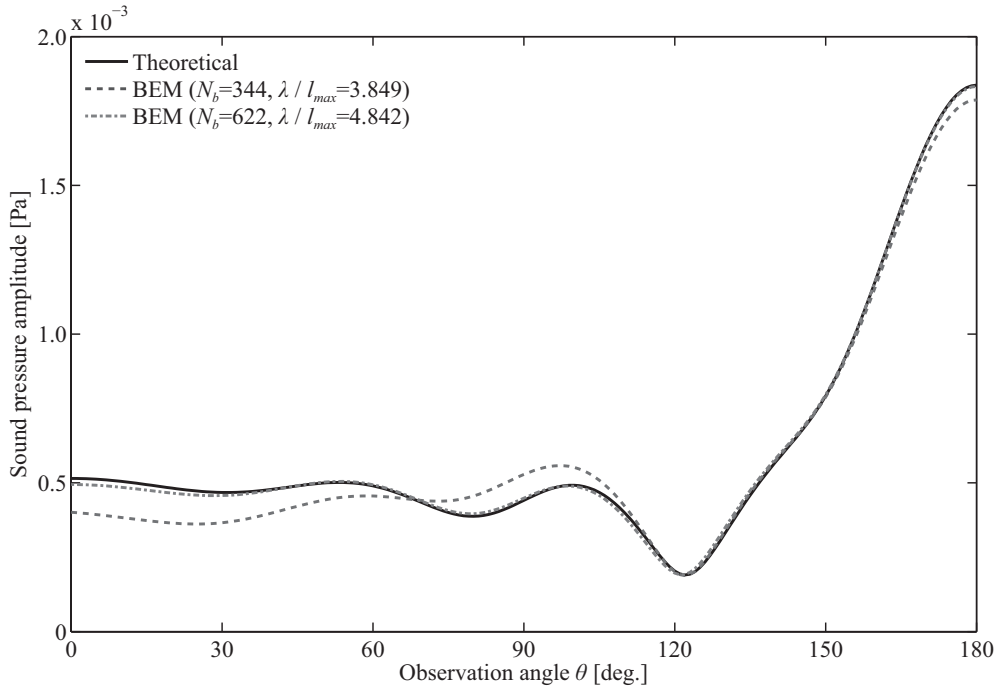


Fig. 2.6 要素数を変化させた場合の球による散乱音場の計算結果（解析周波数 500 Hz）

示す。Fig. 2.5 の結果より，BEM による計算結果は球による散乱波の理論解析解と一致しており，問題なく実装できているといえる。さらに，BEM を用いて妥当な計算結果を得るためにはどの程度の要素数が必要となるのかを調べた。その結果を Fig. 2.6 に示す。Fig. 2.6 より，344 個の三角形一定要素（最大メッシュ長 l_{max} : 0.179 [m]）を用いた場合の計算結果は，理論解析解との誤差が大きく，十分収束した妥当な計算結果が得られているとはいえない。一方で，622 個の三角形一定要素（最大メッシュ長 l_{max} : 0.142 [m]）を用いた場合の計算結果は，理論解析解とほぼ同程度の計算結果が得られていることから，BEM を用いて妥当な計算結果を得るためには，文献 [2] においてもいわれているように，少なくとも最大メッシュ長が解析周波数の 1/5 程度であるものを用いた方が良いといえる。

次に，NDF に基づいた BEM のソースコードの妥当性を確認するために，Fig. 2.7 に示すような点音源と寸法が 3×4.5 の長方形板による散乱音場における散乱波の指向特性を計算した。これは，WEB 上で公開されているベンチマーク問題 [25] のうちのひとつであり，計算結果の妥当性の確認を目的とし，BEM による計算結果が公開されている。そこで，公開されている計算結果を参考値とし，それと同程度の四角形一定要素を用いて実装したソースコードによる計算結果と比較した結果を Fig. 2.8 に示す。この結果より，NDF に基づいた BEM による計算結果についても，ベンチマーク問題で公開されている参考値と同程度の計算結果が得られており，実装には問題がないといえる。また，NDF についても，BF に基づいた BEM のソースコードと同様に，離散化に用いる要素数を変化させ，どの程度の要素数を用いて計算を行う必要があるのかを調べた。その結果を Fig. 2.9 に示す。Fig. 2.9 においても，Fig. 2.6 の結果と同様に，ベンチマーク問題において公

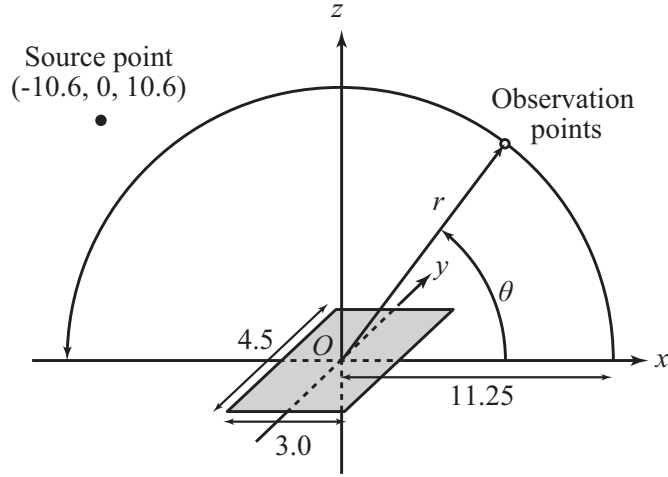


Fig. 2.7 点音源と寸法 3×4.5 の長方形の薄板による散乱音場

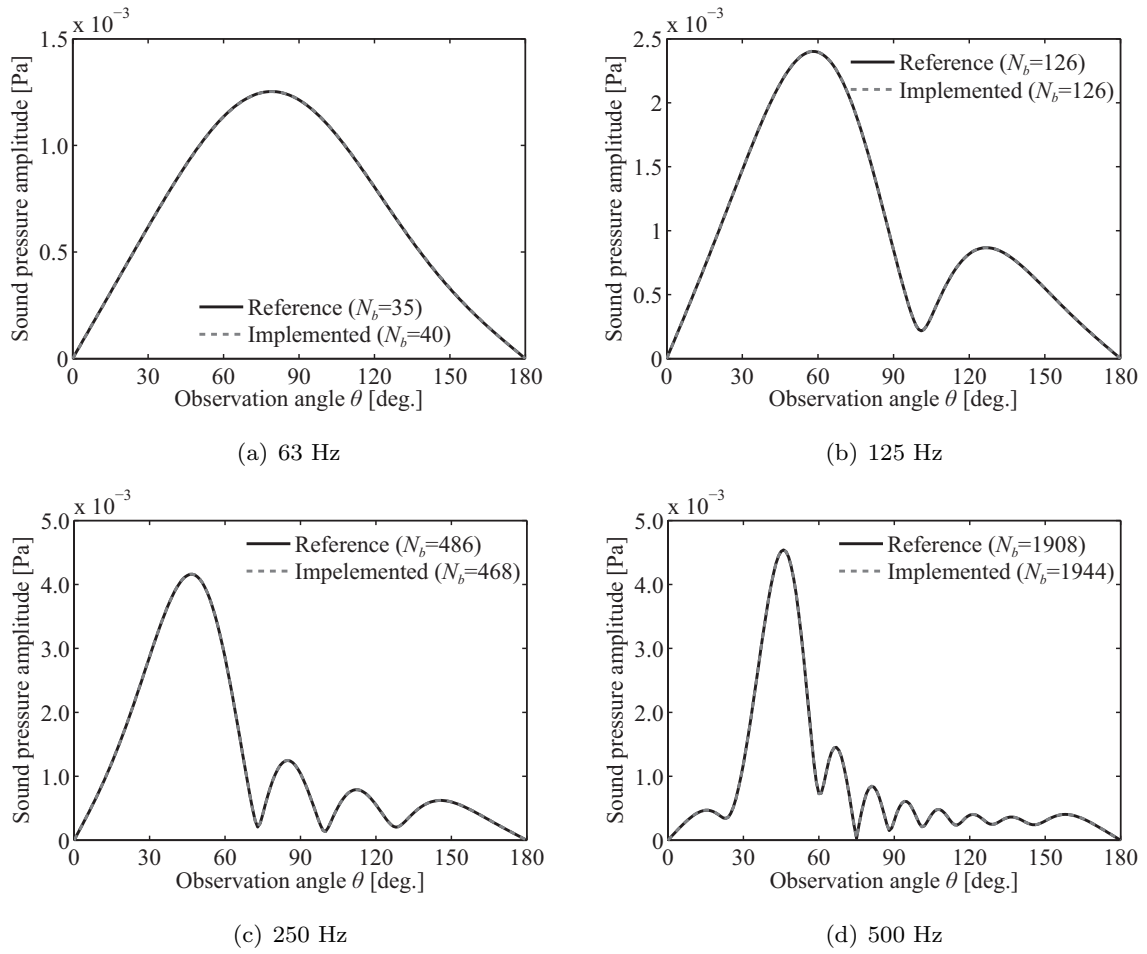


Fig. 2.8 ベンチマーク問題との計算結果の比較

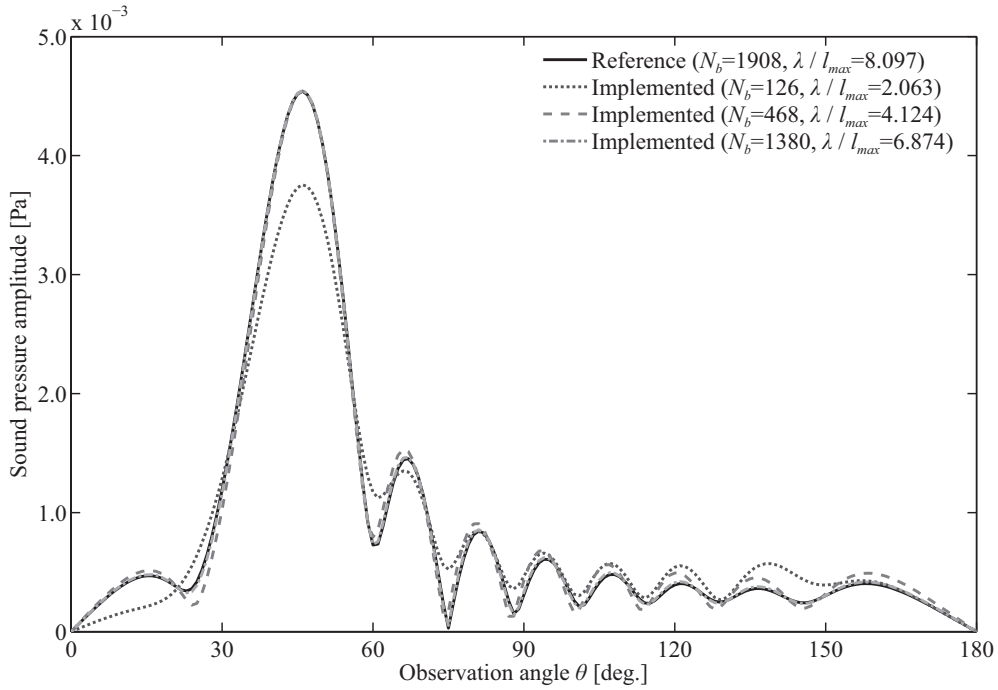


Fig. 2.9 要素数を変化させた場合の長方形の薄板による散乱音場の計算結果（解析周波数 500 Hz）

開されている参考値よりも少ない要素数を用いた場合には、十分に収束した精度の良い計算結果が得られない場合がある。例えば、126 個の四角形一定要素を用いた計算結果は参考値との誤差が大きく、十分な精度の結果が得られているとはいえない。一方で、計算に用いる四角形要素をより細かくし、要素数が大きくなることで計算結果は収束し、参考値との誤差も小さくなることが確認できる。そのため、この場合においても計算に用いるメッシュの最大メッシュ長と解析周波数の関係を考慮し、できるだけ細かいメッシュを用いる必要がある。

以上より、実装したそれぞれの BEM のソースコードを用いて妥当な計算結果が得られることを確認し、また、少なくとも最大メッシュ長が解析周波数の波長の $1/5$ 程度以下となるようなメッシュを用いれば十分に収束した精度の良い計算結果が得られることが確認できた。よって、次章以降の数値計算例では、最大メッシュ長が解析周波数の波長の $1/5$ 以下となるようなメッシュを用いた BEM による計算結果を、提案手法の数値特性の検証を行う際の正解として用いることとする。

2.4 各種座標系における音場の波動関数

Helmholtz 方程式におけるラプラシアン ∇^2 を、適当な座標系における形に変換し、変数分離形の解を仮定して解くことで、各種の直交座標系における一般解が得られる。ここではデカルト座標系、球座標系そして楕円体座標系における一般解を導出し、それらを用いて得られる理論解析解についてまとめる。

2.4.1 デカルト座標系における一般解

デカルト座標系 (cartesian coordinate system) (x, y, z) における Helmholtz 方程式の一般解を導出する。このとき、速度ポテンシャルについて次のような変数分離形を仮定する。

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (2.31)$$

また、デカルト座標系において $\nabla\phi$, $\nabla^2\phi$ はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} \\ \nabla^2\phi &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ はそれぞれ x , y , z 方向の単位ベクトルを表す。これより Helmholtz 方程式に変数分離形で表した速度ポテンシャルを代入し、両辺に $1/\phi$ をかければ、

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0 \quad (2.32)$$

となる。よって、Eq. (2.32) を x , y , z のそれぞれについて解けば、一般解として、

$$X(x) = A_x e^{jk_x x} + B_x e^{-jk_x x} \quad (2.33)$$

$$Y(y) = A_y e^{jk_y y} + B_y e^{-jk_y y} \quad (2.34)$$

$$Z(z) = A_z e^{jk_z z} + B_z e^{-jk_z z} \quad (2.35)$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (2.36)$$

が得られる。

以上のデカルト座標系における一般解を用いることで、Fig. 2.10 に示すような寸法 $l_x \times l_y \times l_z$ の境界面がすべて剛な直方体室における固有関数を導くことができる [26]。

$$\phi_n(\mathbf{r}) = \cos \frac{n_x \pi x}{l_x} \cos \frac{n_y \pi y}{l_y} \cos \frac{n_z \pi z}{l_z} \quad (2.37)$$

$$n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots$$

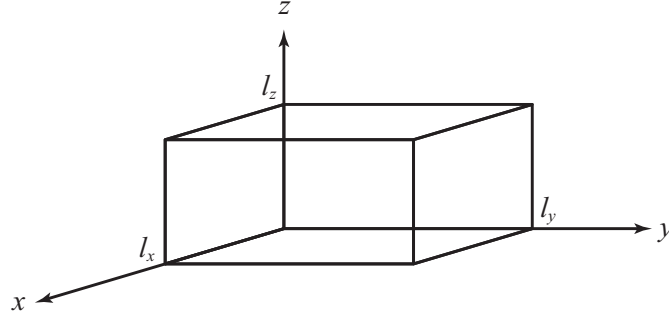


Fig. 2.10 境界面が全て剛な直方体室

2.4.2 球座標系における一般解

デカルト座標系 (x, y, z) と球座標系 (spherical coordinate system) (r, θ, φ) には Fig. 2.11 に示すような関係があり，その変換は次式のようになる。

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (2.38)$$

$$0 \leq r, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

このとき，速度ポテンシャルについて次のような変数分離形を仮定する。

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \Pi(r)\Theta(\theta)\Lambda(\varphi) \quad (2.39)$$

また，球座標系において，

$$\nabla \phi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \quad (2.40)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \quad (2.41)$$

となる。ここで， $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ はそれぞれ r , θ , φ 方向における単位ベクトルである。Helmholtz 方程式に変数分離形で表した速度ポテンシャルと球座標系におけるラプラシアンを代入し， $r^2 \sin^2 \theta / \phi$ を両辺にかければ，次式のようになる。

$$\frac{\sin^2 \theta}{\Pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Pi}{\partial r} + k^2 r^2 \Pi \right) \right\} + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2.42)$$

よって，Eq. (2.42) を r , θ , φ について解けば，一般解として，

$$\Pi(r) = A_r j_n(kr) + B_r y_n(kr) \quad (2.43)$$

$$\Theta(\theta) = A_\theta P_n^m(\cos \theta) \quad (2.44)$$

$$\Lambda(\varphi) = A_\varphi e^{jm\varphi} + A_\varphi e^{-jm\varphi} \quad (2.45)$$

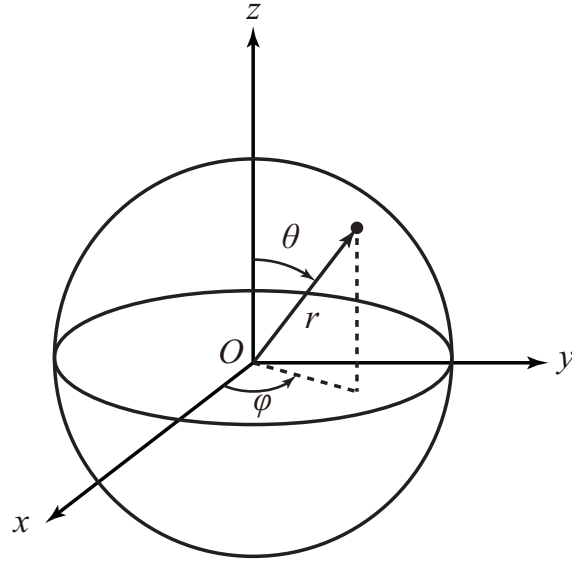


Fig. 2.11 球座標系とデカルト座標系の関係

が得られる。ここで, j_n : 球 Bessel 関数, y_n : 球 Neumann 関数, P_n^m : Legendre 陪関数である。Fig. 2.12 に球 Bessel 関数, Fig. 2.13 に球 Neumann 関数, Fig. 2.14 に Legendre 陪関数をそれぞれ示す。また, 球 Bessel 関数と球 Neumann 関数を用いて, 第 1 種・第 2 種の球 Hankel 関数が定義される。

$$h_n^{(1)}(kr) = j_n(kr) + jy_n(kr) \quad (2.46)$$

$$h_n^{(2)}(kr) = j_n(kr) - jy_n(kr) \quad (2.47)$$

さらに, Legendre 陪関数からは球面調和関数が定義される。

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{jm\varphi} \quad (2.48)$$

以上の, 球座標系における一般解を用いれば, 点音源と半径 a の剛体球による散乱音場の理論解析解を導くことができる [4]。

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = & jk \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_n^m(\theta, \varphi) Y_n^{-m}(\theta_s, \varphi_s) \\ & \times \begin{cases} \left(j_n(kr) h_n^{(1)}(kr_s) - \frac{j_n'(ka)}{h_n'(ka)} h_n^{(1)}(kr) h_n^{(1)}(kr_s) \right), & r < r_s \\ \left(j_n(kr_s) h_n^{(1)}(kr) - \frac{j_n'(ka)}{h_n'(ka)} h_n^{(1)}(kr_s) h_n^{(1)}(kr) \right), & r > r_s \end{cases} \end{aligned} \quad (2.49)$$

ここで, $\mathbf{r}_s = (r_s, \theta_s, \varphi_s)$ は音源点の座標である。

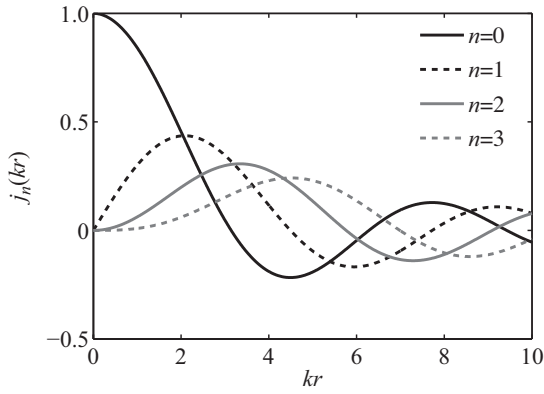


Fig. 2.12 球 Bessel 関数

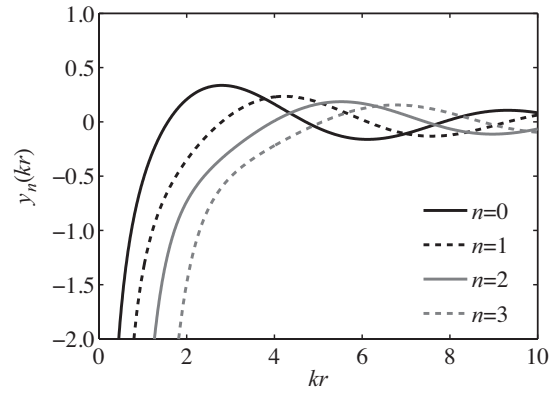


Fig. 2.13 球 Neumann 関数

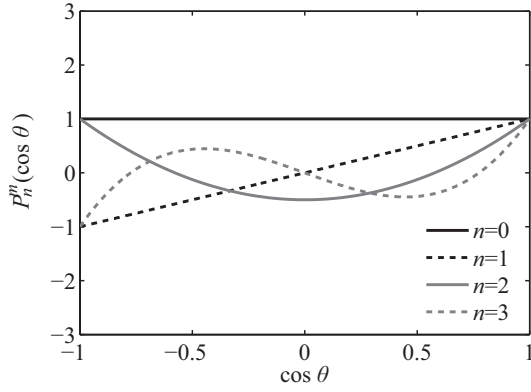
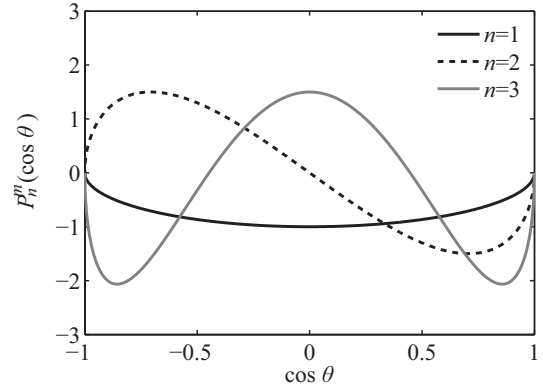
(a) $m = 0$ (b) $m = 1$

Fig. 2.14 Legendre 陪関数

2.4.3 楕円体座標系における一般解

楕円体座標系 [27] には回転楕円体座標系 (prolate spheroidal coordinates) と扁球座標系 (oblate spheroidal coordinates) がある。デカルト座標系 (x, y, z) と楕円体座標系 (ξ, η, φ) には Fig. 2.15 に示すような関係がそれぞれあり，回転楕円体座標系との変換は次式のようなになる。

$$\begin{cases} x = \frac{d}{2} \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi \\ y = \frac{d}{2} \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi \\ z = \frac{d}{2} \xi \eta \end{cases} \quad (2.50)$$

$$1 \leq \xi, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

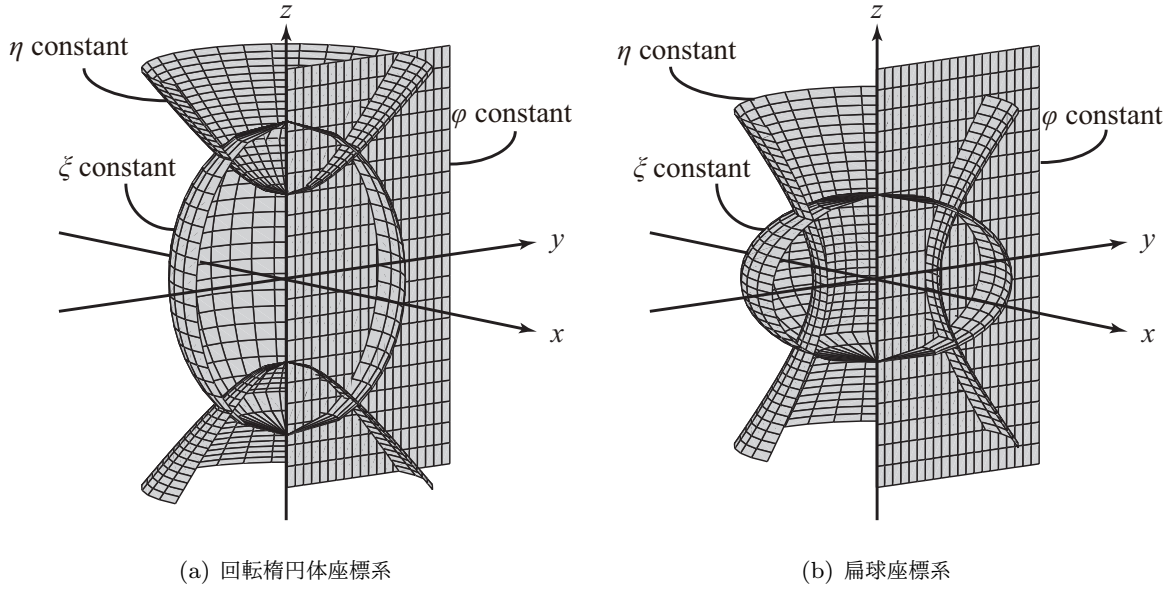


Fig. 2.15 楕円体球座標系とデカルト座標系の関係

また，扁球座標系との変換は，

$$\begin{cases} x = \frac{d}{2} \sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi \\ y = \frac{d}{2} \sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi \\ z = \frac{d}{2} \xi \eta \end{cases} \quad (2.51)$$

$$0 \leq \xi, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

となる。以上において， d ：回転楕円体・扁球における焦点間距離である。本論文では，扁球座標系における楕円体波動関数を扱う。そのため，以降では扁球座標系のみについて述べ，扁球座標系において得られる波動関数を，単に楕円体波動関数と呼ぶこととする。

扁球座標系において $\nabla\phi$ ， $\nabla^2\phi$ はそれぞれ次のようになる。

$$\nabla\phi = e_\xi \frac{2}{d} \left(\frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 + \eta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + e_\eta \frac{2}{d} \left(\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial\phi}{\partial\eta} + e_\varphi \frac{2}{d} \left\{ \frac{1}{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi &= \left(\frac{2}{d} \right)^2 \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)} \\ &\times \left[\frac{\partial}{\partial\xi} \left\{ (\xi^2 + 1) \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \right\} + \frac{\partial}{\partial\eta} \left\{ (1 - \eta^2) \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right\} + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left\{ \frac{\xi^2 + \eta^2}{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

ただし， e_ξ ， e_η ， e_φ はそれぞれ ξ ， η ， φ 方向における単位ベクトルである。扁球座標系におけるラプラシアンを用いることで Helmholtz 方程式は，

$$\left[\frac{\partial}{\partial\xi} (\xi^2 + 1) \frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta} (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right] \phi + h^2 (\xi^2 + \eta^2) \phi = 0 \quad (2.54)$$

となる。ここで、 $h = kd/2$ である。これまでと同様に、速度ポテンシャルについて変数分離形を仮定し、 ξ , η , φ のそれぞれについて解けば、

$$R_{mn}^{(i)}(-jh, j\xi) = \left(\frac{\xi^2 + 1}{\xi^2} \right)^{m/2} \sum_{r=0,1}^{\infty} a_r^{mn}(-jh) z_{m+r}^{(i)}(h\xi) \quad (2.55)$$

$$S_{mn}(-jh, \eta) = \sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{mn}(-jh) P_{m+r}^m(\eta) \quad (2.56)$$

$$\Lambda(\varphi) = A_\varphi \cos m\varphi + A_\varphi \sin m\varphi \quad (2.57)$$

が得られる。ここで、 $\sum_{r=0,1}^{\infty}$ は $(n-m)$ が偶数のときは、 $r = 0, 2, 4, \dots$ の和をとり、奇数のときは、 $r = 1, 3, 5, \dots$ の和をとることを表す。また、 d_r^{mn} は展開係数であり、 $z_{m+r}^{(i)}(h\xi)$ は $i = 1$: 球 Bessel 関数、 $i = 2$: 球 Neumann 関数、 $i = 3$: 第 1 種球 Hankel 関数、 $i = 4$: 第 2 種球 Hankel 関数をそれぞれ表す。さらに、 a_r^{mn} は d_r^{mn} を用いて以下のように表される。

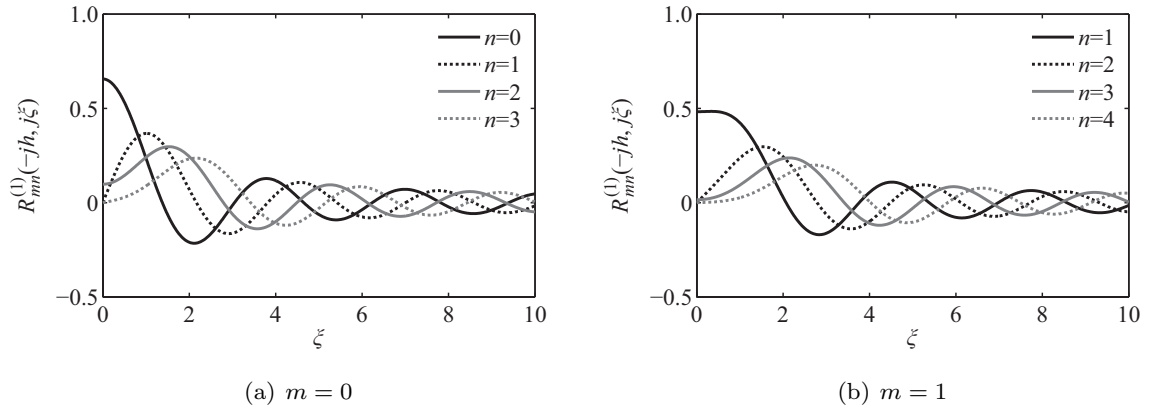
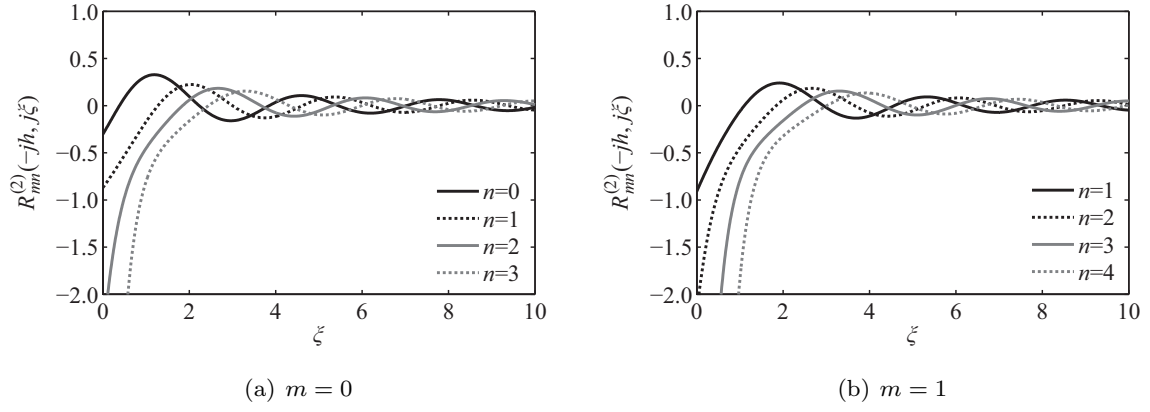
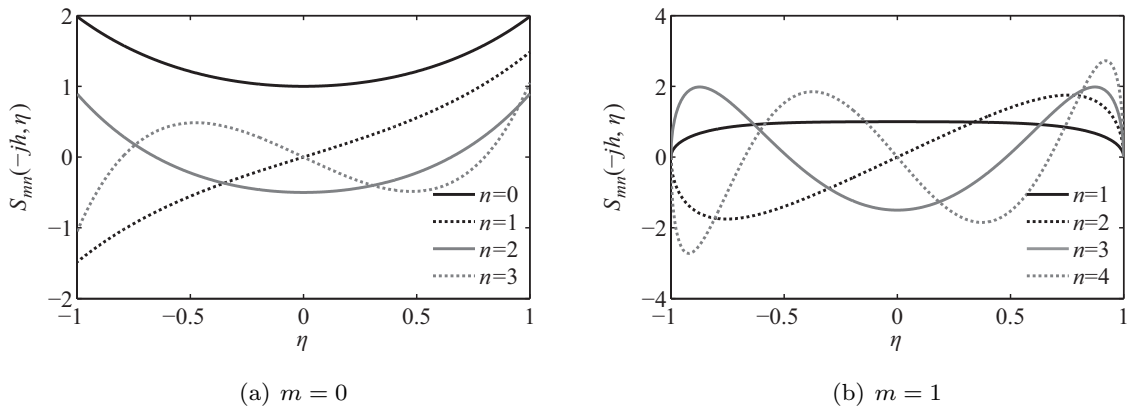
$$a_r^{mn}(-jh) = \frac{(-1)^{(r-n+m)/2}}{\sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{(2m+r)!}{r!} d_r^{mn}(-jh)} \frac{(2m+r)!}{r!} d_r^{mn}(-jh) \quad (2.58)$$

この展開係数 $d_r^{mn}(-jh)$ の詳しい求め方については文献 [28] を参考にされたい。以上より、扁球座標系における一般解が得られた。参考として、Fig. 2.16 に第 1 種 Radial 関数、Fig. 2.17 に第 2 種 Radial 関数、Fig. 2.18 に Angular 関数をそれぞれ示す。

以上の扁球座標系における一般解を用いて、点音源と表面が ξ_0 で与えられる音響的に剛な扁球による散乱音場の理論解析解が得られる [29]。

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = & \frac{jk}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0m}}{N_{mn}} S_{mn}(-jh, \eta) S_{mn}(-jh, \eta_s) \cos m(\varphi - \varphi_s) \\ & \times \begin{cases} \left(R_{mn}^{(1)}(-jh, j\xi) R_{mn}^{(3)}(-jh, j\xi_s) - \frac{R_{mn}^{(1)'}(-jh, j\xi_0)}{R_{mn}^{(3)'}(-jh, j\xi_0)} R_{mn}^{(3)}(-jh, j\xi) R_{mn}^{(3)}(-jh, j\xi_s) \right), & \xi < \xi_s \\ \left(R_{mn}^{(1)}(-jh, j\xi_s) R_{mn}^{(3)}(-jh, j\xi) - \frac{R_{mn}^{(1)'}(-jh, j\xi_0)}{R_{mn}^{(3)'}(-jh, j\xi_0)} R_{mn}^{(3)}(-jh, j\xi) R_{mn}^{(3)}(-jh, j\xi_s) \right), & \xi > \xi_s \end{cases} \end{aligned} \quad (2.59)$$

ここで、 $\mathbf{r}_s = (\xi_s, \eta_s, \varphi_s)$ は音源点の座標である。また、 $\xi_0 = 0$ とした場合に Eq. (2.59) は、直径 d の円板による散乱音場の解析解となる。

Fig. 2.16 第1種 Radial 関数 ($h = 2$)Fig. 2.17 第2種 Radial 関数 ($h = 2$)Fig. 2.18 Angular 関数 ($h = 2$)

第 3 章

球波動関数と最小二乗法を用いた散乱音場の準理論解析手法

本章では、単一の障害物による散乱音場の準理論解析手法を扱う。このような準理論解析手法として、音場を球波動関数による展開表現で与え、その展開係数については境界条件の二乗平均誤差から評価関数を設定し、最小二乗法を適用することでマトリクス方程式に帰着させ数値的に求める手法が提案されている [30, 31]。しかしながら、その数値特性については明らかにされておらず、検証が必要である。よって、手法の定式化について改めて述べるとともに、BEM による計算結果との比較から提案されている準理論解析手法の妥当性を確認し、その数値特性について検証する。

3.1 提案解析手法

3.1.1 問題設定

Fig. 3.1 に示すような、3 次元自由空間中に点音源と単一の障害物が存在する場合の音響散乱問題について考える。このとき、障害物の中心を原点とし、音源は障害物に外接する球の外部にあるとする。また、球座標系を用いて点音源の位置を $\mathbf{r}_s = (r_s, \theta_s, \varphi_s)$ 、観測点を $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$ とし、単位法線方向ベクトルを $\mathbf{n}$ とする。

3.1.2 定式化

Fig. 3.1 に示す音場が線形であれば、観測点 $\mathbf{r}$ における速度ポテンシャル ϕ は以下のように表すことができる。

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_i(\mathbf{r}) + \phi_s(\mathbf{r}) \quad (3.1)$$

ただし、 ϕ_i : 入射ポテンシャル、 ϕ_s : 散乱ポテンシャルである。点音源の体積速度が Q で与えられる場合、入射ポテンシャルは

$$\phi_i(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|} e^{jk|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|} \quad (3.2)$$

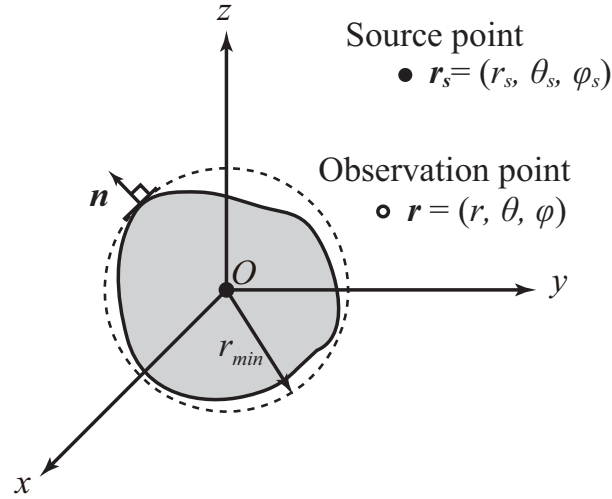


Fig. 3.1 単一の障害物による散乱音場

となる。また、散乱ポテンシャルを球波動関数による展開形式を用いて表すこと考える。ここで、散乱ポテンシャルは Sommerfeld の放射条件

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial r} - jk \phi_s \right) = 0 \quad (3.3)$$

を満たす必要があるため、球波動関数として特異解

$$S_n^m(\mathbf{r}) = h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (3.4)$$

を用いるのが適当である。ゆえに、障害物に外接する球の半径を r_{min} とすれば、 $r \geq r_{min}$ という条件のもと、

$$\phi_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m S_n^m(\mathbf{r}) \quad (3.5)$$

のように、散乱ポテンシャル ϕ_s は球波動関数の特異解 S_n^m を用いた展開表現で表すことができる。ここで、 A_n^m は散乱ポテンシャルに関する未知の展開係数であり、求める必要のある未知量となる。同様に、入射ポテンシャル ϕ_i についても球波動関数を用いて展開すれば、 $r_0 < r_s$ であることから、

$$\phi_i(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^m(\mathbf{r}_s) R_n^m(\mathbf{r}) \quad (3.6)$$

$$C_n^m(\mathbf{r}_s) = jk Q S_n^{-m}(\mathbf{r}_s)$$

となる。ここで、 R_n^m は

$$R_n^m(\mathbf{r}) = j_n(kr) Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (3.7)$$

であり、これを球波動関数の正則解と呼ぶこととする。以上より、速度ポテンシャルの球波動関数による展開表現が得られた。

次に、境界条件の二乗平均誤差から評価関数を設定する。障害物表面の法線 $\mathbf{n}$ 方向における音響粒子速度を $\mathbf{v}_f$ とし、また法線 $\mathbf{n}$ 方向の比音響インピーダンスが $Z(\mathbf{r})$ で与えられるとき、障害物表面に関する二乗平均誤差は次式のようになる。

$$\begin{aligned} E &= \iint_{\Gamma} \left| \mathbf{v}_f(\mathbf{r}) - \frac{p(\mathbf{r})}{Z(\mathbf{r})} \right|^2 dS \\ &= \iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} - \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r})} \phi(\mathbf{r}) \right|^2 dS \end{aligned} \quad (3.8)$$

この Eq. (3.8) に Eq. (3.5), (3.6) を代入すれば、

$$\begin{aligned} E &= \iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \{A_n^m S_n^m(\mathbf{r}) + C_n^m(\mathbf{r}_s) R_n^m(\mathbf{r})\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r})} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \{A_n^m S_n^m(\mathbf{r}) + C_n^m(\mathbf{r}_s) R_n^m(\mathbf{r})\} \right|^2 dS \end{aligned} \quad (3.9)$$

となる。ここで、最小二乗法の手続きに従えば、Eq. (3.9) を最小とする未知の展開係数 A_n^m を求めるためには次式を適用すればよい。

$$\frac{\partial E}{\partial A_i^j} = 0 \quad (3.10)$$

$$i = 0, 1, \dots, \quad j = -i, -i+1, \dots, i-1, i$$

Eq. (3.9) に Eq. (3.10) を適用すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} &\iint_{\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} S_n^m(\mathbf{r}) - \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r})} S_n^m(\mathbf{r}) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} S_i^j(\mathbf{r}) - \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r})} S_i^j(\mathbf{r}) \right\}^* dS \\ &= - \iint_{\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^m(\mathbf{r}_s) \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} R_n^m(\mathbf{r}) - \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r})} R_n^m(\mathbf{r}) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} S_i^j(\mathbf{r}) - \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r})} S_i^j(\mathbf{r}) \right\}^* dS \\ &i = 0, 1, \dots, \quad j = -i, -i+1, \dots, i-1, i \end{aligned} \quad (3.11)$$

Eq. (3.11) を整理すれば、結局次式のように表される。

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m \left(H_{in}^{jm} + Z_{in}^{jm} + F_{in}^{jm} + U_{in}^{jm} \right) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^m \left(\tilde{H}_{in}^{jm} + \tilde{Z}_{in}^{jm} + \tilde{F}_{in}^{jm} + \tilde{U}_{in}^{jm} \right) \\ i = 0, 1, \dots, \quad j &= -i, -i+1, \dots, i-1, i \end{aligned} \quad (3.12)$$

ただし,

$$\begin{aligned}
H_{in}^{jm} &= \iint_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} S_i^j(\mathbf{r}) \right\}^* \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} S_n^m(\mathbf{r}) \right\} dS \\
Z_{in}^{jm} &= - \iint_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} S_i^j(\mathbf{r}) \right\}^* \left\{ \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r})} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} S_n^m(\mathbf{r}) \right\} dS \\
F_{in}^{jm} &= - \iint_{\Gamma} \left\{ \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r})} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} S_i^j(\mathbf{r}) \right\}^* \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} S_n^m(\mathbf{r}) \right\} dS \\
U_{in}^{jm} &= \iint_{\Gamma} \left\{ \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r})} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} S_i^j(\mathbf{r}) \right\}^* \left\{ \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r})} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} S_n^m(\mathbf{r}) \right\} dS \\
\tilde{H}_{in}^{jm} &= \iint_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} S_i^j(\mathbf{r}) \right\}^* \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} R_n^m(\mathbf{r}) \right\} dS \\
\tilde{Z}_{in}^{jm} &= - \iint_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} S_i^j(\mathbf{r}) \right\}^* \left\{ \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r})} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} R_n^m(\mathbf{r}) \right\} dS \\
\tilde{F}_{in}^{jm} &= - \iint_{\Gamma} \left\{ \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r})} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} S_i^j(\mathbf{r}) \right\}^* \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} R_n^m(\mathbf{r}) \right\} dS \\
\tilde{U}_{in}^{jm} &= \iint_{\Gamma} \left\{ \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r})} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} S_i^j(\mathbf{r}) \right\}^* \left\{ \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r})} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} R_n^m(\mathbf{r}) \right\} dS
\end{aligned}$$

とおいた。Eq. (3.12) にて, 無限級数和を次数 N で打ち切り, $i = 0, 1, 2, \dots, j = j = -i, i + 1, \dots, i - 1, i$ と変化させれば, $(N + 1)^2$ 個の未知の展開係数 A_n^m に関するマトリクス方程式が得られる。

この準理論解析手法は文献 [32–34] において証明された, 波動関数の系は境界上の二乗可積分関数全体が作る空間において完全であるという定理より, 打ち切り次数 N を大きくした場合に解が収束することが保証されている。また, 以上で述べた準理論解析手法は電磁波問題の解析において一般的に用いられているモード整合法 [35] を音響問題に適用したものといえる。

3.2 数値計算例

ここでは, 以下に示す項目について数値計算を行い, BEM による計算結果との比較から, 提案手法の数値特性について検証する。

- 散乱波の指向特性
 - 障害物の遠方における解析
 - 障害物の近傍における解析
- 散乱波の周波数応答関数

解析対象となる障害物形状の設定に関しては, 提案手法では球波動関数を利用していることから, 障害物の形状が球形に近いものであるほど提案手法の特性が顕著に現れ, 提案手法の基本的な数値特性の評価がしやすいと考えられる。そこで, Fig. 3.2 に示すような, 障害物形状が有限長

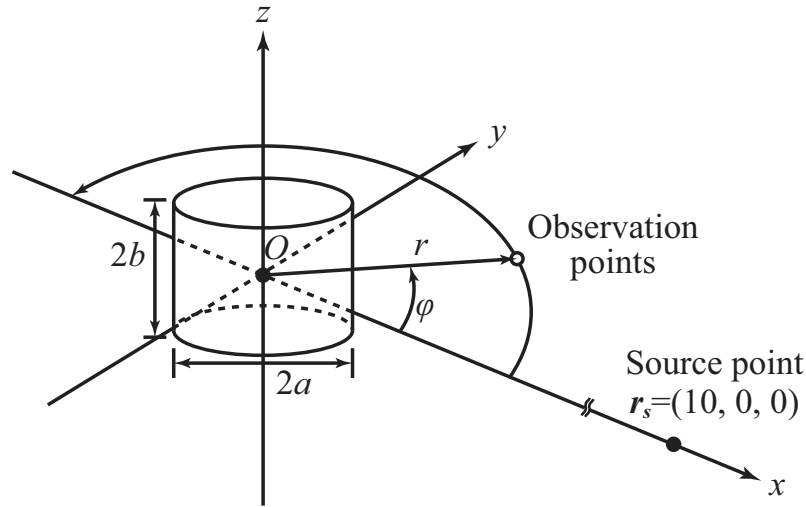


Fig. 3.2 解析対象とした有限長円筒と点音源による音場

円筒である場合の散乱音場について扱う。解析条件は波動音響数値解析のベンチマークプラットフォーム「AIJ-BPCA」[36]に挙げられている問題中の、外部問題群における基本問題[37]を参考に設定した。なお、提案手法による解析において有限長円筒表面上での面積分は理論解析的に実行出来る部分があり、最終的には θ_0 のみを積分変数とする線積分として計算できる[17]。そこで、提案手法による解析では、 $\theta_0 = 0 \sim \pi$ の範囲を $\pi/4$ ずつに区切り、それぞれの区間を16点のGauss-Legendre積分を用いて数値積分した。一方で、BEMによる解析では三角形一定要素を用いて境界を分割し、それぞれの三角形一定要素における面積分の計算には9点のGauss積分を用いた。

また、数値計算に用いた計算機環境は以下のとおりである。

- CPU: Intel Core i7 2.80 GHz
- Memory: 8 GB
- Language: Python

3.2.1 障害物の遠方における散乱波の指向特性

Fig. 3.2に示す音響的に剛な有限長円筒による散乱音場において、散乱波の指向特性を計算し、BEMによる計算結果と比較することにより提案手法の妥当性について検証する。このとき、有限長円筒の寸法を直径 $2a = 1$ 、高さ $2b = 1$ とし、観測点を原点から5 mの位置に設定した。また、参考値となるBEMの計算結果では1312要素の三角形一定要素（最大メッシュ長 $l_{max} : 0.104$ [m]）を用い、提案手法の計算結果では打ち切り次数を $N = 20$ とした。

寸法が直径 $2a = 1$ 、高さ $2b = 1$ の有限長円筒による散乱波の指向特性の計算結果をFig. 3.3に示す。Fig. 3.3より、提案手法による計算結果は指向特性の概形をよく捉えているといえる。しかし、 0° および 180° 付近においてBEMによる計算結果との誤差が大きい傾向にあり、計算精度が

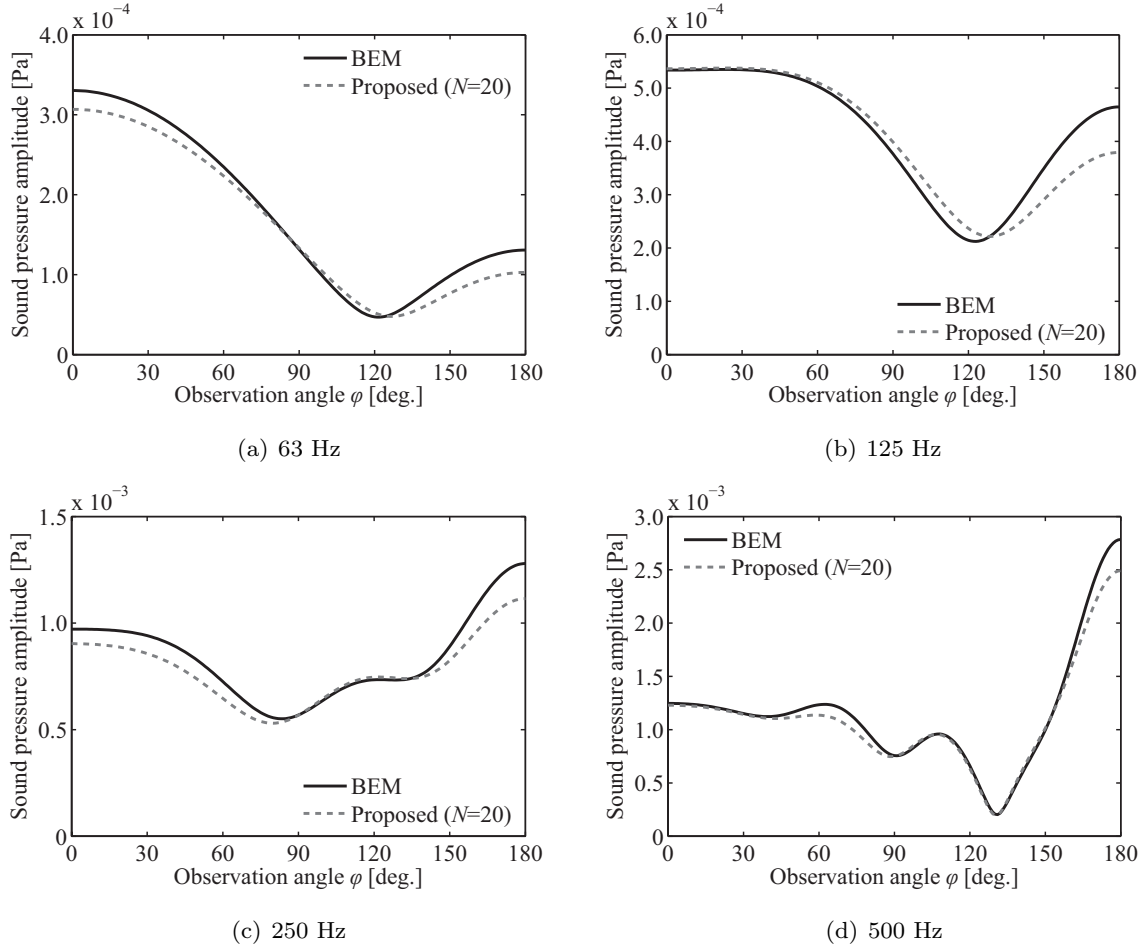


Fig. 3.3 直径 $2a = 1$ 、高さ $2b = 1$ の有限長円筒による散乱波の指向特性の計算結果

求められるような場面においては問題になりうる。また、文献 [38] を参考に、BEM による計算結果との相対誤差の平均値 ε を次式を用いて求め、提案手法による計算結果の収束について調べた。

$$\varepsilon = \frac{1}{181} \sum_{n=1}^{181} \frac{|p_{ref}(\mathbf{r}_n) - p(\mathbf{r}_n)|}{|p_{ref}(\mathbf{r}_n)|} \quad (3.13)$$

ここで、 p_{ref} : BEM により求めた音圧、 p : 提案手法により求めた音圧、 $\mathbf{r}_n$: n 番目の観測点である。Eq. (3.13) よりそれぞれの打ち切り次数 N に対して相対誤差の平均値 ε を算出した結果を Fig. 3.4 に示す。Fig. 3.4 より、提案手法による計算結果と BEM による計算結果における相対誤差の平均値 ε は、打ち切り次数 N を大きくすることで収束していくことが確認できる。また、打ち切り次数を $N = 20$ とした場合における計算結果は、Fig. 3.4 より十分収束した範囲にあることから、Fig. 3.3 のそれぞれの解析周波数における計算結果は十分収束した計算結果であるといえる。しかしながら、Fig. 3.4 において最も BEM との相対誤差の平均値 ε が小さな 500 Hz でも、計算結果が十分に収束していると考えられる範囲においても誤差が 10% 程度存在する。このことから、Fig. 3.3 の提案手法による計算結果は、BEM との誤差が大きいものの妥当な計算結果であり、提案手法による計算精度の限界として 10% 程度の誤差が生じてしまうといえる。

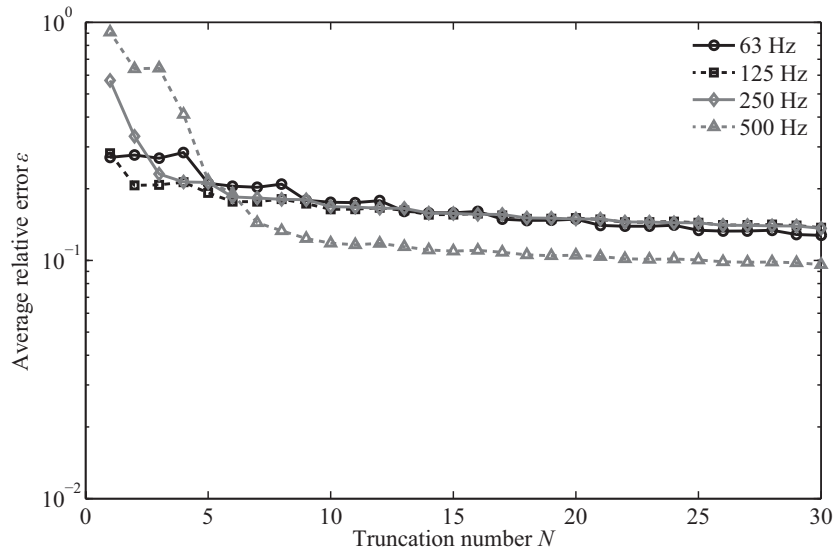


Fig. 3.4 提案手法による計算結果と BEM による計算結果との相対誤差の平均値 ε

3.2.2 障害物の近傍における散乱波の指向特性

前項における障害物の遠方に観測点を設定した場合の計算結果から、障害物と観測点との距離が離れている場合については、提案手法における計算結果は誤差が大きいものの妥当な計算結果が得られていると考えられる。一方で、提案手法においては得られた解が収束することが保証されているものの、原理的に Eq. (3.5) は障害物に外接する球の外部 $r \geq r_{min}$ において成り立つものであり、障害物に外接する球の内部においては妥当な計算結果が得られない可能性がある。そこで、障害物と観測点との距離を $r = 0.6$ (障害物に外接する球の内部), 0.707 (障害物に外接する球上), 1.0 (障害物に外接する球の外部) とした場合について、それぞれ散乱波の指向特性を計算し、Eq. (3.13) より BEM による計算結果との相対誤差の平均値 ε を算出した。異なる観測点において、提案手法による計算結果と BEM による計算結果における相対誤差の平均値 ε をそれぞれ算出した結果を Fig. 3.5 に示す。提案手法による計算結果は、Fig. 3.5 (a) の観測点を有限長円筒に外接する球の内部に設定した場合や、(b) の観測点を外接する球上に設定した場合の結果より、打ち切り次数 N を大きくすることで収束していく様子が確認できる。また、Fig. 3.5 (c) の観測点を有限長円筒に外接する球の外部に設定した場合についても、これまでと同様に精度に関しては BEM と同程度の計算結果が得られるとはいえないものの、その収束に関しては問題ないといえる。そのため、原理的に Eq. (3.5) は障害物に外接する球の外部 $r \geq r_{min}$ において成り立つものではあるが、文献 [32–34] において証明された定理と同様に、 $r < r_{min}$ である範囲の計算結果も真の値に収束していくといえる。

以上より、提案手法を用いれば、BEM と比べて誤差はある程度含まれてしまうものの、任意の観測点において妥当性のある計算結果を得ることができるといえる。

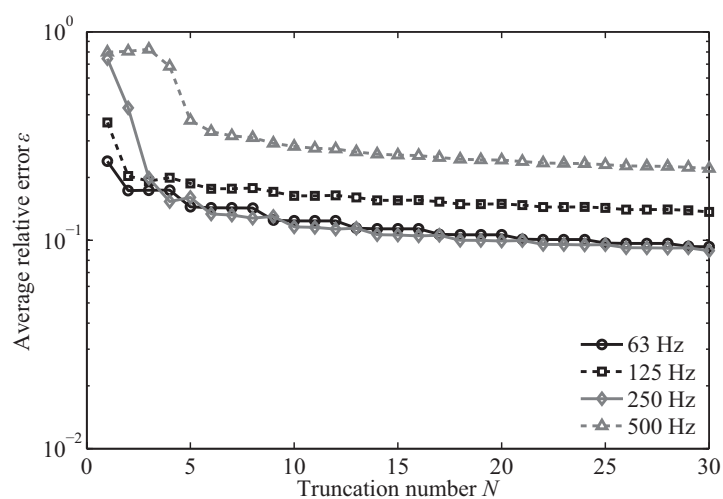
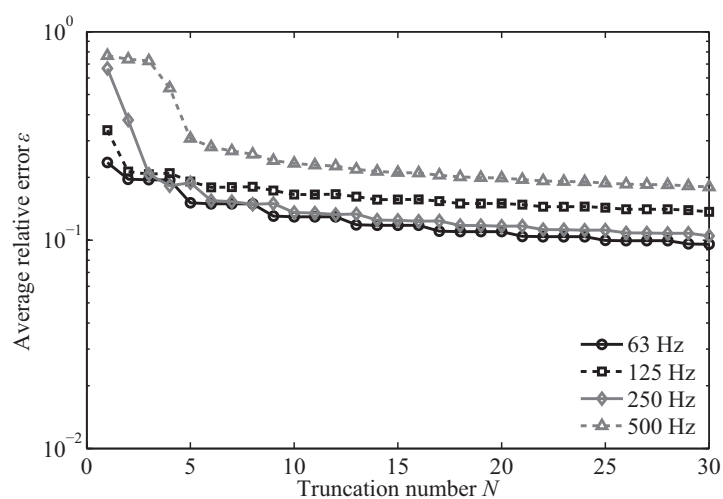
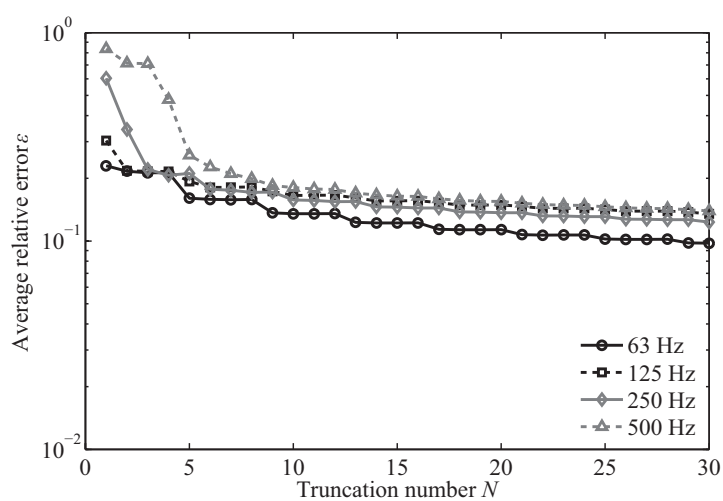
(a) $r = 0.6$ (b) $r = 0.707$ (c) $r = 1.0$

Fig. 3.5 観測点をそれぞれ $r = 0.6$, 0.707 , 1.0 とした場合の提案手法による計算結果と BEM による計算結果との相対誤差の平均値 ε

3.2.3 散乱波の周波数応答関数

BEM では解の非一意性の問題があるため、解析周波数が障害物内部の Dirichlet 周波数と一致した場合に解析精度が低下し、周波数応答関数を求めた場合に不連続点が生じる。そこで、散乱波の周波数応答関数を計算し、提案手法において解の非一意性のような不連続点が生じるのかどうかを確認する。

Fig. 3.6 に観測点をそれぞれ $\mathbf{R}_1 = (5, 0, 0)$, $\mathbf{R}_2 = (0, 5, 0)$, $\mathbf{R}_3 = (-5, 0, 0)$ とした場合の散乱波の周波数応答関数の計算結果を示す。このとき、提案手法による計算結果では打ち切り次数 $N = 30$ とし、BEM による計算結果では 2744 個の三角形一定要素（最大メッシュ長 $l_{max} : 0.079$ [m]）を用いた。このとき、BEM による計算結果では解の非一意性の影響と考えられる不連続点が生じている。そこで、実際に有限長円筒内の Dirichlet 周波数を算出する。有限長円筒内の音場は、円筒座標系 (r, φ, z) を用いて次式で表される [40]。

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}, t) &= J_n(k_r r) \cos(k_z z) \cos(m\varphi) e^{-2\pi j k t} \\ k &= \sqrt{k_r^2 + k_z^2}\end{aligned}\tag{3.14}$$

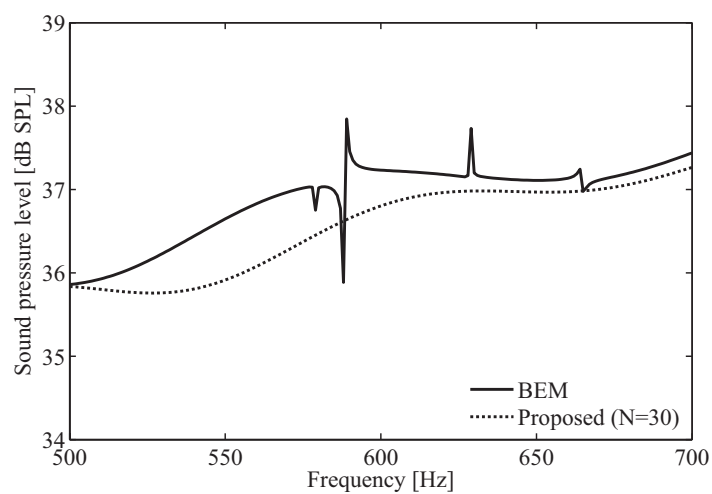
ただし、 J_n : Bessel 関数である。ゆえに、有限長円筒の境界面である $r = a$, $z = \pm b$ において Eq. (3.14) がゼロとなるのは、

$$J_n(k_r a) = 0, \quad \cos(k_z b) = 0\tag{3.15}$$

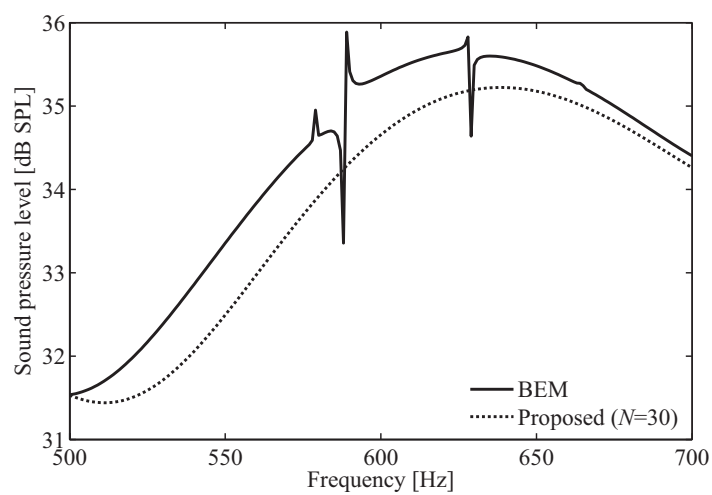
となる場合である。ここで、 n 次の Bessel 関数における l 番目のゼロ点を $\alpha_{n,l}$ とすれば、Dirichlet 周波数 f_d は次式で求まる。

$$\begin{aligned}f_d &= \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\alpha_{n,l}}{a}\right)^2 + \left(\frac{2s-1}{2b}\pi\right)^2} \\ l, s &= 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{3.16}$$

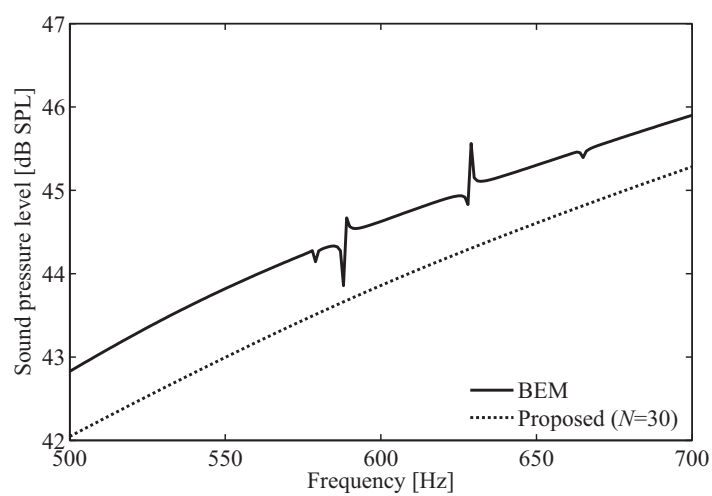
Eq. (3.16) より、有限長円筒内部の Dirichlet 周波数 f_d を算出すれば、500～700 Hz の間における有限長円筒内部の Dirichlet 周波数は、 $f_d = 578.8, 587.5, 627.9, 664.5$ [Hz] となり不連続点が発生している解析周波数と一致していることから、BEM による計算結果において発生している不連続点は解の非一意性によるものであるといえる。一方で、提案手法による散乱波の周波数応答関数の計算結果では不連続点が生じることなく、滑らかな計算結果が得られている。これは、提案手法では BEM が数学的基礎としている積分方程式を用いていないことに加え、未知量が展開係数であるため、BEM のように解が一意に求まらないといった問題が生じないと考えられる。しかしながら提案手法による計算結果は、これまでも示したように BEM との相対誤差がある程度以下には小さくならず、1 dB 程度の誤差が生じてしまうため、このことを考慮して周波数応答関数の計算結果を解釈し利用する必要があるといえる。



(a) 観測点 $\mathbf{R}_1 = (5, 0, 0)$



(b) 観測点 $\mathbf{R}_2 = (0, 5, 0)$



(c) 観測点 $\mathbf{R}_3 = (-5, 0, 0)$

Fig. 3.6 散乱波の周波数応答関数の計算結果

3.3 計算コスト

提案手法の計算コストについて考える。提案手法の計算コストにおいて、BEM と大きく異なる部分は係数行列を得るために必要な計算量やメモリであることから、この点に関する計算コストの考察を行う。BEM では計算に用いる未知数を N_b とすれば、係数行列を得るために必要な計算量やメモリのオーダーはそれぞれ $O(N_b)$ となる。一方で、提案手法においては計算となる未知数は $N_p = (N + 1)^2$ となるため、そのオーダーは $O(N_p^2) \approx O(N^2)$ となる。以上より、計算に用いる未知数の数が提案手法と BEM で同じである状況においては、計算コストのオーダーが同じであることから、どちらの手法を用いても差は生じないといえる。一方で、実際にプログラムを実行した際の計算時間については、提案手法では係数行列のそれぞれの要素に対して障害物表面全体における積分計算が必要となるため、BEM と比べて計算時間は大きなものになると考えられる。そのため、本章で用いた有限長円筒のように、障害物形状に関して対称性などがあり、積分計算を理論的に実行できる部分がある場合でないと、計算時間に関しては提案手法のほうが不利となることが予想できる。

本章で提案した準理論解析手法における計算コストは、次章で提案する準理論解析手法と同等であるため、より詳細な検証については次章で行う。

3.4 まとめ

本章では、音場を球波動関数を用いた展開表現で表し、その展開係数については境界条件の二乗平均誤差を評価関数として最小二乗法を適用することでマトリクス方程式に帰着させ、数値的に求める準理論解析手法を扱った。また、提案手法を用いて有限長円筒による散乱音場の解析を行い、その数値特性について検証することで、以下に示す結果を得た。

- (1) 提案手法を用いることで任意の観測点において妥当性のある計算結果を得ることができる。
- (2) 一方で、提案手法による計算精度には限界があり、BEM と比較すると十分な計算精度の結果が得られるとはいえず、10% 程度の誤差が生じてしまう。
- (3) 提案手法を用いて周波数応答関数を計算した場合、BEM のように解の非一意性の問題により計算結果に不連続点が発生するといったことが生じず、滑らかな周波数応答関数を求めることができる。
- (4) 障害物形状に対称性などがあり、理論的に積分計算を実行できる部分がある場合でないと、計算時間については BEM よりも不利になると予想できる。

以上より、本章において定式化した準理論解析手法を用いることで妥当な計算結果が得られることがわかった。しかしながら、提案手法では最小二乗法を用いていることから、その計算精度には限界がある。そのため、解析において計算精度が求められるような場合、提案手法の計算精度に関する限界が問題となってくる。そこで次章では、単一の障害物による散乱音場の準理論解析手法として、Kirchhoff-Huygens の公式を用いた準理論解析手法の構築を試みる。

第 4 章

球波動関数と Kirchhoff–Huygens の公式を用いた散乱音場の準理論解析手法

前章では，単一の障害物による散乱音場の準理論解析手法として，境界条件の二乗平均誤差による評価関数に最小二乗法を適用することで，未知の展開係数に関するマトリクス方程式を導く手法を扱った。しかしながら，前章における準理論解析手法は精度に関して限界があり，計算精度が求められるような場合には問題になる。そこで本章では，前章と同様に音場については球波動関数による展開表現で表すが，その展開係数については最小二乗法ではなく Kirchhoff–Huygens の公式を用いてマトリクス方程式に帰着させ，数値的に求めると準理論解析手法を構築する。また，提案手法による計算結果と BEM による計算結果との比較から提案手法の妥当性を確認し，その数値特性について検証する。

4.1 提案解析手法

4.1.1 問題設定

Fig. 4.1 に示すような，3 次元自由空間中に点音源と単一の障害物が存在する場合の音響散乱問題について考える。このとき，障害物の中心を原点とし，音源は障害物に外接する球の外部にあるとする。また，球座標系を用いて点音源の位置を $\mathbf{r}_s = (r_s, \theta_s, \varphi_s)$ ，観測点を $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$ とする。

4.1.2 定式化

第 3 章と同様に，Fig. 4.1 に示す音場が線形であれば，観測点 $\mathbf{r}$ における速度ポテンシャル ϕ は，入射ポテンシャル ϕ_i と散乱ポテンシャル ϕ_s を用いて

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_i(\mathbf{r}) + \phi_s(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

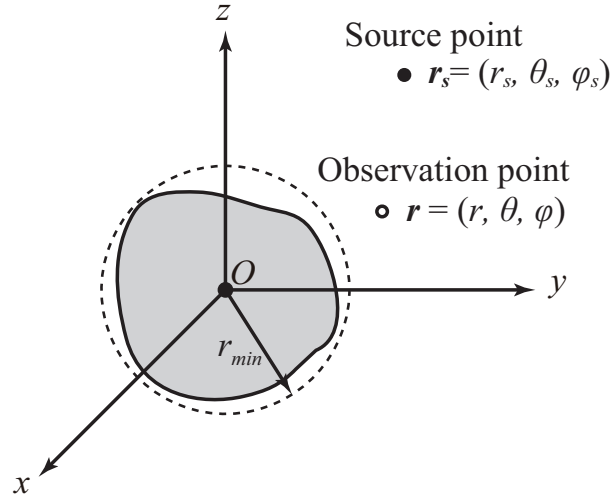


Fig. 4.1 単一の障害物による散乱音場

と表すことができ、点音源の体積速度が Q で与えられる場合に入射ポテンシャル ϕ_i は、

$$\phi_i(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^m(\mathbf{r}_s) R_n^m(\mathbf{r}) \quad (4.2)$$

また、散乱ポテンシャル ϕ_s についても A_n^m を未知の展開係数として、

$$\phi_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m S_n^m(\mathbf{r}) \quad (4.3)$$

と球波動関数を用いた展開表現で表すことができる。ここで、Fig. 4.1 で示した音場について、障害物の表面 Γ 上の点 $\mathbf{r}_0$ における比音響インピーダンスが $Z(\mathbf{r}_0)$ で与えられる場合、Kirchhoff-Huygens の公式は次のようになる。

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|} e^{jk|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|} + \iint_{\Gamma} \left(\phi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}_0} - \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r}_0)} \phi(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \right) dS_0 \quad (4.4)$$

ここで G は Green 関数であり、3次元音場の基本解、

$$G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} e^{jk|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} \quad (4.5)$$

を採用する。Green 関数についても球波動関数を用いて展開すれば、 $r_0 < r$ という条件のもと、

$$G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = jk \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n R_n^{-m}(\mathbf{r}_0) S_n^m(\mathbf{r}) \quad (4.6)$$

と展開することができる。以上より、入射ポテンシャル、散乱ポテンシャルおよび Green 関数について、それぞれの球波動関数を用いた展開表現が得られた。

次に、Eq. (4.4) に、Eq. (4.2), (4.3), (4.6) を適用し、未知の展開係数 A_n^m に関するマトリクス方程式を導く。このとき、 Γ 上の点 $\mathbf{r}_0$ に対して Eq. (4.3) は厳密には適用することができない。

ところで、文献 [32–34] において、文献中で定義された完備波動関数系を用いれば、その一次結合で速度ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ を表すことにより、境界 Γ 上の速度ポテンシャル $\phi(\mathbf{r}_0)$ についても、真の値に対する二乗平均誤差を十分小さな正数以下にすることができるという定理（以下、完備波動関数系の定理と呼ぶ）が証明されている。そこで、球波動関数の特異解 S_n^m は完備波動関数系であるため [32–34]、完備位波動関数系の定理が成立すると仮定し、 Γ 上の任意の点 $\mathbf{r}_0$ に対しても Eq. (4.3) をそのまま適用することとする。これらの結果、Eq. (4.4) は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m S_n^m(\mathbf{r}) &= \iint_{\Gamma} \left[\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^m(\mathbf{r}_s) R_n^m(\mathbf{r}_0) + A_n^m S_n^m(\mathbf{r}_0) \right\} \right. \\ &\quad \times \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n jk R_n^{-m}(\mathbf{r}_0) S_n^m(\mathbf{r}) \right\} \\ &\quad - \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r}_0)} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^m(\mathbf{r}_s) R_n^m(\mathbf{r}_0) + A_n^m S_n^m(\mathbf{r}_0) \right\} \\ &\quad \left. \times \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n jk R_n^{-m}(\mathbf{r}_0) S_n^m(\mathbf{r}) \right\} \right] dS_0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

さらに、Eq. (4.7) において球面調和関数の直交性を利用すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} A_l^s &= \iint_{\Gamma} \left[\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^m(\mathbf{r}_s) R_n^m(\mathbf{r}_0) + A_n^m S_n^m(\mathbf{r}_0) \right\} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} jk R_l^{-s}(\mathbf{r}_0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r}_0)} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^m(\mathbf{r}_s) R_n^m(\mathbf{r}_0) + A_n^m S_n^m(\mathbf{r}_0) \right\} jk R_l^{-s}(\mathbf{r}_0) \right] dS_0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

この Eq. (4.8) を未知の展開係数 A_n^m に関して整理すれば、

$$A_l^s - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m (X_{ln}^{sm} + Y_{ln}^{sm}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^m(\mathbf{r}_s) (\tilde{X}_{ln}^{sm} + \tilde{Y}_{ln}^{sm}) \quad (4.9)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} X_{ln}^{sm} &= jk \iint_{\Gamma} S_n^m(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} R_l^{-s}(\mathbf{r}_0) dS_0 \\ Y_{ln}^{sm} &= \iint_{\Gamma} \frac{k\omega\rho}{Z(\mathbf{r}_0)} S_n^m(\mathbf{r}_0) R_l^{-s}(\mathbf{r}_0) dS_0 \\ \tilde{X}_{ln}^{sm} &= jk \iint_{\Gamma} R_n^m(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} R_l^{-s}(\mathbf{r}_0) dS_0 \\ \tilde{Y}_{ln}^{sm} &= \iint_{\Gamma} \frac{k\omega\rho}{Z(\mathbf{r}_0)} R_n^m(\mathbf{r}_0) R_l^{-s}(\mathbf{r}_0) dS_0 \end{aligned}$$

とした。Eq. (4.9) において、無限級数項を適当な次数 N で打ち切り、 $l = 0, 1, 2, \dots, N$ 、 $s = -l, \dots, l$ と変化させれば、 $(N+1)^2$ 個の未知の展開係数 A_n^m に関するマトリクス方程式が得られる。

4.2 数値計算例

ここでは、以下に示す項目について数値計算を行い、BEM による計算結果との比較から、提案手法の数値特性について検証する。

- 散乱波の指向特性
 - 打ち切り次数 N の設定
 - 障害物近傍に関する検証
 - 障害物のアスペクト比に関する検証
- 散乱波の周波数応答関数
- 計算コスト

解析対象となる障害物形状の設定に関しては、前章において提案した最小二乗法を用いた準理論解析手法と同様に、球波動関数を利用しているため、障害物の形状が球形に近いものであるほど提案手法の特性が顕著に現れると予想される。そこで、前章と同様に Fig. 4.2 に示すような、障害物形状が有限長円筒である場合の散乱音場について扱う。なお、提案手法による解析において、有限長円筒表面上での面積分は理論解析的に実行出来る部分があり、最終的には θ_0 のみを積分変数とする線積分として計算できる [17]。そこで、提案手法による解析では、 $\theta_0 = 0 \sim \pi$ の範囲を $\pi/4$ ずつに区切り、それぞれの区間を 16 点の Gauss-Legendre 積分を用いて数値積分した。一方で、BEM による解析では三角形一定要素を用いて境界を分割し、それぞれの三角形一定要素における面積分の計算には 9 点の Gauss 積分を用いた。

また、数値計算に用いた計算機環境は以下のとおりである。

- CPU: Intel Core i7 2.80 GHz
- Memory: 8 GB
- Language: Python

4.2.1 散乱波の指向特性

散乱波の指向特性について計算し、BEM による計算結果との比較から提案手法の妥当性について確認する。このとき、音源と観測点の設定は、音源を $\mathbf{r}_s = (10, 0, 0)$ に設置し、観測点を x - y 平面上の原点から r の距離における $\varphi = 0 \sim 180^\circ$ の範囲に設定した観測点 (Fig. 4.3 (a), case 1) と、音源を $\mathbf{r}_s = (0, 0, 10)$ に設置し、観測点を x - z 平面上の原点から r の距離における $\theta = 0 \sim 180^\circ$ の範囲に設定した観測点 (Fig. 4.3 (b), case 2) の 2 種類を設定した。

まずは有限長円筒のサイズを直径 $2a = 1.0$ 、高さ $2b = 1.0$ とし、case 1, case 2 のそれぞれの観測点については $r = 5.0$ とした場合の散乱波の指向特性を計算した。このとき、BEM による計算では 1312 要素の三角形一定要素 (最大メッシュ長 $l_{max} : 0.104$ [m]) を用い、提案手法による計算では打ち切り次数を $N = 20$ とした。Fig. 4.4 に case 1 における計算結果を、Fig. 4.5 に case 2

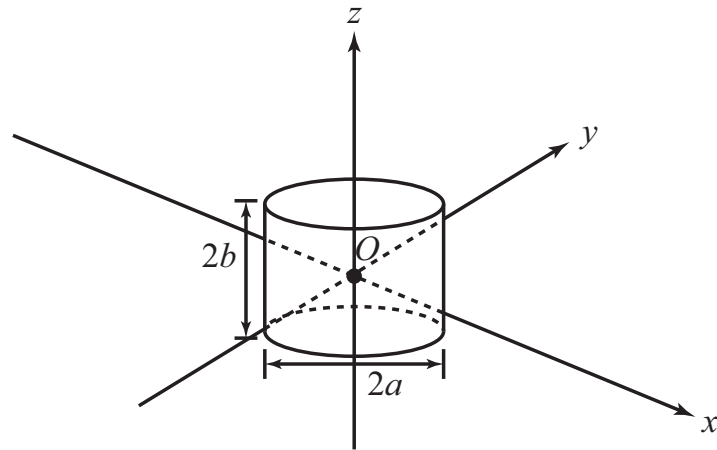


Fig. 4.2 解析対象とした有限長円筒による音場

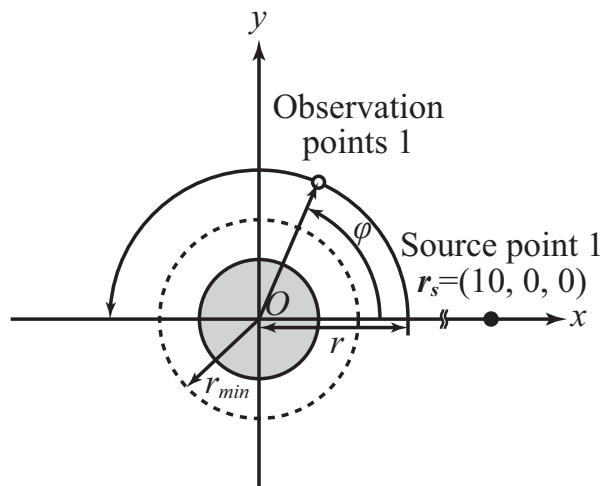
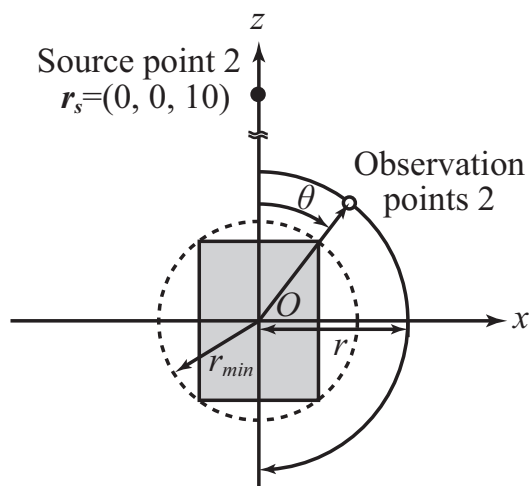
(a) x - y 平面における音源と観測点の設定 (case 1)(b) x - z 平面における音源と観測点の設定 (case 2)

Fig. 4.3 解析対象とした有限長円筒による音場における音源と観測点の設定

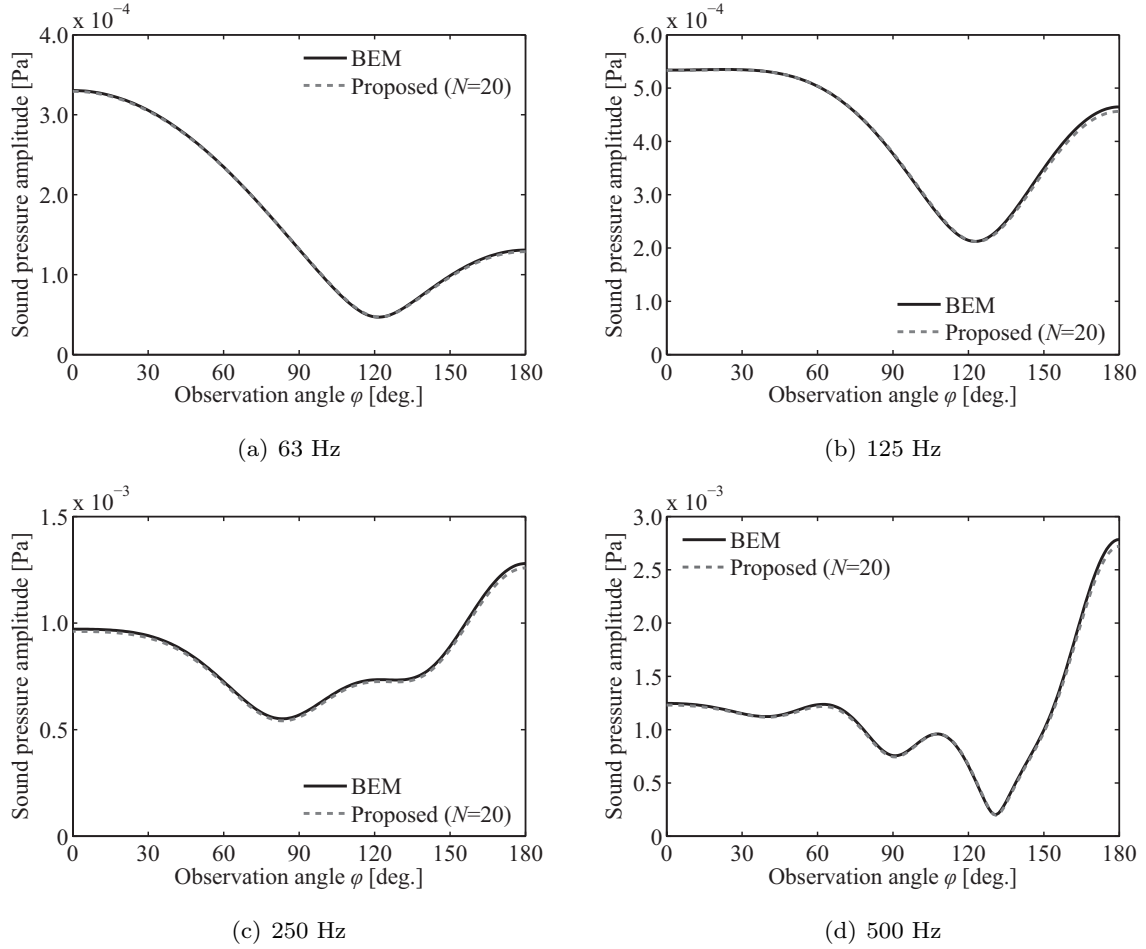


Fig. 4.4 直径 $2a = 1$ ，高さ $2b = 1$ の有限長円筒による散乱波の指向特性の計算結果 (case 1)

における計算結果をそれぞれ示す。Fig. 4.4 および Fig. 4.5 より，どちらの設定に関しても提案手法による計算結果は BEM による計算結果と非常によく一致しており，提案手法を用いることで妥当な計算結果を得ることができるといえる。特に，case 1 における計算結果では，前章で扱った最小二乗法を用いた準理論解析手法よりも BEM による計算結果との誤差が小さく，最小二乗法を用いた準理論解析手法よりも誤差に関して優位であるといえる。

また，文献 [38] を参考に，相対誤差の平均値 ε を次式を用いて求め，提案手法による計算結果の収束について調べた。

$$\varepsilon = \frac{1}{181} \sum_{n=1}^{181} \frac{|p_{ref}(\mathbf{r}_n) - p(\mathbf{r}_n)|}{|p_{ref}(\mathbf{r}_n)|} \quad (4.10)$$

ここで， p_{ref} : BEM により求めた音圧， p : 提案手法により求めた音圧， $\mathbf{r}_n$: n 番目の観測点である。Fig. 4.6 と Fig. 4.7 に，case 1，case 2 それぞれの場合における提案手法において打ち切り次数 N を変化させた場合の相対誤差の平均値の変化を示す。Fig. 4.6 および Fig. 4.7 より，打ち切り次数 N を大きくすることで提案手法による計算結果は収束し，BEM による計算結果との相対誤差の平均値が小さくなっていく様子が確認できる。また，case 1 と case 2 のどちらの設定に関

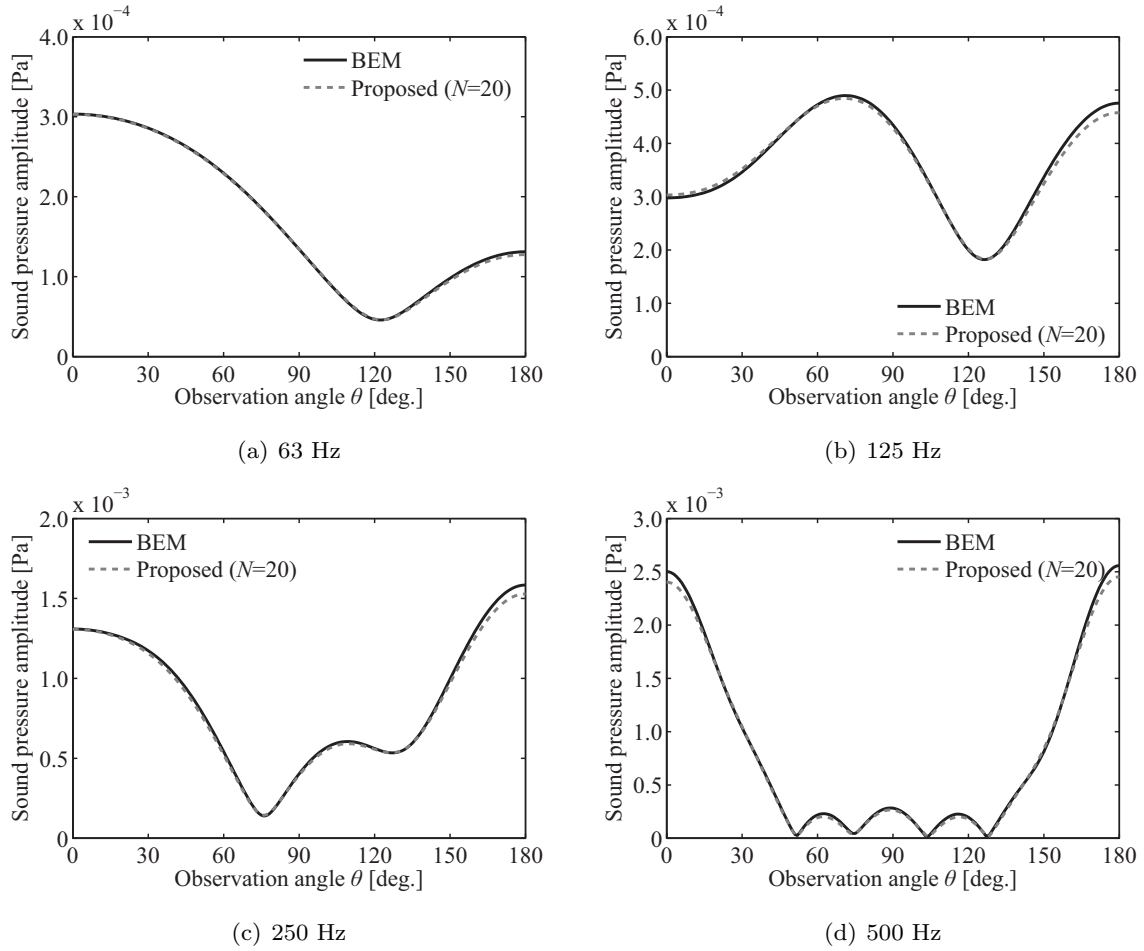


Fig. 4.5 直径 $2a = 1$ ，高さ $2b = 1$ の有限長円筒による散乱波の指向特性の計算結果 (case 2)

しても、打ち切り次数 N が大きくなることで提案手法による計算結果は収束し、十分な精度の計算結果が得られるといえるが、全体的に case 1 における結果のほうが case 2 における結果よりも誤差が小さい。これは case 1 で設定した観測点における計算結果では、円筒面の曲率が球面と一定であることから、case 1 のほうが case 2 よりも球波動関数による展開表現で散乱波を表現しやすいためであると考えられる。

さらに、提案手法を用いて計算する際に、十分な精度の計算結果が得られるの打ち切り次数 N の設定について考える。提案手法では解析に必要となる未知数の数は $N_p = (N + 1)^2$ となるため、計算コストは打ち切り次数 N に依存する。そのため解析対象に対して最適な打ち切り次数 N を設定することが重要となる。一般的に、球波動関数による展開式 Eq. (4.3) が収束するためには次の関係式を満たす必要があることが知られている [47]。

$$N \geq 2kr_{min} \quad (4.11)$$

Eq. (4.11) を用いて直径 $2a = 1$ ，高さ $2b = 1$ の有限長円筒による散乱音場における最小の打ち切り次数 N_{min} を算出すれば、63, 125, 250, 500 Hz の解析周波数に対する最小の打ち切り次数はそれぞれ、 $N_{min} = 2, 4, 7, 13$ となる。これらを Fig. 4.6, 4.7 の結果と照らし合わせると、いず

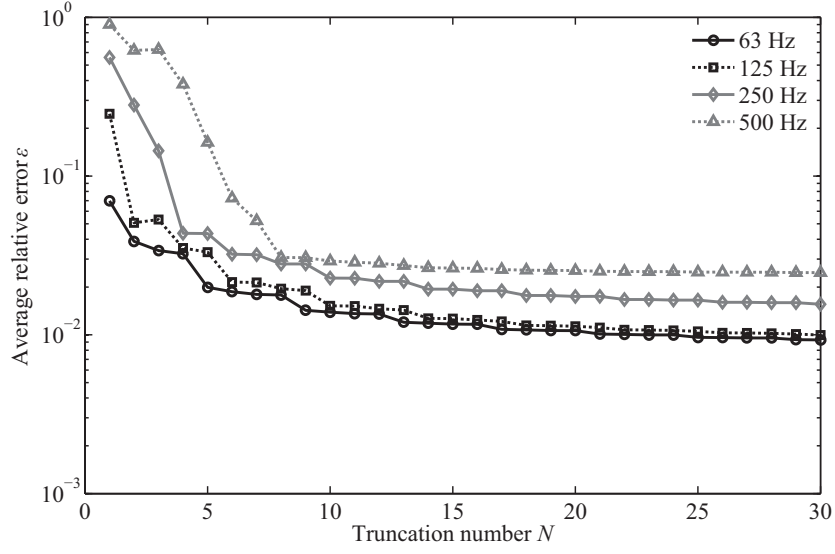


Fig. 4.6 打ち切り次数に対する相対誤差の平均値の変化 (case1)

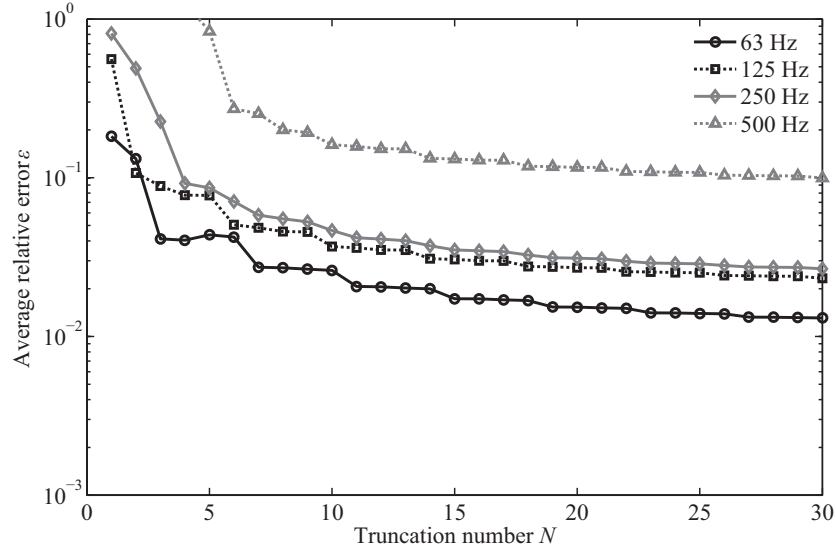


Fig. 4.7 打ち切り次数に対する相対誤差の平均値の変化 (case2)

れの解析周波数においても Eq. (4.11) より算出した最小の打ち切り次数 N_{min} における計算結果は収束の過程にあり，十分に収束した計算結果を得るためには最小の打ち切り次数 N_{min} よりも大きな打ち切り次数を設定する必要があるといえる。また，文献 [47] では打ち切り次数 N の設定式として，単精度においては，

$$N = 2kr_{min} + 5 \ln(2kr_{min} + \pi) \quad (4.12)$$

また倍精度においては，

$$N = 2kr_{min} + 10 \ln(2kr_{min} + \pi) \quad (4.13)$$

とすれば十分な精度の計算結果が得られるとしている。そこで、63, 125, 250, 500 Hz の解析周波数に対して Eq. (4.12) より打ち切り次数 N を算出すれば、 $N = 10, 13, 18, 27$ となる。同様に、Eq. (4.13) より打ち切り次数 N を算出すれば、 $N = 18, 21, 30, 41$ となる。これらを Fig. 4.6 および 4.7 の結果と照らし合わせると、どちらの設定式を用いた場合でも計算結果は十分収束しており、精度に関しても問題ないといえる。一方で、Eq. (4.13) を打ち切り次数の設定式として用い算出した打ち切り次数 N は、提案手法の計算精度に対して多すぎるともいえる。

以上より、最低でも打ち切り次数の設定式として Eq. (4.12) を用いて算出した打ち切り次数 N を用いれば、提案手法を用いた際に十分に収束し、精度に関しても問題のない計算結果が得られるといえる。

4.2.2 障害物近傍に関する検証

観測点を障害物近傍に設定した場合の提案手法の計算精度について検証する。提案手法では、完備波動関数系の定理が成り立つとして定式化しているものの、Eq. (4.3) は原理的に障害物に外接する球の外部で成立するため、障害物表面および障害物に外接する球の内部にある観測点において精度の良い計算結果を得るのは難しいと予想される。そこで、音源と観測点の設定として Fig. 4.3 (a) を用い、観測点の位置を原点からそれぞれ $r = 0.6$ (障害物に外接する球の内部)、 0.707 (障害物に外接する球上)、 1.0 (障害物に外接する球の外部) とした場合の散乱波の指向特性をそれぞれ計算し、BEM による計算結果との相対誤差の平均値を求めた。

障害物近傍のそれぞれの観測点において相対誤差の平均値を算出した結果を Fig. 4.8 に示す。Fig. 4.8 より、(a) の外接する球の内部に観測点を設定した場合では、提案手法による計算結果と BEM との誤差は大きく、また計算結果が収束していく様子も見られないことから、提案手法を用いて障害物に外接する球の内部に観測点を設定して妥当な計算結果を得ることはできないといえる。また、(b) の外接する球上観測点を設定した場合の結果では、(a) の外接する球の内部に観測点に設定した場合と比べて計算結果における誤差は改善しているものの、63 Hz における結果に見られるように、打ち切り次数 N を大きくしていくことで計算結果が一様に収束していくとはいえず、特に解析周波数が 63, 125 Hz である場合に不安定である。前章で提案した最小二乗法を用いた準理論解析手法では、このような収束において不安定な様子が確認されなかったことから、 $r \leq r_{min}$ である範囲については最小二乗法を用いた準理論解析手法のほうが安定した計算結果が得られる。一方で、(c) の外接する球の外部に観測点を設定した場合の結果では、提案手法の計算結果と BEM との誤差も小さく、また打ち切り次数 N を大きくしていった際も一様に収束していく様子が確認できる。

以上より、観測点の設定に関して、 $r \leq r_{min}$ の範囲においては提案手法を用いて安定した計算結果を得ることができないため、提案手法では障害物表面における速度ポテンシャルなどは求めることができないといえる。そのため、 $r \leq r_{min}$ の範囲において安定した計算結果を得たい場合は前章で提案した最小二乗法を用いた準理論解析手法を用いるほうがよい。一方で、 $r > r_{min}$ の範囲であれば、提案手法を用いて精度のよい計算結果を得ることができる。

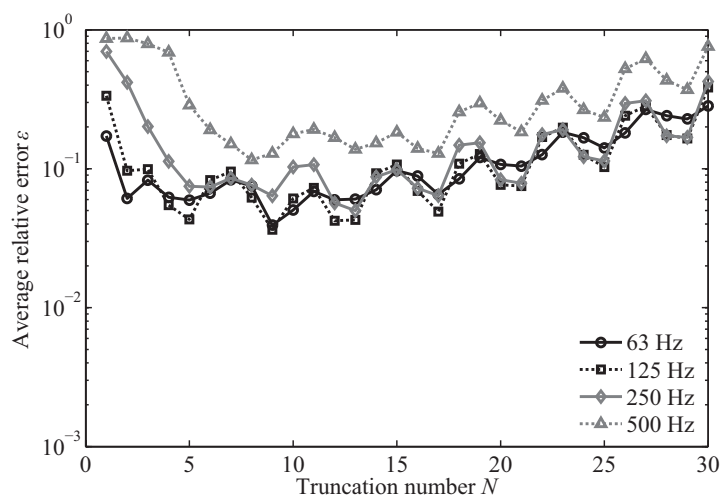
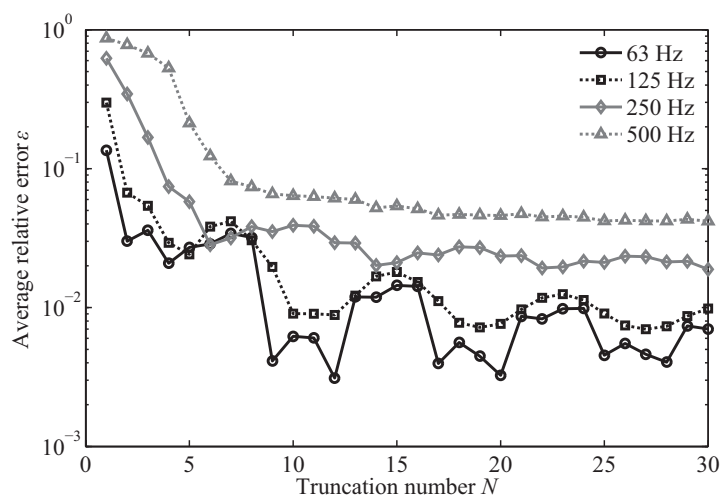
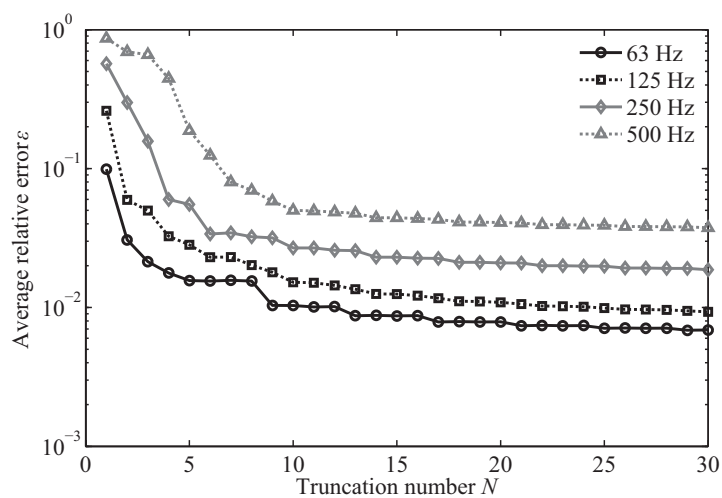
(a) $r = 0.6$ (外接する球の内部)(b) $r = 0.707$ (外接する球上)(c) $r = 1.0$ (外接する球の外側)

Fig. 4.8 観測点を変化させた場合の相対誤差の平均値

4.2.3 障害物のアスペクト比に関する検証

これまでの計算結果において用いてきた有限長円筒の形状は、直径と高さの比（以下、アスペクト比と呼ぶ）が $a : b = 1 : 1$ であり、最も球形に近いことから、精度が最も良い計算結果が得られる障害物形状であったと考えられる。そこで、有限長円筒のアスペクト比を変化させ、障害物形状が球形から離れた場合について計算を行うことで、提案手法を用いて妥当な計算結果が得られる範囲について検証する。ここでは有限長円筒のアスペクト比として、Table. 4.1 に示す 4 種類を設定し、Fig. 4.3 の case 1 および case 2 において、観測点を $r = 5.0$ とした場合の散乱波の指向特性を計算する。

まずは Table. 4.1 (a) の直径 $2a = 0.5$ 、高さ $2b = 1.0$ の有限長円筒の場合について検証する。ここで、BEM による解析では 1312 個の三角形一定要素（最大メッシュ長 $l_{max} : 0.074$ [m]）を用いた。Fig. 4.9 に case 1 における計算結果を、Fig. 4.11 に case 2 における計算結果をそれぞれ示す。このとき case 1 および case 2 の計算結果はどちらも、提案手法を用いて妥当な計算結果が得られているといえる。また、Fig. 4.10 と Fig. 4.12 に打ち切り次数に対する相対誤差の平均値を示す。ここで、提案手法による計算結果は、打ち切り次数 N が大きくなることで計算結果の誤差が増大し、妥当な計算結果が得られなくなることが読み取れる。また、有限長円筒の寸法においてアスペクト比を $1 : 1$ とした Fig. 4.6 と比較して Fig. 4.10 における結果は全体的に誤差の程度も大きい。このことから、有限長円筒の寸法が細長くなり球形から離れたことで、提案手法による計算結果に含まれる誤差が大きくなったといえる。また、打ち切り次数が大きくなった場合に誤差も大きくなる原因としては、マトリクス方程式の係数行列における条件数の影響が考えられる。そこで、実際に直径 $2a = 0.5$ 、高さ $2b = 1.0$ の有限長円筒による散乱音場における、係数行列の条件数について調べる。このとき、係数行列には音源点の情報は含まれないため、case 1, case 2 で係数行列は同じである。また、条件数は次式を用いて求めた。

$$\kappa(\mathbf{L}) = \|\mathbf{L}\| \|\mathbf{L}^{-1}\| \quad (4.14)$$

ここで、 $\|\cdot\|$ は行列のノルムである。Table. 4.2 に直径 $2a = 0.5$ 、高さ $2b = 1.0$ の有限長円筒による散乱音場の解析における係数行列の条件数を示す。Table. 4.2 より、打ち切り次数 N が大きくなることで、係数行列の条件数が大きくなることが確認できる。また、打ち切り次数 N が同じ場合においても、解析周波数が低いほど、条件数が大きくなることも確認できる。一般に、係数行列の条件数が大きすぎる状態は悪条件と呼ばれ、この場合にはマトリクス方程式の解に含まれる誤

Table 4.1 有限長円筒の寸法の設定

	寸法	アスペクト比
(a)	$2a = 0.5, 2b = 1$	1:2
(b)	$2a = 0.25, 2b = 1$	1:4
(c)	$2a = 1, 2b = 0.5$	2:1
(d)	$2a = 1, 2b = 0.25$	4:1

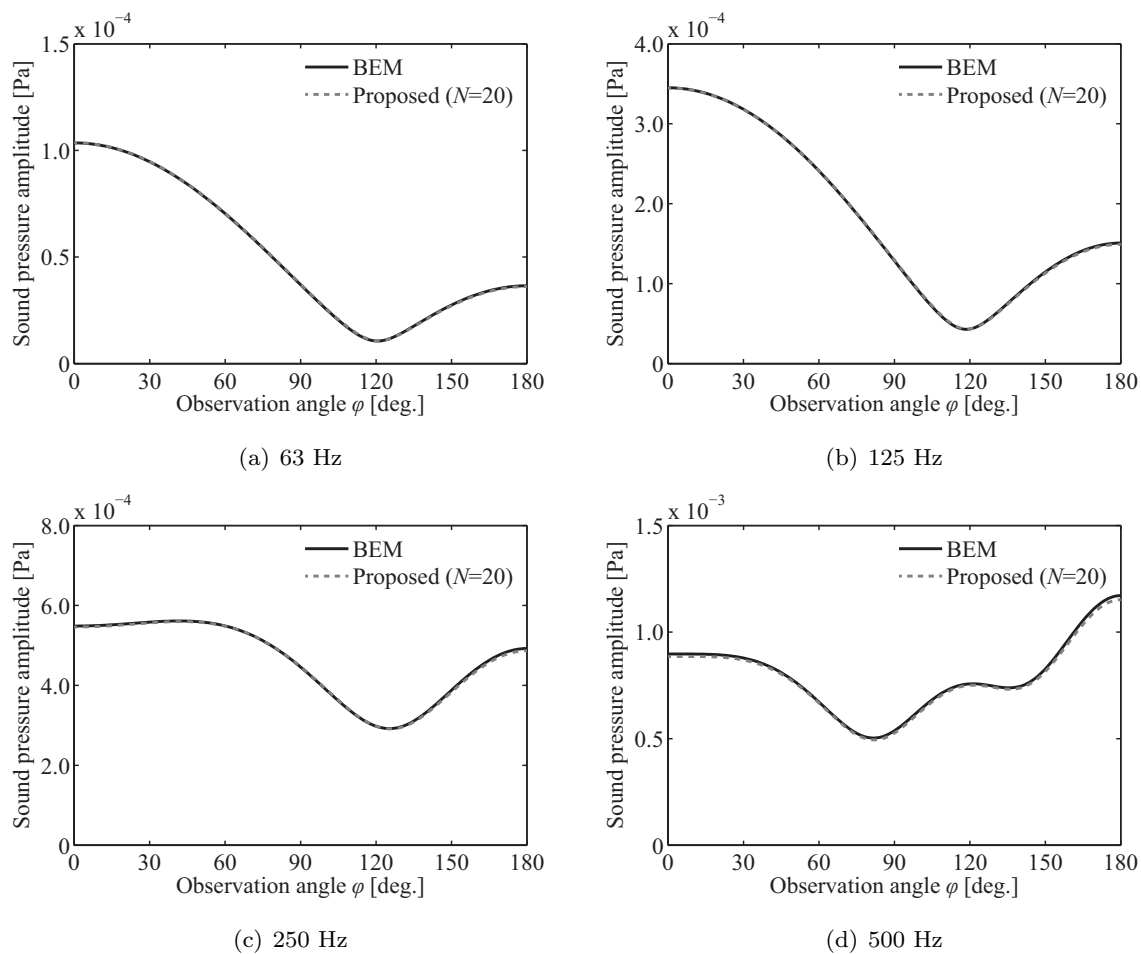


Fig. 4.9 直径 $2a = 0.5$, 高さ $2b = 1.0$ の有限長円筒による散乱波の指向特性の計算結果 (case 1)

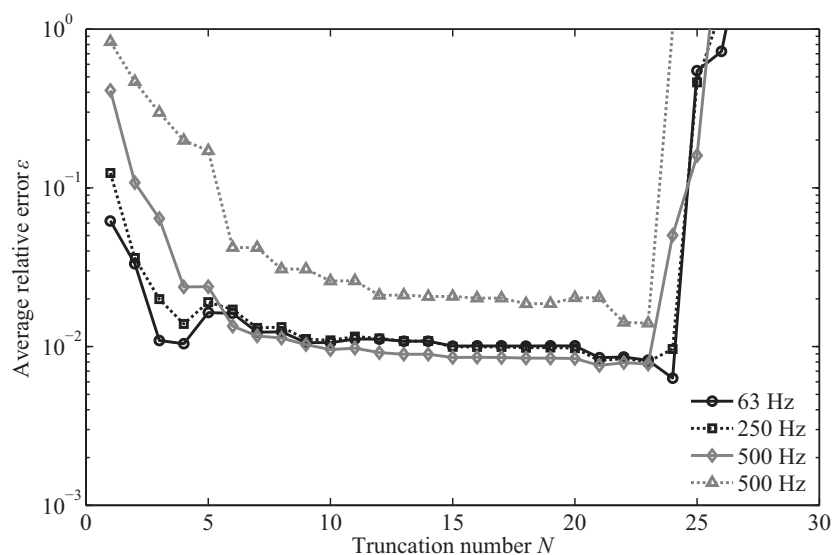


Fig. 4.10 直径 $2a = 0.5$, 高さ $2b = 1.0$ の有限長円筒による散乱波の指向特性の計算結果における打ち切り次数に対する相対誤差の平均値 (case 1)

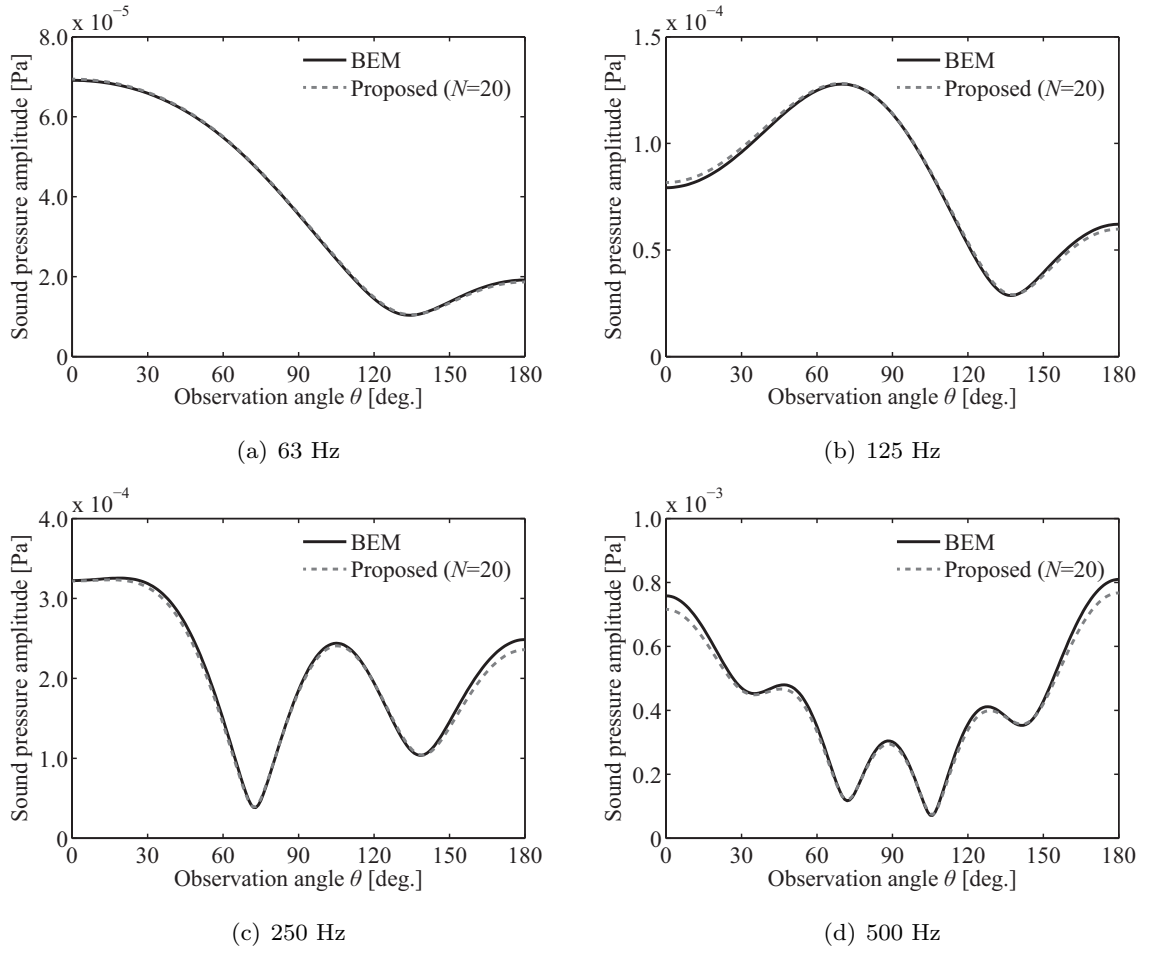


Fig. 4.11 直径 $2a = 0.5$, 高さ $2b = 1.0$ の有限長円筒による散乱波の指向特性の計算結果 (case 2)

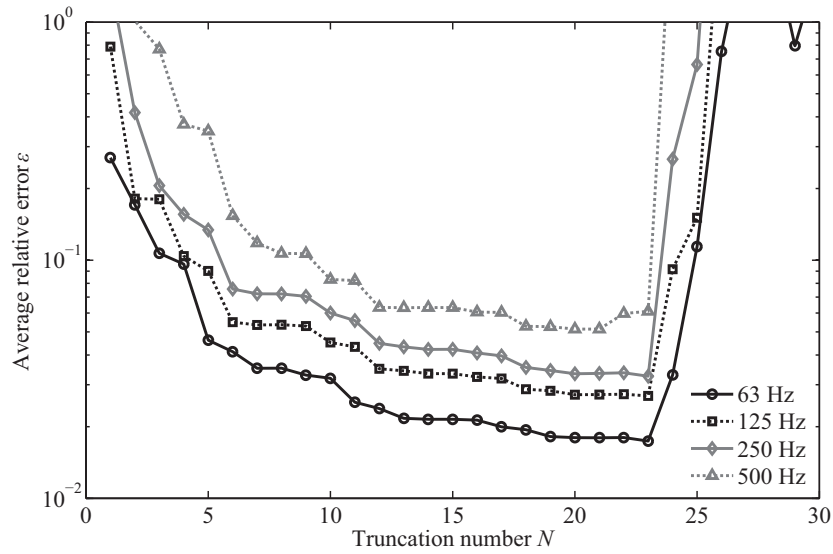


Fig. 4.12 直径 $2a = 0.5$, 高さ $2b = 1.0$ の有限長円筒による散乱波の指向特性の計算結果における打ち切り次数に対する相対誤差の平均値 (case 2)

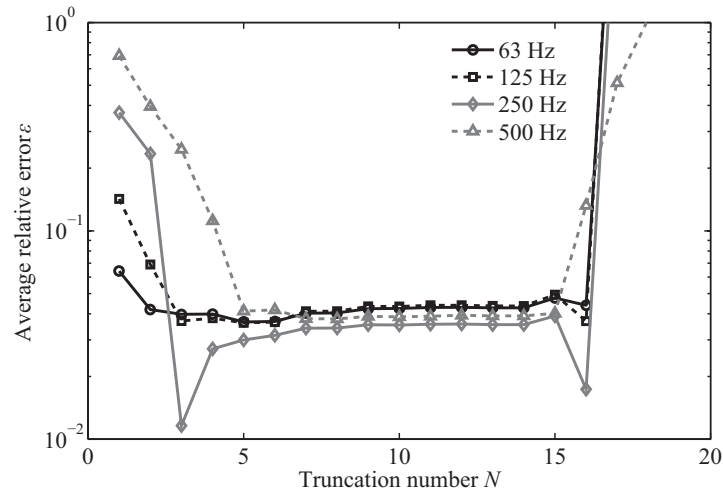
Table 4.2 直径 $2a = 0.5$, 高さ $2b = 1$ の有限長円筒による散乱音場の解析での係数行列の条件数

N	Condition number			
	63 Hz	125 Hz	250 Hz	500 Hz
5	1.240E+06	5.011E+03	2.971E+01	6.627E+00
10	1.126E+18	1.934E+13	2.625E+08	3.481E+03
15	5.353E+33	3.527E+25	2.333E+17	3.996E+09
20	7.578E+50	1.149E+40	4.377E+28	1.267E+18
25	4.606E+76	2.313E+62	5.900E+47	3.260E+33
30	1.596E+99	2.234E+82	4.273E+65	2.847E+48

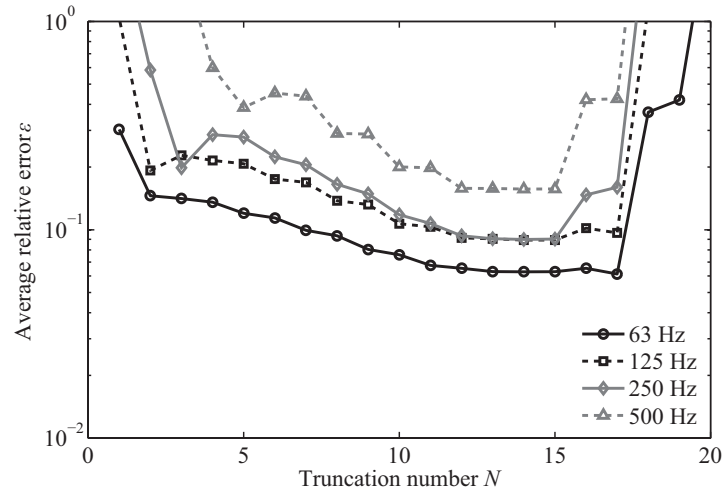
差が大きくなる [39]。係数行列が悪条件となった原因としては、積分計算における球 Neumann 関数の影響が挙げられる。球 Neumann 関数は、引数が小さな範囲においてその絶対値が非常に大きな値をとり、また次数が大きくなると絶対値が大きな値となる範囲も広がるという性質を持っている。そのため、障害物形状が細長くなったことで球 Neumann 関数の絶対値が大きな範囲において積分計算を行うことになり、係数行列において非常に大きな値をとる要素が現れる。その結果、悪条件のマトリクス方程式を解くことになり、打ち切り次数 N が大きくなることで誤差が増大したと考えられる。

次に、Fig. 4.13, 4.14 および 4.15 に、有限長円筒の寸法をそれぞれ Table. 4.1 の (b)～(d) とした場合の打ち切り次数に対する相対誤差の平均値を示す。このとき、BEM による解析ではそれぞれ、(b) では 320 個（最大メッシュ長 $l_{max} : 0.063$ [m]）、(c) では 952 個（最大メッシュ長 $l_{max} : 0.104$ [m]）、(d) では 736 個（最大メッシュ長 $l_{max} : 0.104$ [m]）の三角形一定要素を用いた。これらの結果においても、提案手法による計算結果において打ち切り次数 N が大きくなると誤差も大きくなる箇所を確認できる。また、有限長円筒のアスペクト比が 1:2 や 2:1 の場合と比べて、1:4 や 4:1 の場合のほうが、妥当な計算結果が得られる打ち切り次数の上限が小さくなっている。また、Table. 4.3, 4.4 および 4.5 に、それぞれの場合における係数行列の条件数の算出結果を示す。係数行列における条件数の算出結果においても、Table. 4.2 と同様に、打ち切り次数 N が大きくなると条件数も非常に大きな値となることが確認できる。さらに、全体的に有限長円筒のアスペクト比が 1:2 や 2:1 である場合よりも、1:4 や 4:1 である場合のほうが条件数は大きくなる。

以上より、提案手法では打ち切り次数 N が大きくなると係数行列の条件数が大きくなり、妥当な計算結果が得られない場合があることが分かった。また、障害物形状が球形から乖離するほど、妥当な計算結果が得られる打ち切り次数の上限が小さくなることも分かった。この原因としては、係数行列が悪条件になりやすいことに加え、障害物形状が球形から乖離することで散乱音場を球波動関数を用いて表現することが難しいことも関係していると考えられる。



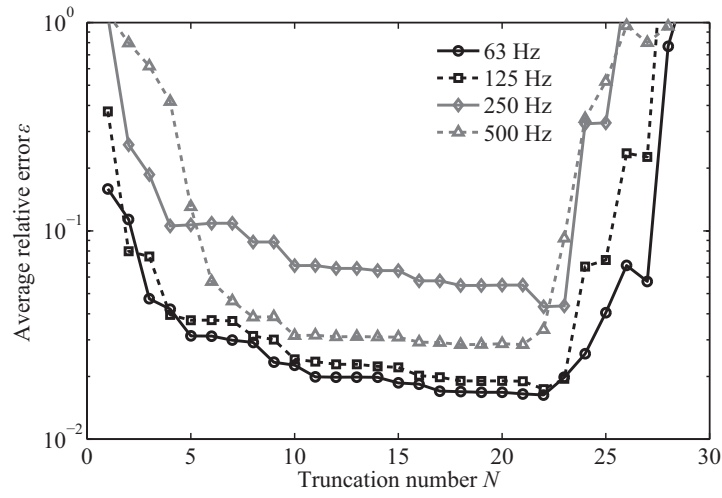
(a) case 1



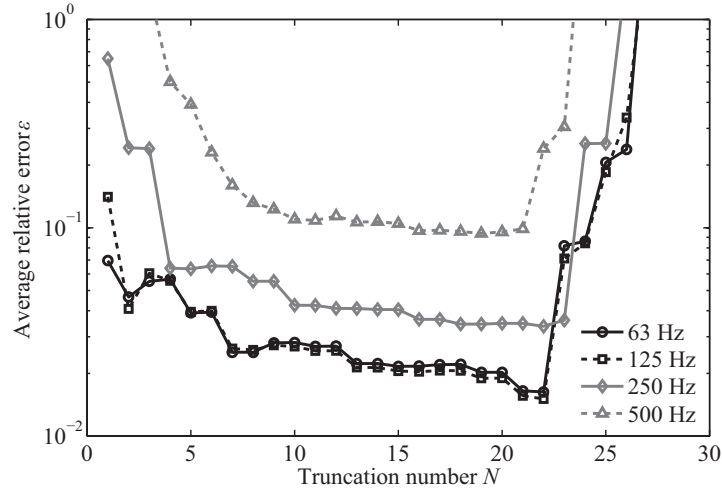
(b) case 2

Fig. 4.13 直径 $2a = 0.25$, 高さ $2b = 1.0$ の有限長円筒による散乱波の指向特性における相対誤差の平均値Table 4.3 直径 $2a = 0.25$, 高さ $2b = 1$ の有限長円筒による散乱音場の解析での係数行列の条件数

N	Condition number			
	63 Hz	125 Hz	250 Hz	500 Hz
5	2.572E+05	1.269E+03	1.284E+01	3.366E+00
10	1.016E+19	1.548E+14	1.361E+09	1.165E+04
15	4.725E+36	2.301E+28	9.621E+19	5.290E+11
20	5.357E+62	8.411E+51	5.743E+40	2.047E+30
25	3.604E+87	5.659E+73	8.014E+59	1.047E+46
30	1.820E+113	2.528E+96	8.073E+79	6.859E+62



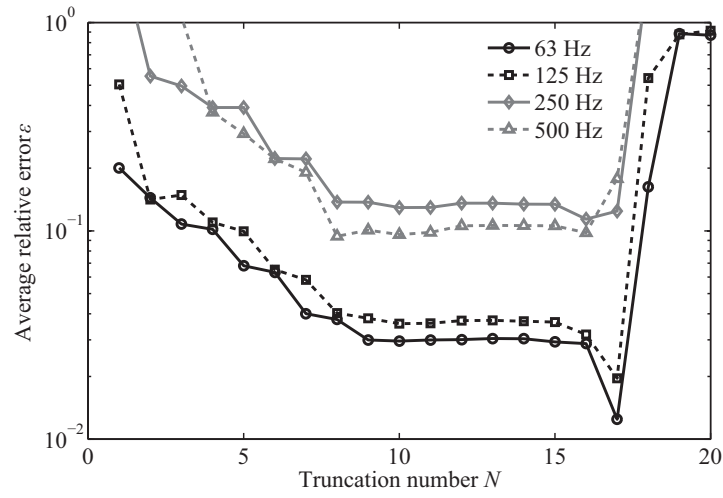
(a) case 1



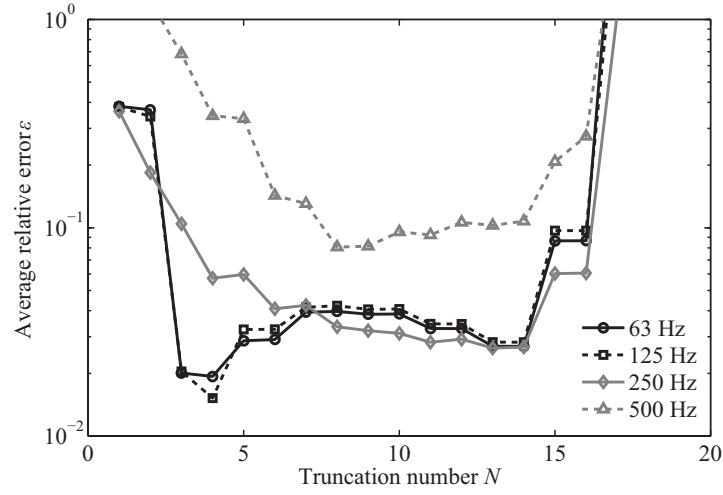
(b) case 2

Fig. 4.14 直径 $2a = 1.0$, 高さ $2b = 0.5$ の有限長円筒による散乱波の指向特性における相対誤差の平均値Table 4.4 直径 $2a = 1$, 高さ $2b = 0.5$ の有限長円筒による散乱音場の解析での係数行列の条件数

N	Condition number			
	63 Hz	125 Hz	250 Hz	500 Hz
5	2.216E+06	9.505E+03	3.672E+01	9.450E+00
10	4.023E+18	6.468E+13	6.663E+08	1.429E+03
15	1.868E+34	8.214E+25	5.396E+17	3.558E+09
20	6.369E+50	1.126E+40	1.358E+29	5.501E+17
25	1.811E+75	7.724E+60	7.587E+45	7.994E+32
30	3.257E+98	5.351E+81	2.667E+64	8.818E+46



(a) case 1



(b) case 2

Fig. 4.15 直径 $2a = 1.0$, 高さ $2b = 0.25$ の有限長円筒による散乱波の指向特性における相対誤差の平均値Table 4.5 直径 $2a = 1$, 高さ $2b = 0.25$ の有限長円筒による散乱音場の解析での係数行列の条件数

N	Condition number			
	63 Hz	125 Hz	250 Hz	500 Hz
5	4.074E+06	1.899E+04	6.913E+01	7.327E+00
10	4.748E+18	7.656E+13	8.152E+08	5.233E+03
15	2.486E+38	1.354E+30	3.583E+21	7.085E+12
20	3.192E+61	4.164E+50	2.266E+39	1.404E+28
25	9.185E+87	2.841E+73	6.034E+58	4.299E+44
30	2.298E+111	3.384E+94	2.031E+77	2.294E+60

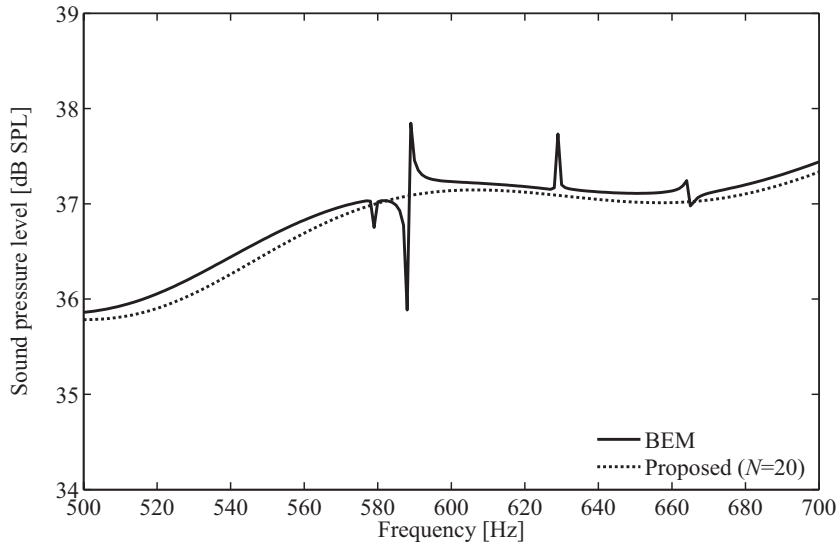


Fig. 4.16 有限長円筒直径（直径 $2a = 1$ ，高さ $2b = 1$ の）による散乱波の周波数応答関数

4.2.4 散乱波の周波数応答関数

提案手法を用いて散乱波の周波数応答関数を計算し、解の非一意性のような問題が生じるのかどうかを確認する。このとき、有限長円筒の寸法は直径 $2a = 1$ ，高さ $2b = 1$ ，音源位置 $\mathbf{r}_s = (10, 0, 0)$ とし、観測点 $\mathbf{r} = (5, 0, 0)$ における周波数応答関数を計算した。また、提案手法による計算結果では打ち切り次数 $N = 20$ とし、BEM による計算結果では 2744 個の三角形一定要素（最大メッシュ長 $l_{max} : 0.079$ [m]）を用いた。

Fig. 4.16 に散乱波の周波数応答関数の計算結果を示す。一般的な BEM には解の非一意性の問題があるため、BEM による計算結果では計算精度が低下している周波数が第 3 章における周波数応答関数での検討と同様に、500～700 Hz の間における有限長円筒内部の Dirichlet 周波数は、 $f_d = 578.8, 587.5, 627.9, 664.5$ [Hz] である。ここで、提案手法による計算結果では、解の非一意性による問題が起こらず滑らかな周波数応答関数が計算できている。提案手法においても境界面における積分方程式を用いているにも関わらず、BEM のような精度の低下が生じない理由としては、定式化において速度ポテンシャルを球波動関数を用いた展開表現で表し、また直交性を利用したことで、解くべきマトリクス方程式には観測点に関する情報が含まれないことが挙げられる。そのため、一意な解を求めることができないといった数学的な問題が起きず、全ての周波数にわたって安定した計算結果が得られる。

以上より、提案手法を用いることで、一般的な BEM のように解の非一意性による影響を受けることなく、滑らかな周波数応答関数を計算することができるといえる。

4.2.5 計算コスト

提案手法においてマトリクス方程式を得るために必要な計算コストについて考える。一般的な BEM における計算コストは、計算に用いる要素数を N_b とすれば、マトリクス方程式を得るために必要となる計算時間とメモリのオーダーは共に $O(N_b^2)$ となる。提案手法では計算コストは打ち切り次数 N に依存し、この打ち切り次数は Eq. (4.12) のように設定する必要があるため、計算コストは障害物の寸法と解析周波数に依存しているといえる。

まずは、提案手法においてマトリクス方程式を得るための必要メモリについて考える。提案手法における未知数 $N_p = (N + 1)^2$ であるため、そのオーダーは $O(N_p^2) \approx O(N^2)$ である。このことから、必要メモリにおいて提案手法のほうが BEM よりも有利な状況としては、解析に用いる未知数の個数が BEM よりも少なく済む状況であるといえる。

次に提案手法においてマトリクス方程式を得るために必要な計算量について考える。計算量についても、提案手法における未知数 N_p は、 $N_p = (N + 1)^2$ となることから、その計算量は $O(N_p^2) \approx O(N^2)$ のオーダーとなる。計算コードを実行した際のマトリクス方程式を得るために要した計算時間を実際に計測した結果を Fig. 4.17 に示す。これより、提案手法による計算時間はほぼ N^2 に比例している様子が確認できる。また、有限長円筒のように対称性をもつ障害物である場合、被積分関数における偶奇性などを利用することで、全ての要素について積分計算を行うことなく係数行列を得ることができる。以上のような被積分関数における性質を用いて計算コードを最適化した場合に要した計算時間を Fig. 4.17 に点線で示す。この結果より、最適化することで計算時間を大幅に低減することが可能であるといえる。また、BEM についても実際に計算コードを実行した際にマトリクス方程式を得るために必要として計算時間を計測し、未知数の個数が同じである場合について比較を行った。その結果を Fig. 4.18 に示す。これより、BEM において必要とした計算時間は N_b^2 に比例している様子が確認できる。また、提案手法における計算時間は最適化を適用していない場合には、BEM よりも多くの計算時間を要する。これは、提案手法では係数行列の要素それぞれについて障害物表面全体にわたって積分計算をする必要があり、積分計算にかかる負荷が BEM よりも大きいことが原因として挙げられる。一方で、提案手法において最適化を適用した場合は、提案手法による計算時間の計測値は BEM による計算時間の計測値よりも傾きが小さく、ある未知数の個数以上では両手法で用いる未知数の個数が同じ場合に、提案手法のほうが短い計算時間でマトリクス方程式が得られるといえる。

そこで、計算コストに関して提案手法が BEM よりも有利な状況について考える。一般に BEM を用いて解析を行う場合は、少なくとも分割に用いる要素の最大長を解析周波数の $1/5 \sim 1/6$ 程度にする必要があるとされている [2]。また、要素のサイズをある程度揃える必要や、障害物形状を適切に表現できている必要があるなど、分割に関しての制約がある。そこで、BEM において十分な計算結果が得られる要素数について調べる。今回用いた直径 $2a = 1$, $2b = 1$ の有限長円筒による散乱音場の解析において音源点と観測点を、Fig. 4.3 (a) case 1 において $r = 5$ とした場合について、要素数を変化させた場合の相対誤差の変化を Eq. (4.10) を用いて算出した。その結果を Fig. 4.19 に示す。このとき Fig. 4.6 において、計算値が十分収束した範囲においても最大で誤差

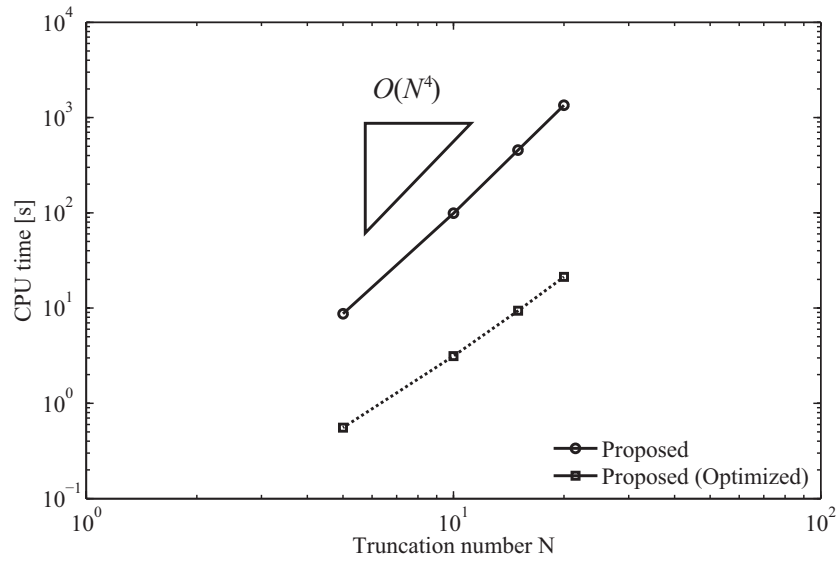


Fig. 4.17 提案手法においてマトリクス方程式を得るために要した計算時間

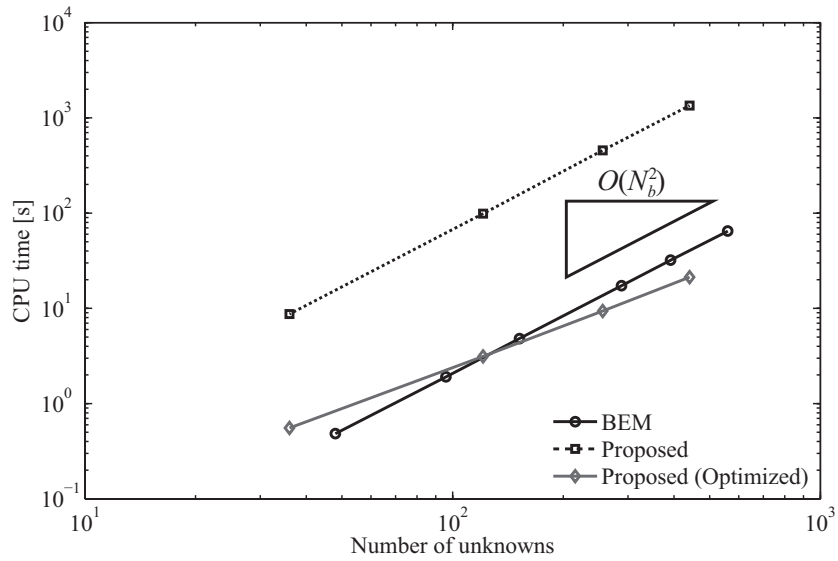


Fig. 4.18 提案手法においてマトリクス方程式を得るために要した計算時間の BEM との比較

が 3% 程度あることから, Fig. 4.19 においても参考値として用いてきた 1312 要素を用いた場合の計算結果との相対誤差の平均値が初めて 3% 以下となる要素数を調べると, 63, 125, 250, 500 Hz の解析周波数に対してそれぞれ $N_b = 288, 288, 392, 728$ となる。また, 提案手法では Eq. (4.12) より 63, 125, 250, 500 Hz の解析周波数に対して打ち切り次数を $N = 10, 13, 18, 27$ と設定すればよいため, 解析に必要な未知数の個数は $N_p = 121, 196, 361, 784$ となる。このことから, BEM と提案手法で解析に必要な次数を比較すると, 今回用いた解析対象に対しては解析周波数が低い場合には提案手法を用いて BEM と同程度かそれ以下の未知数で十分な計算結果が得られる

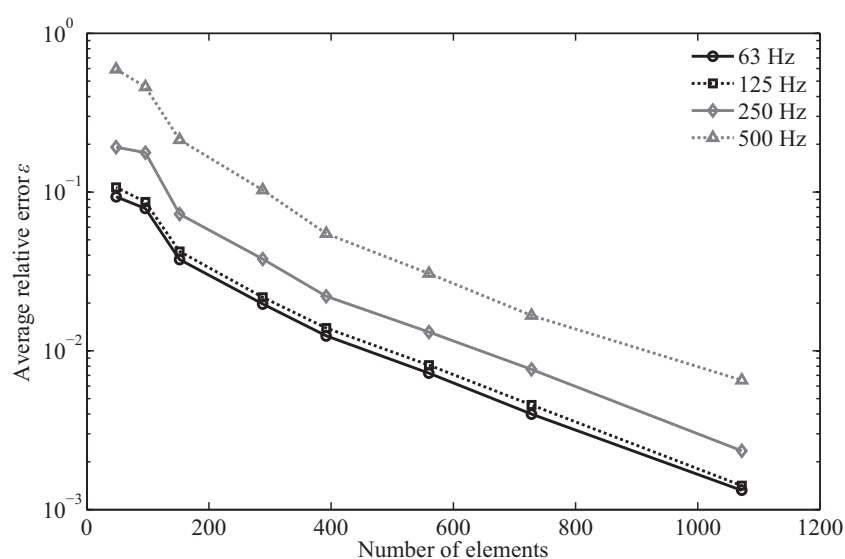


Fig. 4.19 BEM において要素数を変化させた場合の相対誤差の平均値

といえる。一方で解析周波数が高くなると、提案手法のほうが BEM よりも多くの未知数を必要とする場合がある。そのため、解析周波数によっては提案手法を用いたほうが計算時間についても BEM より有利な場合があるといえる。

以上のことから、マトリクス方程式を得るために必要なメモリについては、解析周波数が低い場合のほうが BEM よりも解析に必要な未知数の個数が少なくて済む場合があり、BEM に対して有利な状況となりえる。また、マトリクス方程式を得るために必要となる実際の計算時間については、提案手法のほうが BEM よりも積分計算に必要とする計算時間が大きいため、基本的には不利であるといえる。しかし、障害物形状に関して対称性などを用いて、積分計算を理論的に進めることのできる部分がある場合には、計算時間についても BEM より有利となる場合がある。

4.3 まとめ

本章では，自由空間中に単一の障害物が配置されている場合における散乱音場の解析手法として，音場を球波動関数を用いた展開表現で表し，その展開係数については Kirchhoff-Huygens の公式を用いてマトリクス方程式を導き，数値的に求める準理論解析手法をした。また，提案手法を用いた解析例として，自由空間中に配置された有限長円筒による散乱音場について計算を行い，BEM よりによる計算結果との比較から提案手法の数値特性について検証を行った。その結果，以下に示すような結果が得られた。

- (1) 提案手法を用いて遠方場を計算する場合，計算に用いる打ち切り次数 N を大きくしていくことで計算結果は収束し，BEM と同程度の精度で計算結果を得ることができる。
- (2) 提案手法を用いる際の打ち切り次数 N の設定としては，設定式

$$N = 2kr_{min} + 5 \ln(2kr_{min} + \pi)$$

より算出した打ち切り次数を用いれば十分な精度の計算結果を得ることができる。

- (3) 障害物表面や障害物に外接する球の内部における速度ポテンシャルを精度良く計算することはできない。したがって，妥当な計算結果が得られる範囲は障害物に外接する球の外部に限定される。
- (4) 障害物形状が計算精度に与える影響は大きく，障害物形状が球形に近い場合のほうが精度がよい。また，障害物形状が球形から乖離しているほど係数行列における条件数が大きくなり，妥当な計算結果が得られる打ち切り次数の上限が小さくなる。
- (5) 提案手法では，一般的な BEM のように解の非一意性による影響を受けることがなく，滑らかな周波数応答関数を得ることができる。
- (6) 提案手法における計算コストは BEM と比較して必ずしも有利とはいえない。特に，計算時間については提案手法では積分計算にかかる時間が大きいことから，BEM よりも基本的には不利である。提案手法のほうが BEM よりも計算コストの面で有利である状況としては，
 - 解析周波数が低い場合
 - 障害物形状における対称性などを利用することで，理論的に積分計算を進めることが出来る場合
 などである。

第 5 章

多重極再展開を用いた多重散乱音場の 準理論解析手法

本章では，第 4 章で定式化した準理論解析手法をもとに，音場の展開表現に多重極再展開法を導入することで，複数の障害物による多重散乱音場の準理論解析手法を定式化する。また，提案手法による計算結果と境界要素法による計算結果との比較から，提案手法の数値特性について検証する。

5.1 提案解析手法

5.1.1 問題設定

ここでは Fig. 5.1 に示すような，3 次元自由空間中に点音源と M 個の障害物が存在する場合の多重音響散乱問題について考える。このとき，それぞれの障害物は互いに重ならないものとし，音源は各障害物に外接する球の外部にあるとする。また球座標系を用いて，観測点を $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$ ，音源位置を $\mathbf{r}_s = (r_s, \theta_s, \varphi_s)$ ，それぞれの障害物の中心座標を $\mathbf{r}'_p = (r'_p, \theta'_p, \varphi'_p)$ ， $p = 1, 2, \dots, M$ ，とする。

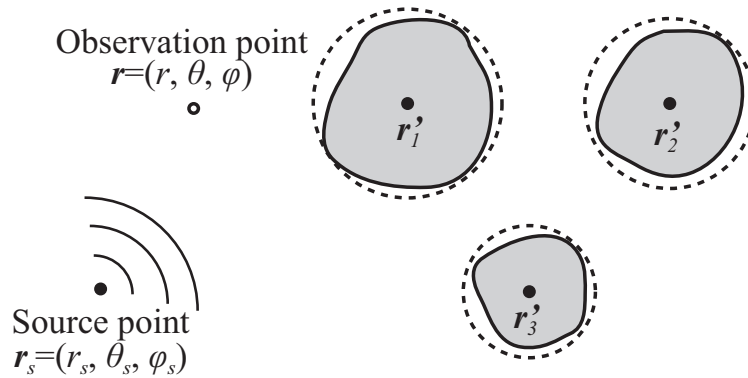
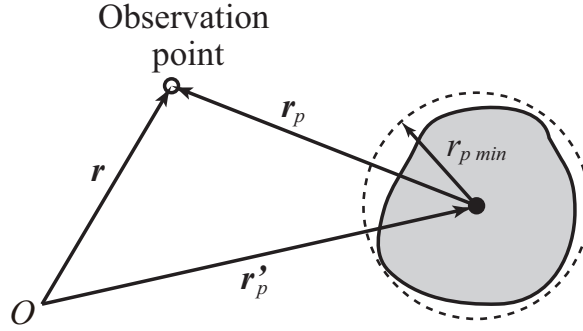


Fig. 5.1 複数の障害物による多重散乱問題

Fig. 5.2 p 番目の障害物に関する位置関係

5.1.2 定式化

多重極再展開を用いた音場表現

複数個の障害物が存在する音場においても、観測点における速度ポテンシャル ϕ は入射ポテンシャル ϕ_i と散乱ポテンシャル ϕ_s を用いて、

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_i(\mathbf{r}) + \phi_s(\mathbf{r}) \quad (5.1)$$

と表すことができる。さらに散乱ポテンシャルについては、それぞれの障害物からの寄与の足し合わせとして表すことができる。

$$\phi_s(\mathbf{r}) = \sum_{p=1}^M \phi_p(\mathbf{r}) \quad (5.2)$$

このとき、 $\phi_p(\mathbf{r})$ は p 番目の障害物による散乱ポテンシャルへの寄与であり、障害物同士の相互作用も含まれているものとする。そこで、まずはこの $\phi_p(\mathbf{r})$ を球座標系における一般解を用いて表す。Fig. 5.2 に示すように、 p 番目の障害物の中心座標から観測点へのベクトルを $\mathbf{r}_p$ とし、また p 番目の障害物に外接する球の半径を $r_{p \min}$ とする。このとき、 ϕ_p はそれぞれが Sommerfeld の放射条件

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \phi_p}{\partial r} - jk \phi_p \right) = 0 \quad (5.3)$$

を満たす必要があるため、 $\mathbf{r}'_p$ を展開点とすれば $r_p \geq r_{p \min}$ という条件のもと、

$$\begin{aligned} \phi_p(\mathbf{r}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^{(p)m} S_n^m(\mathbf{r}_p) \\ S_n^m(\mathbf{r}_p) &= h_n^{(1)}(kr_p) Y_n^m(\theta_p, \varphi_p) \\ \mathbf{r}_p &= \mathbf{r} - \mathbf{r}'_p, \quad p = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (5.4)$$

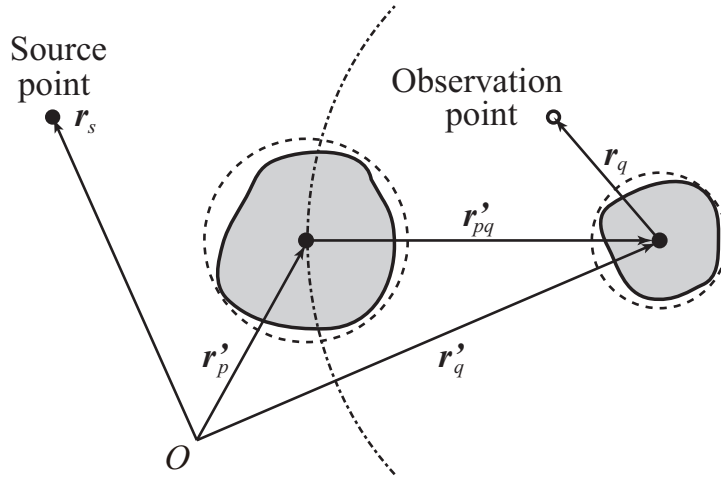


Fig. 5.3 多重極再展開を適用する際の位置関係

のように球波動関数の特異解 $S_n^m(\mathbf{r}_p)$ を用いた展開表現で表すことが適当である。ここで、 $A_n^{(p)m}$ は p 番目の障害物による散乱ポテンシャルに関する未知の展開係数である。

次に、それぞれの障害物による寄与の和として表した散乱ポテンシャルを扱うために、Gumerov らによって提案された多重極再展開法を用いる [41]。まずは q 番目の障害物について考える。Fig. 5.3 に多重極再展開法を用いる場合における障害物同士の位置関係を示す。このとき、 q 番目の障害物近傍の $|\mathbf{r}_q| \leq |\mathbf{r}'_{pq}| = |\mathbf{r}'_q - \mathbf{r}'_p|$ である範囲において、 q 番目の障害物以外の障害物による寄与 $\phi_p(\mathbf{r})$, $p \neq q$ は正則である。ゆえに、特異解 $S_n^m(\mathbf{r}_p)$, $p \neq q$ は、 q 番目の障害物の中心座標 $\mathbf{r}'_q$ を新たな展開点として、球波動関数の正則解 $R_l^s(\mathbf{r}_q)$ を用いて次のように展開し直すことができる。

$$S_n^m(\mathbf{r}_p) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{pq}) R_l^s(\mathbf{r}_q) \quad (5.5)$$

$$R_l^s(\mathbf{r}_q) = j_l(kr_q) Y_l^s(\theta_q, \varphi_q)$$

$$p, q = 1, 2, \dots, M, \quad p \neq q$$

ここで、 $(S|R)_{ln}^{sm}$: 再展開係数である。この再展開係数 $(S|R)_{ln}^{sm}$ は次のような手順で求めることができる。まずは、以下の関係式を用いて再展開係数の $(S|R)_{l|m|}^{sm}$, $(S|R)_{|s|n}^{sm}$ となる要素を求める。

$$b_{m+1}^{-m-1}(S|R)_{l,m+1}^{s,m+1} = b_l^{-s}(S|R)_{l-1,m}^{s-1,m} - b_{l+1}^{s-1}(S|R)_{l+1,m}^{s-1,m} \quad (5.6)$$

$$b_{m+1}^{-m-1}(S|R)_{l,m+1}^{s,-m-1} = b_l^s(S|R)_{l-1,m}^{s+1,-m} - b_{l+1}^{-s-1}(S|R)_{l+1,m}^{s+1,-m} \quad (5.7)$$

$$l = 0, 1, \dots, \quad s = -l, \dots, l, \quad m = 0, 1, \dots$$

ただし,

$$b_n^m = \begin{cases} \sqrt{\frac{(n-m-1)(n-m)}{(2n-1)(2n+1)}}, & 0 \leq m \leq n \\ -\sqrt{\frac{(n-m-1)(n-m)}{(2n-1)(2n+1)}}, & -n \leq m \leq 0 \\ 0, & |m| > n \end{cases} \quad (5.8)$$

また, 初期値として

$$(S|R)_{l0}^{s0}(\mathbf{r}'_{pq}) = (-1)^l \sqrt{4\pi} S_l^{-s}(\mathbf{r}'_{pq}) \quad (5.9)$$

$$(S|R)_{0n}^{0m}(\mathbf{r}'_{pq}) = \sqrt{4\pi} S_l^{-s}(\mathbf{r}'_{pq}) \quad (5.10)$$

を用いる。このとき次に示す対称性より, $(S|R)_{|s|n}^{sm}$ は $(S|R)_{l|m}^{sm}$ を用いて求めることができる。

$$(S|R)_{|m|l}^{-m,-s} = (-1)^{l+m} (S|R)_{l|m}^{sm} \quad (5.11)$$

$$l = 0, 1, \dots, \quad s = -l, \dots, l, \quad m = -n, \dots, n$$

Eq. (5.6), (5.7) および (5.11) を用いて $(S|R)_{l|m}^{sm}$ および $(S|R)_{|s|n}^{sm}$ を求めたのち, 次の再帰関係式を用いれば, その他のすべての再展開係数が求まる。

$$a_{n-1}^m (S|R)_{l,n-1}^{sm} - a_n^m (S|R)_{l,n+1}^{sm} = a_l^s (S|R)_{l+1,n}^{sm} - a_{l-1}^s (S|R)_{l-1,n}^{sm} \quad (5.12)$$

$$l, n = 0, 1, \dots, \quad s = -l, \dots, l, \quad m = -n, \dots, n$$

ただし,

$$a_n^m = \begin{cases} \sqrt{\frac{(n+|m|+1)(n-|m|+1)}{(2n+1)(2n+3)}}, & n \geq |m| \\ 0, & |m| > n \end{cases} \quad (5.13)$$

である。ここで, 対称性

$$(S|R)_{ln}^{sm} = (-1)^{n+l} (S|R)_{nl}^{-m,-s} \quad (5.14)$$

$$l, n = 0, 1, \dots, \quad s = -l, \dots, l, \quad m = -n, \dots, n$$

があるため, $l \geq n$ である範囲についてのみ再帰関係式 Eq. (5.12) を用いればよい。これらの手続きを用いて再展開係数を求めた場合, 一組の再展開係数を求めるための計算量は打ち切り次数 N に対して $O(N^4)$ のオーダーとなる。ここでは特異解を新たな展開点での正則解へ変換する場合の再展開係数のみについて扱ったが, 同様の手順を用いて特異解を特異解へ変換する場合の再展開係数 $(S|S)_{ln}^{sm}$, または正則解を正則解へ変換する場合の再展開係数 $(R|R)_{ln}^{sm}$ についても求めることができる。これらの再展開係数の詳しい求め方については文献 [42] を参考にされたい。また, 以上では Gumerov らが Chew によって提案された方法 [43] をもとに定式化した多重極再展開法を用いたが, 積分表現を数値積分することにより求める方法 [44] や, Clebsch-Gordan 係数または

Wigner の 3- j 記号 [45] を用いて表す方法 [46] など、再展開係数の求め方にはいくつかの方法がある。

最後に入射ポテンシャル ϕ_i についても $\mathbf{r}'_q$ を展開点として球波動関数を用いて展開すれば、 $|\mathbf{r}_q| \leq |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q|$ という条件のもと、

$$\phi_i(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|} e^{jk|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l C_l^{(q)s} R_l^s(\mathbf{r}_q) \quad (5.15)$$

$$C_l^{(q)s} = jkQ S_l^{-s}(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q)$$

と表すことができる。よって、 q 番目の障害物近傍 $r_{q\min} \leq |\mathbf{r}_q| \leq |\mathbf{r}_{pq}|$ における速度ポテンシャルは、

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l \left\{ A_l^{(q)s} h_l^{(1)}(kr_q) + B_l^{(q)s} j_l(kr_q) \right\} Y_l^s(\theta_q, \varphi_q) \quad (5.16)$$

$$B_l^{(q)s} = C_l^{(q)s} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^M \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{pq}) A_n^{(p)m} \right\}$$

となる。

マトリクス方程式

Kirchhoff-Huygens の公式を用いて、Eq. (5.16) における展開係数 $A_l^{(q)s}$ を未知数とするマトリクス方程式を導く。Kirchhoff-Huygens の公式より、障害物の外部における速度ポテンシャルは次式のように表すことができる。

$$\phi(\mathbf{r}) = QG(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) + \iint_{\Gamma} \left(\phi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}_0} - \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r}_0)} \phi(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \right) dS_0 \quad (5.17)$$

ここで、 Γ : すべての障害物の表面、 ρ : 媒質の密度、 $Z(\mathbf{r}_0)$: 障害物表面の比音響インピーダンスである。ここでは、Green 関数として 3 次元音場の基本解である、

$$G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} e^{jk|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} \quad (5.18)$$

を採用する。また、Green 関数 $G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$ についても、 $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_q| < |\mathbf{r}_q|$ という条件のもと、

$$G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = jk \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l R_l^{-s}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_q) S_l^s(\mathbf{r}_q), \quad (5.19)$$

と球波動関数による展開形式で表すことができる。Eq. (5.17) に Eq. (5.1), Eq. (5.2) を代入して整理すると、

$$\sum_{q=1}^M \phi_q(\mathbf{r}) = \sum_{q=1}^M \iint_{\Gamma_q} \left(\phi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}_0} - \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r}_0)} \phi(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \right) dS_0 \quad (5.20)$$

となる。ここで、 Γ_q は q 番目の障害物の表面である。ゆえに、Eq. (5.20) より解くべき方程式は、

$$\phi_q(\mathbf{r}) = \iint_{\Gamma_q} \left(\phi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}_0} - \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r}_0)} \phi(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \right) dS_0 \quad (5.21)$$

$$q = 1, 2, \dots, M$$

となる。ここで、Eq. (5.21) に球波動関数を用いて表した速度ポテンシャルを適用することを考える。このとき、Eq. (5.16) は $|\mathbf{r}_0| > r_{q, \min}$ において成立するものであるため、厳密には適用することができないが、第4章における定式化と同様、完備波動関数系の定理 [32–34] により Γ_q 上で Eq. (5.16) が成立すると仮定して定式化をすすめる。Eq. (5.21) に Eq. (5.4), Eq. (5.16) および Eq. (5.19) を代入し、球面調和関数の直交性を利用すれば、

$$\begin{aligned} A_i^{(q)j} - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l A_l^{(q)s} (X_{il}^{(q)js} + Y_{il}^{(q)js}) \\ - \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^M \left[\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{pq}) A_n^{(p)m} \right\} (\tilde{X}_{il}^{(q)js} + \tilde{Y}_{il}^{(q)js}) \right] \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l C_l^{(q)s} (\tilde{X}_{il}^{(q)js} + \tilde{Y}_{il}^{(q)js}) \quad (5.22) \end{aligned}$$

$$q = 1, 2, \dots, M$$

を得る。ただし、

$$\begin{aligned} X_{il}^{(q)js} &= jk \iint_{\Gamma_q} S_l^s(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} R_i^{-j}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_q) dS_0 \\ Y_{il}^{(q)js} &= \iint_{\Gamma_q} \frac{k\omega\rho}{Z(\mathbf{r}_0)} S_l^s(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_q) R_i^{-j}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_q) dS_0 \\ \tilde{X}_{il}^{(q)js} &= jk \iint_{\Gamma_q} R_l^s(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} R_i^{-j}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_q) dS_0 \\ \tilde{Y}_{il}^{(q)js} &= \iint_{\Gamma_q} \frac{k\omega\rho}{Z(\mathbf{r}_0)} R_l^s(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_q) R_i^{-j}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_q) dS_0 \end{aligned}$$

とおいた。Eq. (5.22) において、無限級数和を適当な次数 N で打ち切り、 $i = 0, 1, \dots, N$, $j = -i, \dots, i$ と変化させれば、 $N_p = M \times (N+1)^2$ 個の未知数からなる連立一次方程式を得る。

この Eq. (5.22) を、マトリクス方程式の形で表す。まずは、未知の展開係数 $A_l^{(q)s}$ を次のようなベクトルで表す。

$$\mathbf{A}^{(q)} = \left\{ A_0^{(q)0}, A_1^{(q)-1}, A_1^{(q)0}, A_1^{(q)1}, \dots, A_N^{(q)N} \right\}^T \quad (5.23)$$

ここで、添字の T は転置を表している。同様に、入射ポテンシャルの展開係数 $C_l^{(q)s}$ についても

$\mathbf{C}^{(q)}$ とおく。また、再展開係数 $(S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{pq})$ についても、

$$(\mathbf{S}|\mathbf{R})^{(qp)} = \begin{bmatrix} (S|R)_{00}^{00} & (S|R)_{01}^{0-1} & \cdots & (S|R)_{0N}^{0N} \\ (S|R)_{10}^{-10} & (S|R)_{11}^{-1-1} & \cdots & (S|R)_{1N}^{-1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (S|R)_{N0}^{N0} & (S|R)_{N1}^{N-1} & \cdots & (S|R)_{NN}^{NN} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

とおき、 $W_{il}^{(q)js}$, $\tilde{W}_{il}^{(q)js}$ についても同様に、 $\mathbf{W}^{(q)}$, $\tilde{\mathbf{W}}^{(q)}$ とする。このように、それぞれの要素をマトリクスで表せば、Eq. (5.22) は、

$$\sum_{p=1}^M \mathbf{L}^{(qp)} \mathbf{A}^{(p)} = \mathbf{D}^{(q)}, \quad q = 1, 2, \dots, M \quad (5.25)$$

と表すことができる。ただし、

$$\mathbf{L}^{(qp)} = \begin{cases} \mathbf{I} - \mathbf{W}^{(q)}, & q = p \\ -\tilde{\mathbf{W}}^{(q)}(\mathbf{S}|\mathbf{R})^{(qp)}, & q \neq p \end{cases}$$

$$\mathbf{D}^{(q)} = \tilde{\mathbf{W}}^{(q)} \mathbf{C}^{(q)}$$

であり、 $\mathbf{I}$: 単位行列である。

5.2 数値計算例

提案手法による解析例として、1つの点音源と、複数個の有限長円筒が配置された音場について解析を行う。ここでは、以下に示す項目について数値計算を行い、BEM による計算結果との比較から、提案手法の数値特性について検証する。

- 散乱波の周波数応答関数
- 散乱波の指向特性
 - － 計算結果の収束
 - － 障害物近傍に関する検証
 - － 障害物間の距離
 - － それぞれの障害物の寸法が異なる場合
 - － 障害物の個数
 - － 解析に必要な計算コスト
- 計算コスト

なお第3章と同様に、提案手法による解析では係数行列を求める際に必要な面積分は、障害物形状の対称性を用いて θ_0 のみに依存する被積分関数へと変換し、線積分として実行できるようにした。この線積分の積分計算においては、 $\theta_0 = 0 \sim \pi$ の範囲を $\pi/4$ ずつに区切り、それぞれの区間を16点の Gauss-Legendre 積分を用いて数値積分した。また、BEM による解析では、三角形一定要素を用いて境界を分割し、各境界要素における面積分の計算には、9点の Gauss 積分を用いた。

また，数値計算に用いた計算機環境は以下のとおりである。

- CPU: Intel Core i7 2.80 GHz
- Memory: 8 GB
- Language: Python

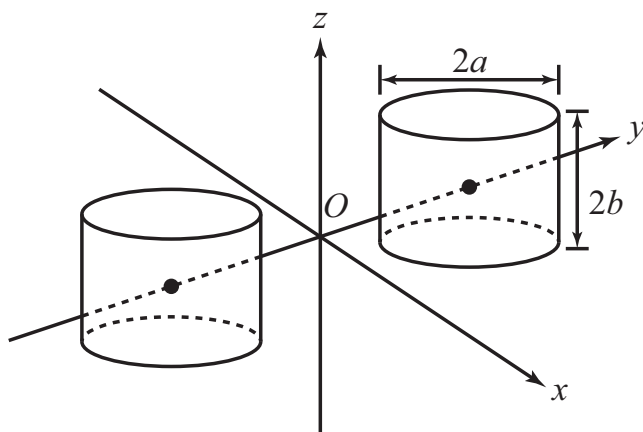


Fig. 5.4 解析対象とした2つの有限長円筒による散乱音場

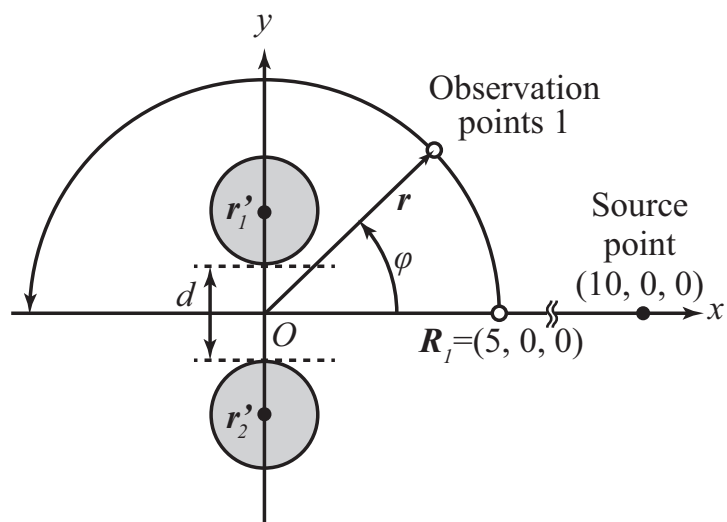


Fig. 5.5 2つの有限長円筒による散乱音場における音源と観測点の設定

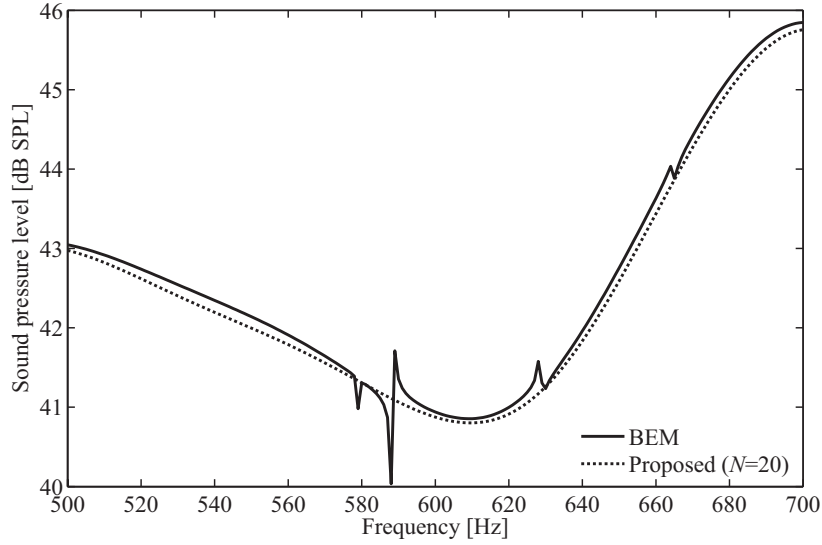


Fig. 5.6 散乱波の周波数応答関数の計算結果

5.2.1 散乱波の周波数応答関数

Fig. 5.4 に示すような、2つの音響的に剛な有限長円筒による音場を扱う。障害物である有限長円筒の寸法はどちらも直径 $2a = 1.0$ [m]、高さ $2b = 1.0$ [m] とした。また、Fig. 5.5 に示すように、1番目の有限長円筒の中心座標を $\mathbf{r}'_1 = (0, 1, 0)$ 、2番目の有限長円筒の中心座標を $\mathbf{r}'_2 = (0, -1, 0)$ にそれぞれ設定し、有限長円筒間の距離が $d = 1.0$ となるようにした。この有限長円筒の配置に対して、点音源を $\mathbf{r}_s = (10, 0, 0)$ に配置し、観測点 $\mathbf{R}_1 = (5, 0, 0)$ における散乱波の周波数応答関数について計算を行った。Fig. 5.6 に 500～700 Hz までの周波数応答関数の計算結果を示す。ここで、BEM による計算結果は、5488 個の三角形一定要素（最大メッシュ長：0.079 [m]）を用いて計算したものであり、提案手法による計算結果は打ち切り次数を $N = 20$ （未知数の数 $N_p = 882$ ）として計算した。Fig. 5.6 より、BEM による計算結果では、有限長円筒内部の Dirichlet 周波数付近に、解の非一意性 [21] により計算精度が低下したと考えられる不連続点が生じている。一方で、提案手法による計算結果では不連続点が生じず、滑らかな周波数応答関数が計算できている。提案手法においても BEM と同様に境界面における積分方程式を用いているが、定式化の過程において Green 関数を球波動関数を用いて展開することで観測点に関わる項を分離し、さらに球面調和関数の直交性を利用することで、解くべきマトリクス方程式には観測点の情報が含まれない。そのため、障害物内部の Dirichlet 周波数付近においても、BEM のような不連続点を生じることのない計算結果を得ることができる。このように、Green 関数の展開表現を用いることで解の非一意性の問題を回避できることは、文献 [48] でも示されている。

以上より、第 3 章と同様に複数個の障害物による多重散乱音場の解析においても、準理論解析手法を用いることで不連続点の生じない、滑らかな周波数応答関数が計算できているといえる。

5.2.2 計算結果の収束に関する検証

提案手法による計算結果の打ち切り次数 N に対する収束を調べる。有限長円筒の寸法と配置に関しては前項と同様である。まずは、観測点を $x-y$ 平面上の原点から 5 m の距離において $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ の範囲 (Observation points 1) に設定した。Fig. 5.7 に提案手法において打ち切り次数を $N = 20$ とした場合に計算結果を示す。さらに、これらの観測点における散乱波の計算結果から、文献 [38] を参考にし、相対誤差の平均値 ε を求めた。

$$\varepsilon = \frac{1}{181} \sum_{n=1}^{181} \frac{|p_{ref}(\mathbf{r}_n) - p(\mathbf{r}_n)|}{|p_{ref}(\mathbf{r}_n)|} \quad (5.26)$$

ここで、 p_{ref} : BEM による計算結果、 p : 提案手法による計算結果、 $\mathbf{r}_n$: n 番目の観測点である。また、BEM による計算結果では 2624 個の三角形一定要素 (最大メッシュ長 0.104 [m]) を用いて計算したものをを用いた。Fig. 5.8 に、解析周波数をそれぞれ 63, 125, 250, 500 Hz とした際の ε を示す。Fig. 5.8 より、打ち切り次数を大きくすることで計算結果が収束していくといえる。しかし、Fig. 5.8 における 63Hz の結果において、打ち切り次数を $N = 30$ (未知数 $N_p = 1922$) とした場合に誤差が増加していることが確認できる。その原因として、提案手法ではマトリクス方程式の係数行列における条件数が非常に大きくなることが挙げられる。Table. 5.1 に、打ち切り次数 N による条件数の計算結果を示す。このとき、条件数は次式より求めた。

$$\kappa(\mathbf{L}) = \|\mathbf{L}\| \|\mathbf{L}^{-1}\| \quad (5.27)$$

ここで、 $\|\cdot\|$ は行列のノルムである。Table. 5.1 より、打ち切り次数 N が大きくなると、条件数も非常に大きな値となることが確認できる。一般に、条件数が大きな値である場合はマトリクス方程式の解に含まれる誤差が大きくなる。そのため、Fig. 5.8 に見られるような誤差の増加が起こったといえる。また、提案手法において条件数が非常に大きな値となった原因としては、積分計算に含まれる球 Neumann 関数の影響が挙げられる。高次の球 Neumann 関数は、引数が小さな場合においてその絶対値は非常に大きな値を取り、その範囲において積分計算を行った結果も非常に大きな値となる。そのため、係数行列における要素の絶対値が非常に大きくなったことが条件数の悪化につながり、マトリクス方程式の解に影響を与えてしまったと考えられる。これより、63 Hz 以外の解析周波数についても、打ち切り次数をさらに大きくした場合にはマトリクス方程式を解く際の誤差が大きくなり、その結果として誤差が増加すると予想できるため、提案手法において妥当な計算結果が得られる打ち切り次数には上限があると考えられる。

また、計算に必要な打ち切り次数の設定式について考える。一般的に、球波動関数による展開式 Eq. (5.4) が収束するためには、 $N > 2kr_{pmin}$ とする必要がある [47]。これに従えば、最小の打ち切り次数 N_{min} は 63, 125, 250, 500 Hz の解析周波数に対してそれぞれ、 $N_{min} = 2, 4, 7, 13$ となる。また、文献 [41] によれば、1 つの球による散乱音場の解析に対し、

$$N \geq [ekr_{pmin}], \quad e = 2.71828 \dots \quad (5.28)$$

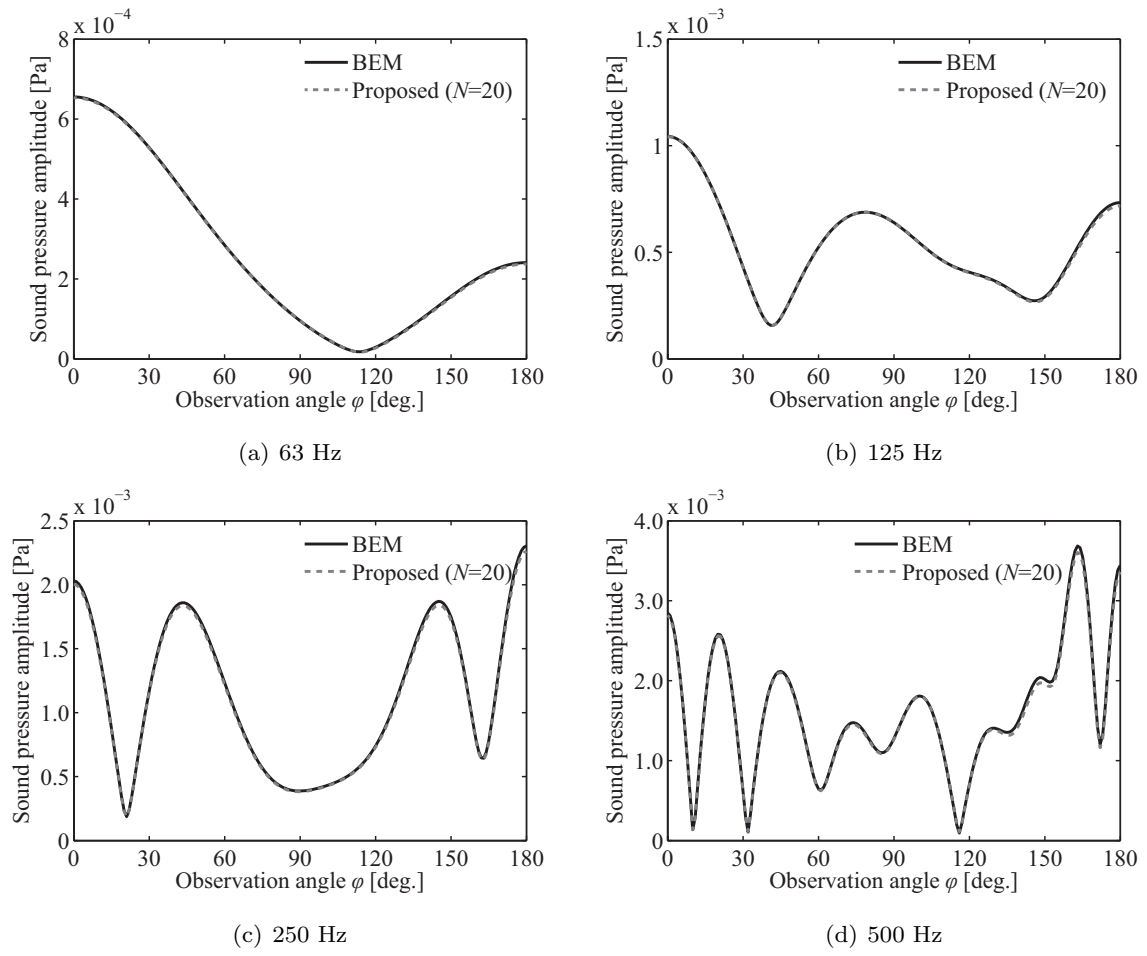


Fig. 5.7 2つの有限長円筒による散乱音場における散乱波の指向特性の計算結果

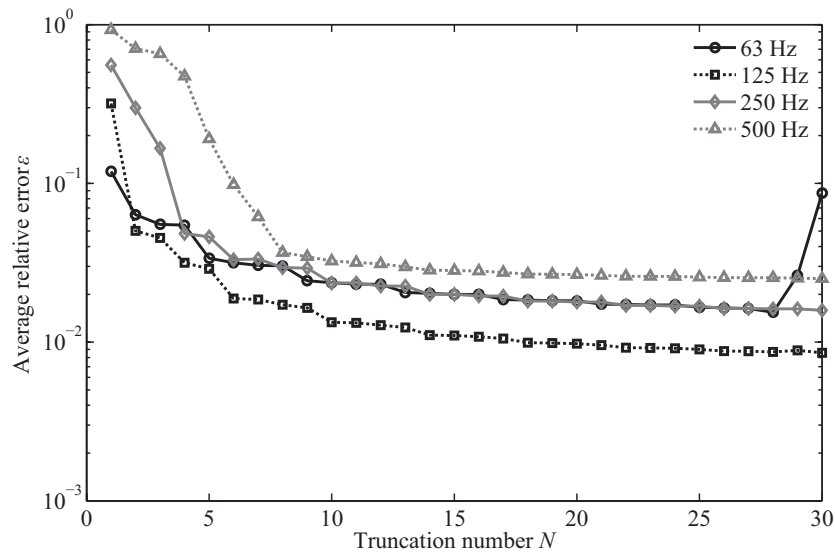


Fig. 5.8 2つの有限長円筒による散乱音場の計算結果における相対誤差の平均値

Table 5.1 提案手法における係数行列の条件数

N	Condition number			
	63 Hz	125 Hz	250 Hz	500 Hz
5	4.957E+04	5.996E+02	2.572E+01	1.193E+01
10	4.831E+16	9.049E+11	8.174E+06	1.543E+02
15	8.671E+31	3.250E+23	8.927E+14	1.135E+07
20	2.129E+47	3.541E+36	1.220E+25	9.701E+13
25	4.297E+64	3.652E+50	3.060E+36	1.276E+22
30	1.765E+83	1.150E+66	6.376E+48	1.403E+31

としたり，2つの球による散乱音場の解析に対し，球の中心間の距離 r'_{pq} を用いて，

$$N = \left\lceil \frac{1}{2} ekr'_{12} \right\rceil \quad (5.29)$$

と設定することで，十分な精度の計算結果が得られることを示している。そこで，Eq. (5.28) より打ち切り次数を算出すれば，63, 125, 250, 500 Hz の解析周波数に対してそれぞれ， $N=2, 4, 8, 17$ となる。また，Eq. (5.29) より打ち切り次数を算出すれば，63, 125, 250, 500 Hz の解析周波数に対してそれぞれ， $N=3, 6, 12, 24$ となる。そこで，算出した打ち切り次数と Fig. 5.8 の結果とを照らし合わせると，解析周波数が 63, 125 Hz である場合には，Eq. (5.28), (5.29) を用いて算出した打ち切り次数における計算結果はどちらも収束しているとはいえず，また誤差も大きい。ため，より多くの次数が必要である。一方で，解析周波数が 250, 500 Hz の場合は，Eq. (5.28) より算出した打ち切り次数で計算結果がほぼ収束していることから，打ち切り次数の設定式として，Eq. (5.28) をもとに何らかの補正を加えることを考える。そこで，文献 [47] を参考に，

$$N = ekr_{pmin} + 5 \ln(ekr_{pmin} + \pi) \quad (5.30)$$

と設定すれば，打ち切り次数は 63, 125, 250, 500 Hz の解析周波数に対してそれぞれ， $N=10, 13, 18, 27$ となり，Fig. 5.8 の結果からも，打ち切り次数の設定として十分であるといえる。以上より，打ち切り次数の設定式としては，Eq. (5.30) のように，Eq. (5.28) に補正を加えたものにする必要がある。また，打ち切り次数が大きな場合には係数行列の条件数が悪化が原因となり，得られた展開係数に含まれる誤差が大きくなることから，妥当な計算結果が得られる打ち切り次数には上限があるといえる。打ち切り次数の設定式に関して，障害物の寸法と解析周波数を変えながら，精度の良い計算結果が得られる範囲についてさらに検証していく必要がある。

5.2.3 障害物近傍に関する検証

観測点を障害物から離れた位置に設定した場合には、それらの観測点において妥当な計算結果が得られることがわかった。一方で、式 Eq. (5.4) は基本的に $r_p > r_{p\min}$ において成立するものであり、障害物付近においては妥当な計算結果を得ることが難しいと予想さる。実際に、第 4 章において提案した単一の障害物による散乱音場の準理論解析手法では、障害物近傍における計算精度が悪く、また計算結果の収束に関しても不安定であり妥当な計算結果を得るのが困難であった。そこで、障害物付近における計算結果の精度と収束について検証する。障害物の寸法についてはどちらも直径 $2a = 1$ 、高さ $2b = 1$ とし、それぞれの中心座標を $\mathbf{r}'_1 = (0, 1, 0)$ 、 $\mathbf{r}'_2 = (0, -1, 0)$ とした。観測点については Fig. 5.9 のように、障害物間の距離 $d = 1.0$ とし、観測点を $x - y$ 平面上において、 $r_1 = 0.6$ (外接する球の内部)、 0.707 (外接する球上)、 0.8 (外接する球の外部 1)、 1.0 (外接する球の外部 2) の距離において、 $0^\circ \leq \varphi_1 < 360^\circ$ の範囲 (Observation points 2) に設定し、それぞれの距離に設定した観測点での相対誤差の平均値 ε を式 Eq. (5.26) と同様の評価式を用いて求めた。この結果を Fig. 5.10 に示す。このとき、Fig. 5.10 (a) では、提案手法による計算結果は BEM との誤差が大きく、また収束する様子もみられない。次に、Fig. 5.10 (b) の観測点を外接する球上に設定した場合については、BEM との誤差に関しては観測点を外接する球の内部に設定した場合と比べて小さくなっているものの、計算結果が一様に収束していくとはいえず、この場合についても計算結果は不安定である。さらに、Fig. 5.10 (c), (d) の観測点を外接する球の外部に設定した場合は、BEM との誤差も小さく、また計算結果も打ち切り次数を大きくすることで一様に収束している。しかしながら、Fig. 5.10 (c) のほうが (d) と比較して、安定した計算結果が得られる打ち切り次数の上限が小さくなっている。このようになった原因として、散乱ポテンシャルを求める際の球 Neumann 関数が原因として挙げられる。Table. 5.1 より、解析周波数 63 Hz において打ち切り次数を 20 次とした場合において、係数行列の条件数は 10^{47} のオーダーであり、得られた散乱ポテンシャルの展開係数 $A_l^{(q)s}$ における誤差も大きくなっていると予想される。また、前項でも述べたように球 Neumann 関数は引数が小さな場合ほど、その絶対値は非常に大きな値を取る。そのため、観測点が障害物に近いほど、展開係数に含まれる誤差が散乱ポテンシャルに与える影響が大きくなり、安定した計算結果が得られる打ち切り次数の上限が小さくなったと考えられる。

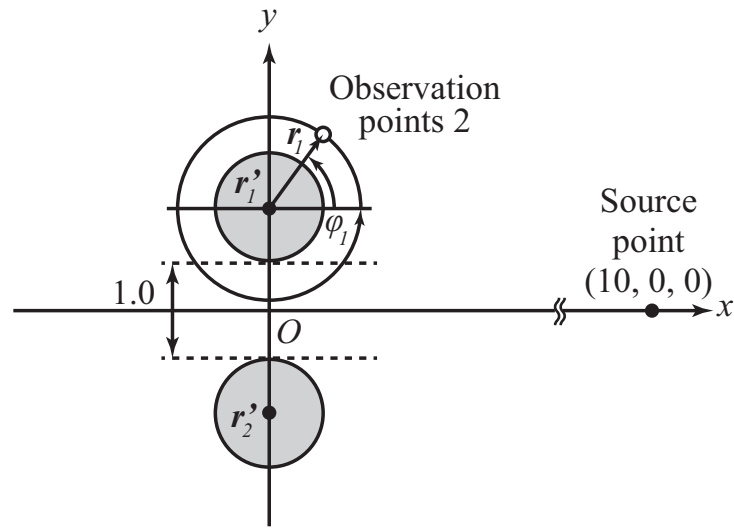


Fig. 5.9 障害物近傍における観測点の設定

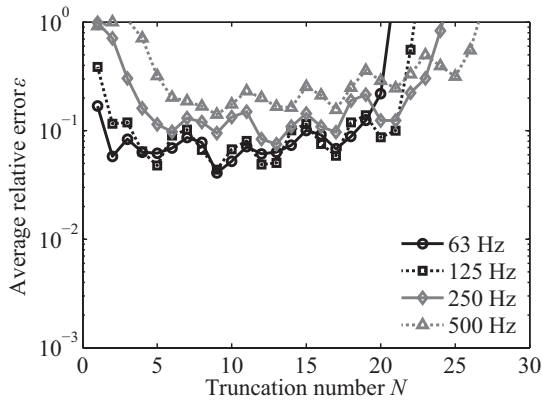
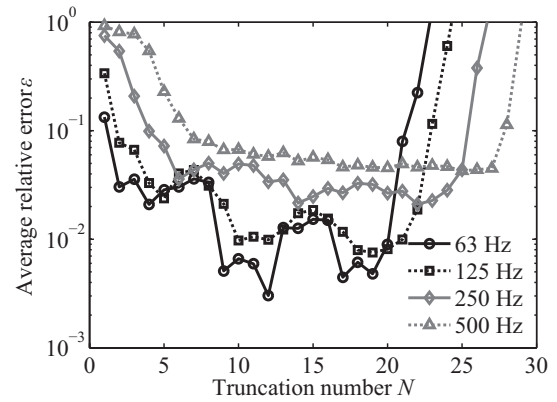
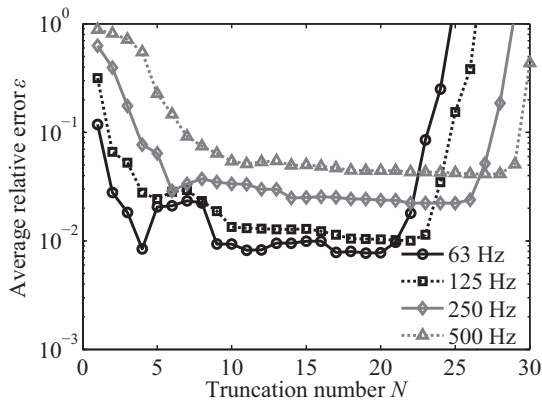
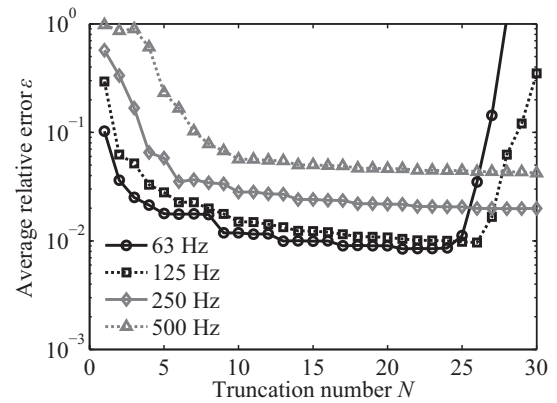
(a) $|r_1| = 0.6$ (b) $|r_1| = 0.707$ (c) $|r_1| = 0.8$ (d) $|r_1| = 1.0$

Fig. 5.10 障害物近傍の計算結果における相対誤差の平均値

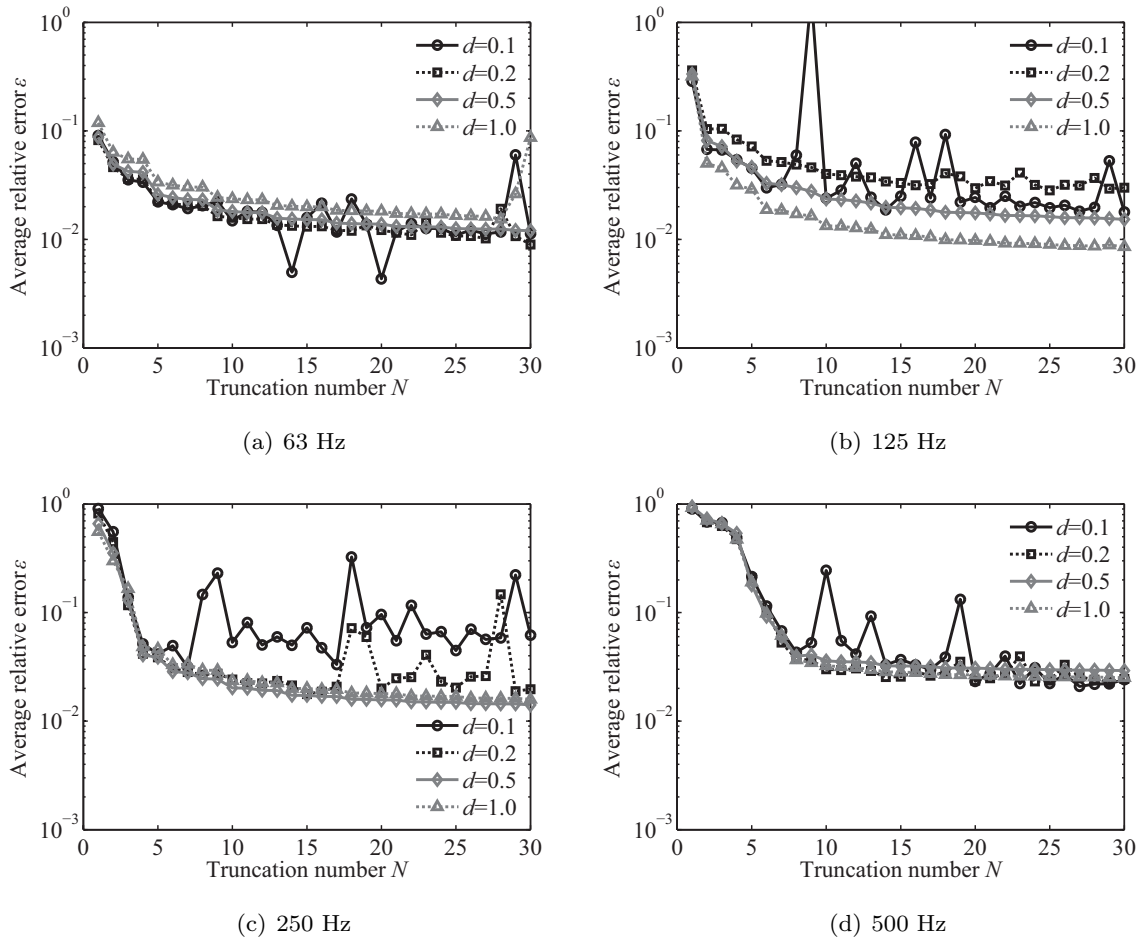


Fig. 5.11 障害物間の距離 d を狭めた場合の打ち切り次数に対する相対誤差の平均値の変化

5.2.4 障害物間の距離に関する検証

障害物間の距離に関する検証として、Fig. 5.5 における有限長円筒間の距離 d の変化が計算結果に及ぼす影響について調べる。ここでは、観測点を $x-y$ 平面上の原点から 5 m の距離において $\varphi = 0^\circ \sim 180^\circ$ の範囲 (Observation points 1) に設定した。また、有限長円筒の寸法はどちらも直径 $2a = 1$ 、高さ $2b = 1$ とし、それぞれの中心座標は $\mathbf{r}'_1 = (0, (d+1)/2, 0)$, $\mathbf{r}'_2 = (0, -(d+1)/2, 0)$ とした。まずは、障害物間の距離 d を狭めていった場合についての検証を行った。Fig. 5.11 に打ち切り次数に対する相対誤差の平均値 ε の変化を示す。このとき、 d が 0.2 以下の場合には提案手法による解析結果は一様に収束せず、不安定であることがわかる。これについては、有限長円筒に外接する球がもう一方の有限長円筒と重なってしまうために、球波動関数による展開表現としての妥当性を失ってしまっていることが原因として挙げられる。ゆえに、障害物の配置に関しては、それぞれの障害物に外接する球が他の障害物に重ならないようにする必要がある。

次に、 d を広げていった場合についての結果を Fig. 5.12 に示す。このとき、障害物間の距離に関わらず、計算結果の収束の傾向は同様であるため、打ち切り次数の設定に関しては Eq. (5.30) を

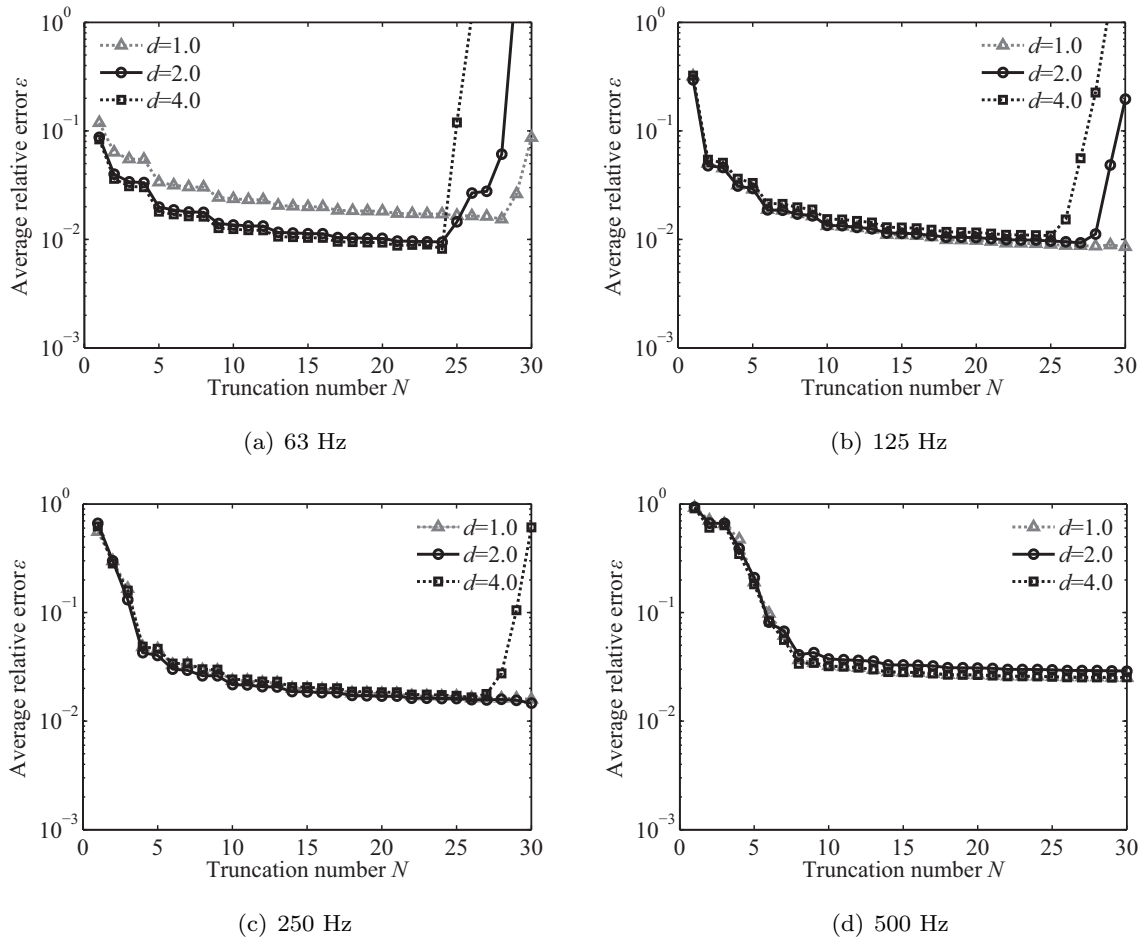


Fig. 5.12 障害物間の距離 d を広げた場合の打ち切り次数に対する相対誤差の平均値の変化

基準に設定すればよいと考えられる。一方で、障害物間の距離が広がることで、安定した計算結果を得られる打ち切り次数の上限が小さくなっているのが確認できる。これは、設定した観測点 (Observation point 1) と障害物との距離が近づくことで、展開係数における誤差の影響が大きくなったことが原因であると考えられる。

Table 5.2 2つの有限長円筒の寸法の設定

	各有限長円筒の寸法
(a)	$2a_1 = 2b_1 = 1.2, 2a_2 = 2b_2 = 0.8$
(b)	$2a_1 = 2b_1 = 1.5, 2a_2 = 2b_2 = 0.5$
(c)	$2a_1 = 2b_1 = 1.8, 2a_2 = 2b_2 = 0.2$

5.2.5 障害物の寸法が異なる場合についての検証

複数個ある障害物の寸法がそれぞれ異なる場合について検証する。ここでは、Fig. 5.5 と同様の、2つの有限長円筒による散乱音場について考える。また、障害物1の中心座標を $\mathbf{r}'_1 = (0, 1, 0)$ 、障害物2の中心座標を $\mathbf{r}'_2 = (0, -1, 0)$ とし、観測点は $r = 5.0$ の距離に設定した。

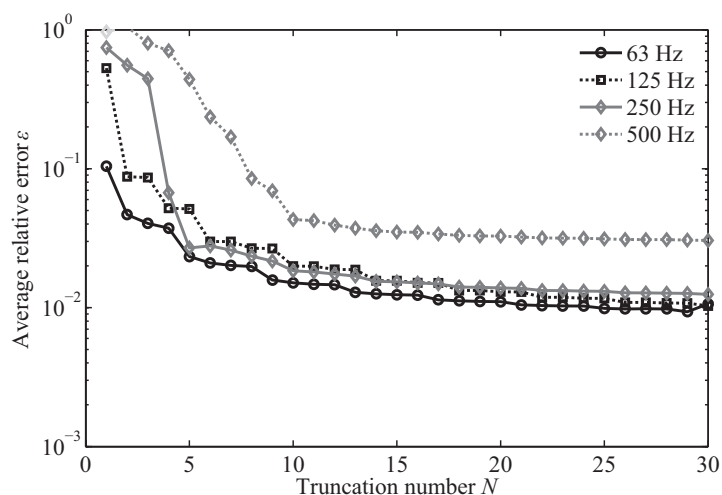
2つの有限長円筒の寸法として Table. 5.2 に示すように3種類を設定し、打ち切り次数 N に対する相対誤差の平均値を求めた。その結果を Fig. 5.13 に示す。Fig. 5.13 のそれぞれの結果において、解析周波数を 500 Hz とした場合に注目する。このとき、相対誤差の平均値における変化が緩やかになりはじめる打ち切り次数は、(a) $N = 10$ 、(b) $N = 11$ 、(c) $N = 15$ と読み取れる。このことから、障害物1の寸法が大きくなることで、解析に必要な打ち切り次数が大きくなったといえる。また、障害物2の寸法に関しては小さくなっているが、そのことで収束が早まるといったようなことはない。よって、打ち切り次数は複数個ある障害物の中で最も大きな寸法の障害物に合わせて設定する必要があるといえる。

5.2.6 障害物の個数に関する検証

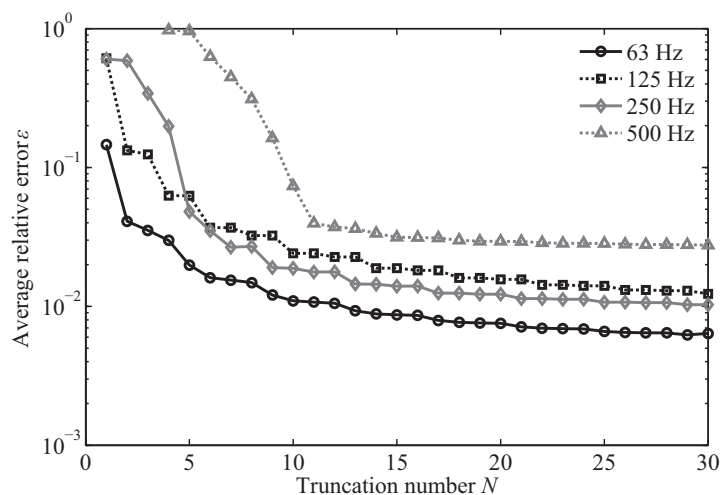
ここでは、障害物の個数と配置に関する検証を行う。このとき、それぞれの有限長円筒の寸法は全て直径 $2a = 1$ 、高さ $2b = 1$ とした。

まずは、文献 [49] を参考に、3つの有限長円筒を直線状に配置した場合と円状に配置した場合について解析した。このとき、観測点を $x-y$ 平面上の原点から 5 m の距離において $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ の範囲に設定した。Fig. 5.14 に3つの有限長円筒を直線状に配置した場合、Fig. 5.15 に3つの有限長円筒を円状に配置した場合の打ち切り次数に対する相対誤差の平均値 ε の変化を示す。この場合はどちらの配置に関しても、提案手法による計算結果は打ち切り次数の増加に応じて収束していき、精度の良い計算結果が得られているといえる。ここで、Fig. 5.14 では、Fig. 5.12 において $d = 2.0$ とした場合と同じように、障害物間の距離が最大で 2 m 離れているが、観測点が障害物に近いことによる解析精度の悪化が生じていない。これは、係数行列の条件数が Fig. 5.12 において $d = 2.0$ よりも改善され、誤差の増大が生じなかったと考えられる。

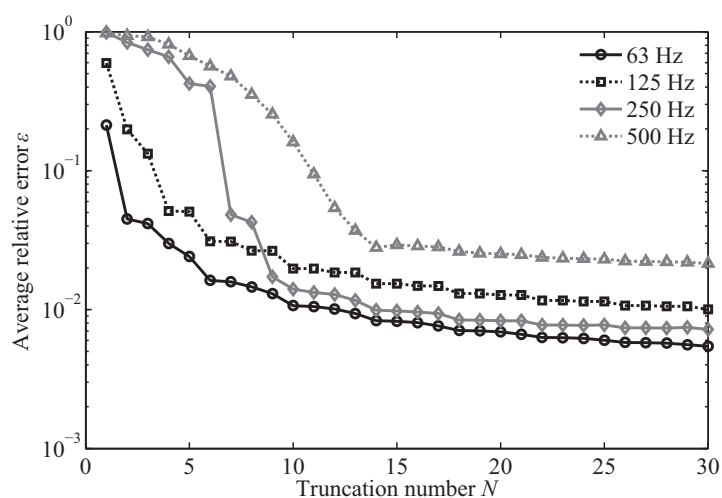
次に、5つの有限長円筒を配置した場合についても解析を行った。この場合の結果を Fig. 5.16 に示す。この場合も、Fig. 5.12 において $d = 2.0$ とした場合と同じように、障害物間の距離が最大で 2 m 離れている。しかし、Fig. 5.14 とは異なり、解析精度の悪化が生じているのが確認できる。そこで、解析周波数 125 Hz において、打ち切り次数を $M = 28, 29, 30$ とした場合の条件数



(a) $2a_1 = 2b_1 = 1.2$, $2a_2 = 2b_2 = 0.8$ とした場合の打ち切り次数に対する相対誤差の平均値

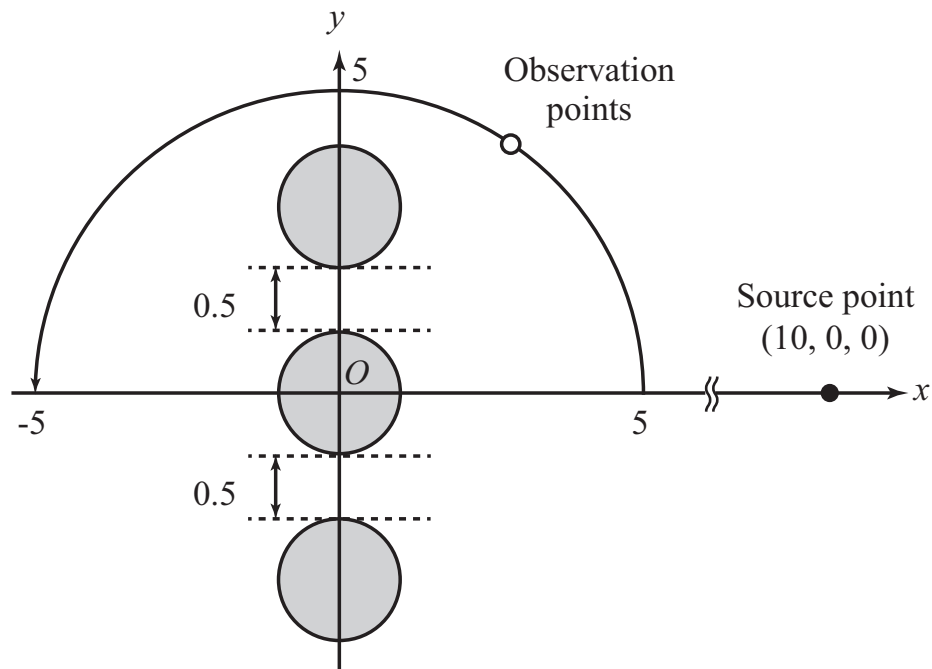


(b) $2a_2 = 2b_2 = 1.5$, $2a_2 = 2b_2 = 0.5$ とした場合の打ち切り次数に対する相対誤差の平均値

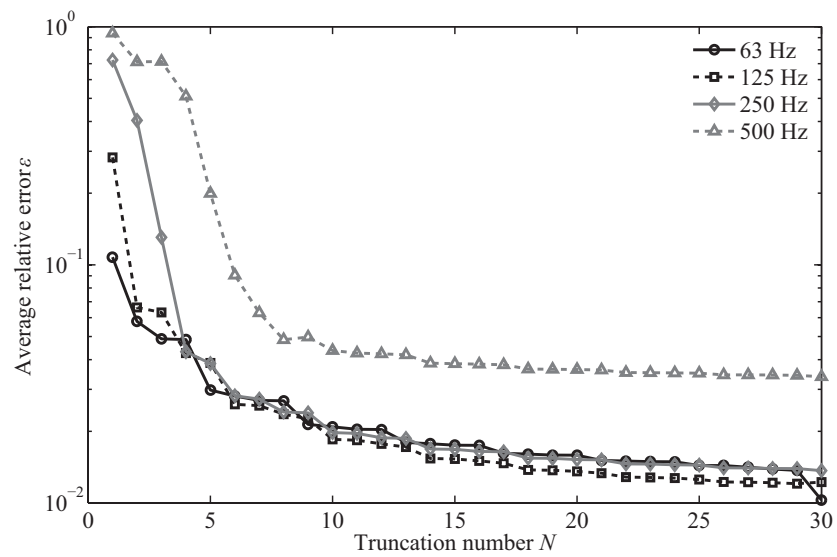


(c) $2a_2 = 2b_2 = 1.8$, $2a_2 = 2b_2 = 0.2$ とした場合の打ち切り次数に対する相対誤差の平均値

Fig. 5.13 2つの有限長円筒の寸法が異なる場合の相対誤差の平均値の変化

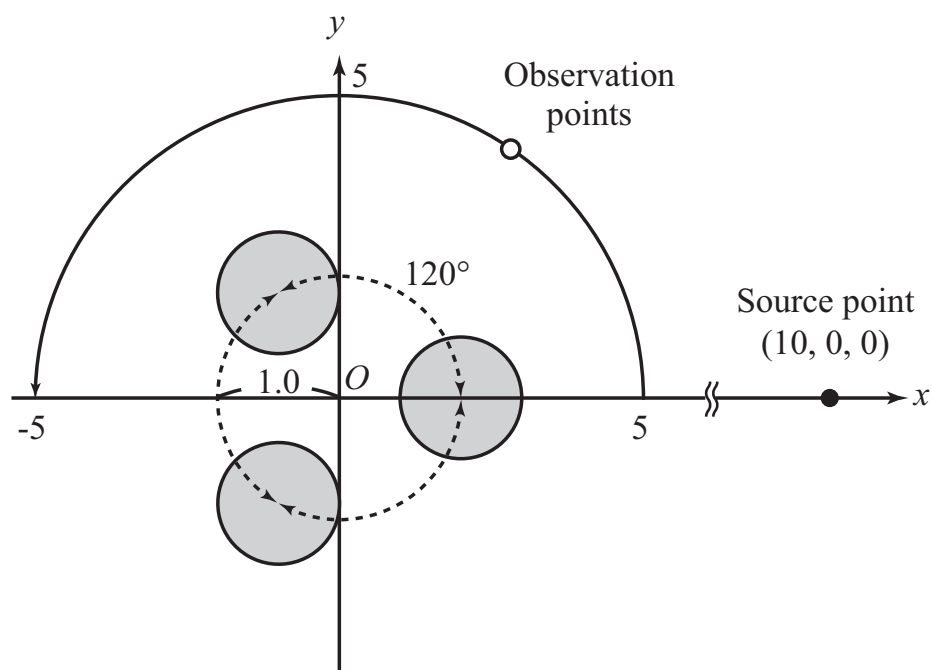


(a) 3つの有限長円筒の配置

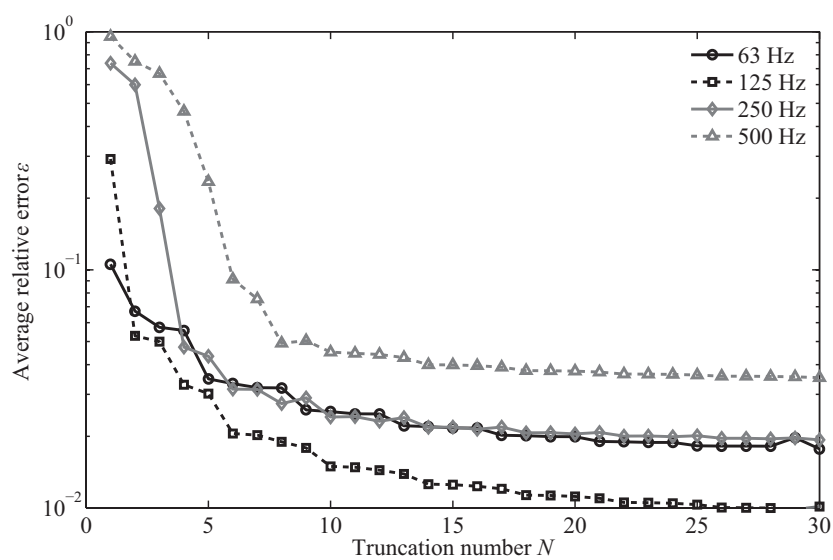


(b) 打ち切り次数に対する相対誤差の平均値の変化

Fig. 5.14 3つの有限長円筒を直線状に配置した場合

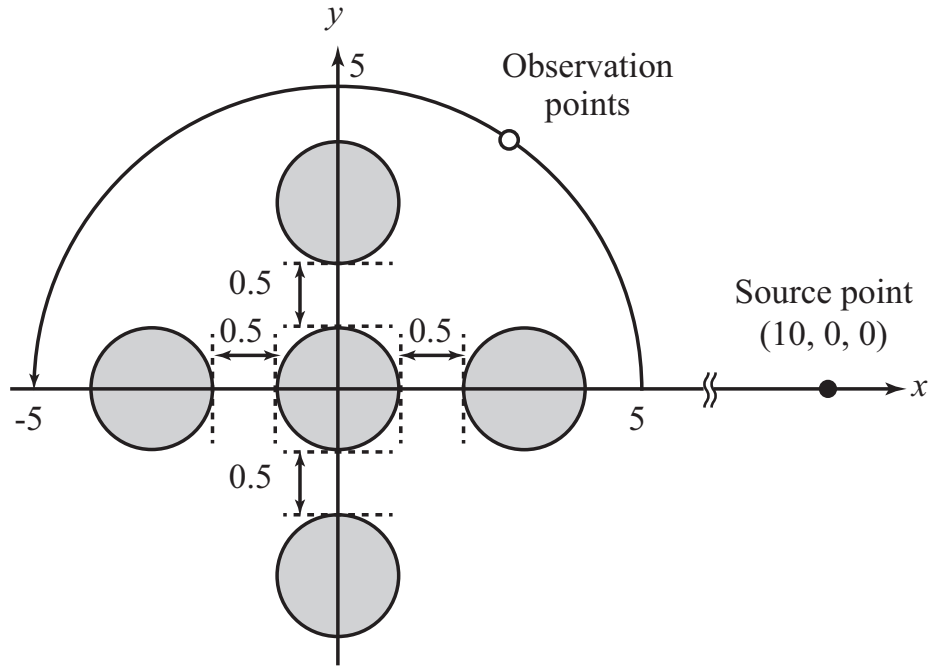


(a) 3つの有限長円筒の配置

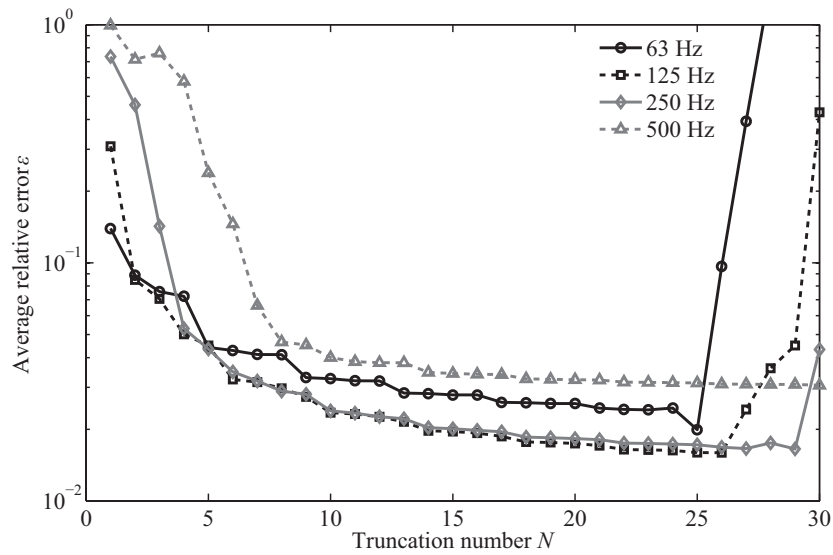


(b) 打ち切り次数に対する相対誤差の平均値の変化

Fig. 5.15 3つの有限長円筒を円状に配置した場合



(a) 5つの有限長円筒の配置



(b) 打ち切り次数に対する相対誤差の平均値の変化

Fig. 5.16 5つの有限長円筒配置した場合

Table 5.3 解析周波数 125 Hz における係数行列の条件数 (a : 2 つの場合, b : 3 つの場合, c : 5 つの場合)

N	Condition number		
	a	b	c
28	8.237E+59	8.254E+59	2.152E+60
29	2.496E+63	6.366E+62	3.457E+63
30	1.338E+67	1.521E+66	3.281E+67

を調べた。その結果を Table. 5.3 に示す。ここで、有限長円筒の個数に対して a : 2 つの場合, b : 3 つの場合, c : 5 つの場合とした。Table. 5.3 より, a より b のほうが全体的に条件数が小さく, また, a より c のほうが条件数が大きいという結果が得られた。そのため, Fig. 5.16 において誤差の増大が見られたのは, 係数行列の条件数の悪化によるものといえる。

以上より, 障害物の個数や配置も, 係数行列の条件数に影響を及ぼすため, 同じ解析周波数や観測点の設定でも, 妥当な計算結果が得られない場合があるといえる。そのため, これらの関係については, さらに検証を行う必要がある。

5.2.7 計算コスト

最後に, 提案手法の計算コストについて検証する。計算コストに関して BEM と大きく異なる部分は, 係数行列を得るために必要となる計算コストである。そこで, それぞれの手法において係数行列を得るために必要となる計算コストについて考える。BEM では, 計算で用いる要素数を N_b とすれば, 必要となる計算時間とメモリは共に $O(N_b^2)$ となる。一方で, 提案手法の計算コストは障害物の個数と打ち切り次数に依存し, 打ち切り次数は式 (23) のように障害物の寸法と解析周波数に依存する。

そこで, まずは提案手法において係数行列を得るのに必要となるメモリについて考える。このとき, 提案手法における未知数の数は $N_p = M \times (N + 1)^2$ となることから, 必要メモリのオーダーは $O(M^2 N^4)$ となる。ゆえに, メモリに関しては, 提案手法のほうが BEM よりも解析に必要な未知数の数が少なく済む場合に, 提案手法のほうが有利となる。ここで, BEM による解析では要素数 N_b は単純にそれぞれの障害物の表面積に依存する。一方で, 提案手法による解析では, 打ち切り次数をそれぞれの障害物に外接する球の半径 r_{pmin} における最大値に合わせて設定する必要がある。そのため, 障害物の寸法に関してばらつきが大きな場合は, 小さな障害物に対しても打ち切り次数が大きくなり, 全体として多くの未知数が必要となる。よって, 提案手法ではそれぞれの障害物の寸法に関してばらつきが小さなほうが打ち切り次数は小さくなる。さらに, それぞれの障害物の寸法が小さい場合のほうが, 同じ解析周波数でも打ち切り次数が小さくて済むことから, そのような場合には BEM よりも未知数が少なくなり, メモリに関して BEM よりも有利であると予想できる。

次に, 提案手法において係数行列を得るために必要となる計算量について考える。提案手法では $\mathbf{W}^{(q)}$ 等の計算, 再展開係数 $(S|R)^{(qp)}$ の計算にそれぞれ $O(N^4)$ の計算量が障害物の個数に応じ

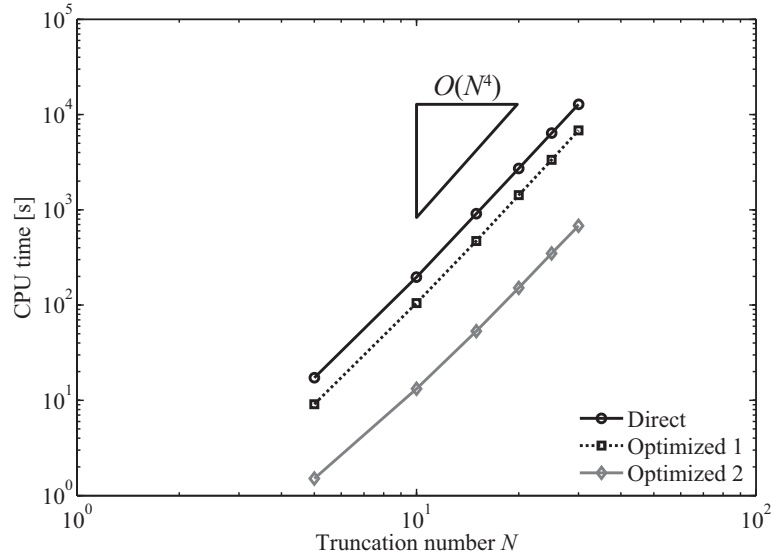


Fig. 5.17 提案手法において係数行列の計算に要した計算時間

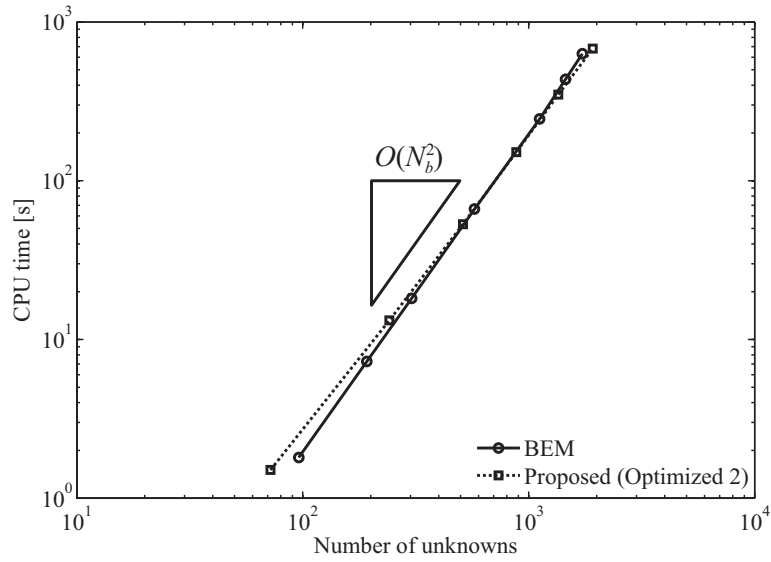


Fig. 5.18 係数行列を得るために要した計算時間の BEM との比較

て必要となり、さらに、行列の乗算に $O(N^6)$ が必要となる。そのため、計算量 C は c_1, c_2, c_3 を計算コードに依存する定数として、

$$C \approx 2c_1 MN^4 + c_2 {}_M C_2 N^4 + c_3 M(M-1)N^6 \quad (5.31)$$

となる。ここで、Fig. 5.17 に、提案手法を用いて 2 つの有限長円筒による散乱音場を解析する際に、係数行列を得るのに要した計算時間を示す。Fig. 5.17 より、計算時間はほぼ N^4 に比例しており、計算時間において大部分を占めるのは $\mathbf{W}^{(q)}$ 等の計算であるといえる。提案手法では、 $\mathbf{W}^{(q)}$ 等の一つの要素に対して、対象となる障害物の表面全体における積分計算が必要となるた

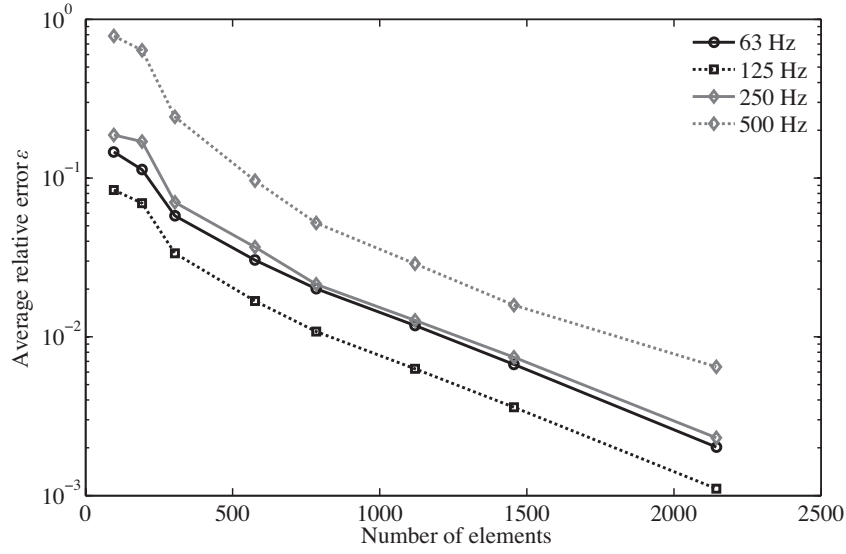


Fig. 5.19 BEM において要素数を変化させた場合の相対誤差の平均値

め、このような結果になったと考えられる。しかしながら、この解析対象のように、障害物の形状が同じである場合は、 $\mathbf{W}^{(q)}$, $\tilde{\mathbf{W}}^{(q)}$ を一度だけ計算すればよいから、計算時間の低減が可能である (Optimized 1)。また、有限長円筒のように、障害物形状に対称性や、 θ_q 方向に関する被積分関数の偶奇性など、理論的に積分計算を進めることができる部分がある場合には、さらに計算時間を低減することができる (Optimized 2)。

最後に、提案手法と BEM の未知数が同じである場合について、係数行列を得るのに要した計算時間を比較した。その結果を Fig. 5.18 に示す。Fig. 5.18 から、提案手法において理論的に解析できる部分を全て考慮した場合 (Optimized 2) は、BEM と同程度の計算時間で係数行列を得ることができている。また、BEM による計算において用いる要素数を変化させ、5.2.2 項等において参考値として用いた 2624 個の三角形一定要素による計算結果との相対誤差の平均値を調べた結果を Fig. 5.19 に示す。ここで、提案手法による計算結果と参考値との相対誤差の平均値は、十分に収束した計算結果においても 3% 程度あることから、Fig. 5.19 の結果においても相対誤差の平均値が 3% 以下となる要素数を調べれば、63, 125, 250, 500 Hz の解析周波数に対してそれぞれ $N_b = 576, 576, 784, 1120$ となる。一方で、提案手法においては、5.2.2 項で述べたように、63, 125, 250, 500 Hz の解析周波数に対して打ち切り次数 N をそれぞれ $N = 10, 13, 18, 27$ と設定すれば十分なことから、計算に必要となる未知数の数は $N_p = 242, 392, 722, 1568$ となる。これより、文献 [18, 50, 51] にもあるように、障害物の寸法や解析周波数によっては、提案手法では BEM よりも少ない未知数で十分な計算結果を得られる場合があり、そのような場合においては、BEM と比較して少ない計算時間で十分な計算結果を得ることができるといえる。さらに、それぞれの障害物形状が同じで、その個数が増えた場合には、提案手法では再展開係数を新たに計算するだけで係数行列が得られるため、より短い計算時間で十分な計算結果が得られると予想される。

以上より、提案手法における計算コストは障害物の個数と打ち切り次数に依存し、打ち切り次数

は Eq. (5.30) のように障害物の寸法と解析周波数に依存する。このとき、必要メモリにおいて提案手法が BEM よりも有利な場合は、解析に必要となる未知数の数が BEM よりも少なくて済むような場合であり、そのような場合として、

- それぞれの障害物の寸法に関するばらつきが小さい
- 障害物の寸法が小さい

といったことが挙げられる。また、実際に計算コードを実行した際の計算時間については、提案手法では積分計算に要する時間が大きいことから、解析に必要となる未知数の数が BEM よりも少ないだけでは有利とはいえない。そのため、未知数の数が BEM よりも少ないことに加え、

- それぞれの障害物形状が同じである
- 障害物形状に対称性などがあり積分計算を理論的に進めることができる

など、積分計算に要する時間を短縮できる場合には、計算時間についても BEM より有利となることがあるといえる。

5.3 まとめ

本章では，自由空間中に複数の障害物が配置されている場合の散乱音場の解析手法として，音場を球波動関数と多重極再展開を用いて表し，その展開係数については Kirchhoff–Huygens の公式を利用してマトリクス方程式を導き数値的に求める準理論解析手法を提案した。また，提案手法を用いた解析例として，複数個の有限長円筒が自由空間中に配置された散乱音場について計算を行い，BEM による計算結果との比較から，数値特性についての検証を行った。その結果，以下に示すような結果が得られた。

- (1) 提案手法では，BEM において生じる障害物内部の Dirichlet 周波数における解の非一意性による精度の低下のような問題がなく，滑らかな周波数応答関数の計算結果が得られる。
- (2) 提案手法においても，単一の障害物の場合と同様に，打ち切り次数が大きくなると係数行列の条件数の悪化し，得られた展開係数に含まれる誤差が大きくなるため，妥当な計算結果を得られない場合がある。また，条件数には障害物の個数や配置も関係している。
- (3) 観測点が障害物から離れた位置にあるほど，安定した計算結果が得られる。また，障害物に外接する球の内部に観測点を設定した場合は，妥当な計算結果を得ることができない。
- (4) 障害物間の距離は計算精度に与える影響が大きく，障害物の配置に関しては，それぞれの障害物に外接する球が，他の障害物に重ならないようにする必要がある。このことが保たれていない場合は計算結果が収束せず，不安定な振る舞いをする。
- (5) 提案手法における計算コストは障害物の個数や寸法，解析周波数に依存する。このとき，それぞれの障害物における寸法のばらつきが小さく，また，障害物の寸法が小さいほうが，解析に必要な打ち切り次数が小さくて済むため，BEM よりも必要メモリの面で有利である。
- (6) 実際に計算コードを実行した際の計算時間については，提案手法のほうが積分計算に要する時間が大きいため計算時間は BEM よりも大きくなる。しかし，(5) のように解析に必要な未知数の数が BEM よりも少ないことに加え，それぞれの障害物の形状が同じで，かつ有限長円筒のように障害物形状に対称性があるなど，積分計算を理論的に進めることが出来る場合は，計算時間においても有利となることがある。

第 6 章

楕円体波動関数と Kirchhoff–Huygens の 公式を用いた散乱音場の準理論解析 手法

前章までで定式化してきた準理論解析手法では、音場を波動関数を用いて展開する際に、球波動関数を用いてきた。しかしながら第 4 章における提案手法の数値特性に関して、BEM による計算結果との比較から検証を行った結果、障害物形状が球形に近いほど精度がよく、球形から乖離するほど精度が悪化することが分かった。そこで本章では、障害物が単一であり、また障害物形状が扁平な場合の準理論解析手法として、音場の展開表現として楕円体波動関数を用いた手法を構築する。定式化した準理論解析手法を用いて障害物形状が扁平な場合について計算を行い、得られた計算結果を BEM による計算結果と比較することで、提案手法の数値特性について検証する。

6.1 提案解析手法

6.1.1 問題設定

ここでは、第 3 章および第 4 章と同様に、単一の障害物と点音源からなる散乱音場について考える。このとき、扁平な障害物の中心点を原点とし、その障害物に外接する扁球面が扁球座標系を用いて ξ_{min} で与えられるとする。また、観測点の座標を $\mathbf{r} = (\xi, \eta, \varphi)$ 、音源の座標を $\mathbf{r}_s = (\xi_s, \eta_s, \varphi_s)$ 、障害物表面上の座標を $\mathbf{r}_0 = (\xi_0, \eta_0, \varphi_0)$ とそれぞれ扁球座標系を用いて表し、音源は障害物に外接する扁球面の外部にあるとする。

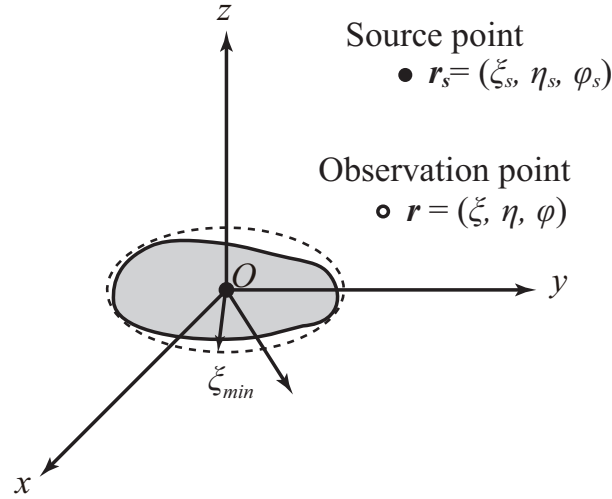


Fig. 6.1 扁平な障害物による散乱音場

6.1.2 定式化

扁球座標系における楕円体波動関数を用いれば、点音源による入射ポテンシャルは次のように展開することができる。

$$\phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{jk}{2\pi} \frac{2 - \delta_{0m}}{N_{mn}} S_{mn}(-jh, \eta) S_{mn}(-jh, \eta_s) \cos m(\varphi - \varphi_s) \times \begin{cases} R_{mn}^{(1)}(-jh, j\xi) R_{mn}^{(3)}(-jh, j\xi_s), & \xi < \xi_s \\ R_{mn}^{(1)}(-jh, j\xi_s) R_{mn}^{(3)}(-jh, j\xi), & \xi > \xi_s \end{cases} \quad (6.1)$$

ここで δ_{0m} : Kronecker のデルタ、また N_{mn} : 正規化因子であり、

$$N_{mn} = \int_{-1}^1 S_{mn}(-jh, \eta) S_{mn}(-jh, \eta) d\eta \quad (6.2)$$

である。同様に、散乱ポテンシャルについては次のように展開する。

$$\phi_s(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} B_{mn} R_{mn}^{(3)}(-jh, j\xi) S_{mn}(-jh, \eta) \cos m(\varphi - \varphi_s) \quad (6.3)$$

また、Kirchhoff-Huygens の公式は次式で与えられる。

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|} e^{jk|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|} + \iint_{\Gamma} \left(\phi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}_0} - \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r}_0)} \phi(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \right) dS_0 \quad (6.4)$$

ここで、音源位置は $\xi_{min} < \xi_s$ の範囲に設定しているため、常に $\xi_0 < \xi_s$ が成り立つ。ゆえに、入射ポテンシャルの楕円体波動関数による展開表現は

$$\phi_i(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_s) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} A_{mn}(\xi_s, \eta_s) R_{mn}^{(1)}(-jh, j\xi_0) S_{mn}(-jh, \eta_0) \cos m(\varphi_0 - \varphi_s) \quad (6.5)$$

$$A_{mn}(\xi_s, \eta_s) = \frac{jkQ}{2\pi} \frac{2 - \delta_{0m}}{N_{mn}} R_{mn}^{(3)}(-jh, j\xi_s) S_{mn}(-jh, \eta_s)$$

で与えられる。また、Green 関数として 3 次元音場における基本解を採用すれば $\xi_0 < \xi$ という条件のもと、その展開表現は

$$G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{jk}{2\pi} \frac{2 - \delta_{0m}}{N_{mn}} S_{mn}(-jh, \eta_0) S_{mn}(-jh, \eta) \cos m(\varphi - \varphi_0) \times R_{mn}^{(1)}(-jh, j\xi_0) R_{mn}^{(3)}(-jh, j\xi) \quad (6.6)$$

となる。Eq. (6.6) を Kirchhoff-Huygens の公式に代入し、 $S_{mn}(-jh, \eta) \cos m\varphi$ に関する直交性、

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 S_{mn}(-jh, \eta) S_{ji}(-jh, \eta) \cos m\varphi \cos j\varphi d\eta d\varphi = \pi N_{mn} \delta_{jm} \delta_{in} \quad (6.7)$$

を利用すれば、

$$B_{ji} \cos j\varphi_s = \iint_{\Gamma} \left\{ \phi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} \frac{jk}{2\pi} \frac{1 - \delta_{0j}}{N_{ji}} R_{ji}^{(1)}(-jh, j\xi_0) S_{ji}(-jh, \eta_0) \cos j\varphi_0 - \frac{j\omega\rho}{Z(\mathbf{r}_0)} \phi(\mathbf{r}_0) \frac{jk}{2\pi} \frac{1 - \delta_{0j}}{N_{ji}} R_{ji}^{(1)}(-jh, j\xi_0) S_{ji}(-jh, \eta_0) \cos j\varphi_0 \right\} dS_0 \quad (6.8)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, \quad i = j, j+1, j+2, \dots$$

が得られる。さらに、速度ポテンシャルに関して Eq. (6.3), (6.5) を代入し、未知の展開係数 B_{mn} について整理すれば、

$$B_{ji} \cos j\varphi_s - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} B_{mn} (X_{mn}^{ji} + Y_{mn}^{ji}) = A_{mn} (\tilde{X}_{mn}^{ji} + \tilde{Y}_{mn}^{ji}) \quad (6.9)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, \quad i = j, j+1, j+2, \dots$$

ただし、

$$X_{mn}^{ji} = \frac{jk}{2\pi} \frac{1 - \delta_{0j}}{N_{ji}} \iint_{\Gamma} \Psi_{mn}^{(3)}(\xi_0, \eta_0) \cos m(\varphi_0 - \varphi_s) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} \Psi_{ji}^{(1)}(\xi_0, \eta_0) \cos j\varphi_0 dS_0$$

$$Y_{mn}^{ji} = -\frac{1 - \delta_{0j}}{N_{ji}} \iint_{\Gamma} \frac{k\omega\rho}{2\pi Z(\mathbf{r}_0)} \Psi_{mn}^{(3)}(\xi_0, \eta_0) \cos m(\varphi_0 - \varphi_s) \Psi_{ji}^{(1)}(\xi_0, \eta_0) \cos j\varphi_0 dS_0$$

$$\tilde{X}_{mn}^{ji} = \frac{jk}{2\pi} \frac{1 - \delta_{0j}}{N_{ji}} \iint_{\Gamma} \Psi_{mn}^{(1)}(\xi_0, \eta_0) \cos m(\varphi_0 - \varphi_s) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} \Psi_{ji}^{(1)}(\xi_0, \eta_0) \cos j\varphi_0 dS_0$$

$$\tilde{Y}_{mn}^{ji} = -\frac{1 - \delta_{0j}}{N_{ji}} \iint_{\Gamma} \frac{k\omega\rho}{2\pi Z(\mathbf{r}_0)} \Psi_{mn}^{(1)}(\xi_0, \eta_0) \cos m(\varphi_0 - \varphi_s) \Psi_{ji}^{(1)}(\xi_0, \eta_0) \cos j\varphi_0 dS_0$$

また、

$$\Psi_{mn}^{(1)}(\xi, \eta) = R_{mn}^{(1)}(-jh, j\xi) S_{mn}(-jh, \eta)$$

$$\Psi_{mn}^{(3)}(\xi, \eta) = R_{mn}^{(3)}(-jh, j\xi) S_{mn}(-jh, \eta)$$

とおいた。Eq. (6.8) における無限級数項を適当な次数 N で打ち切れば、 $(N+1)(N+2)/2$ 個の未知の展開係数 B_{mn} からなるマトリクス方程式が得られる。

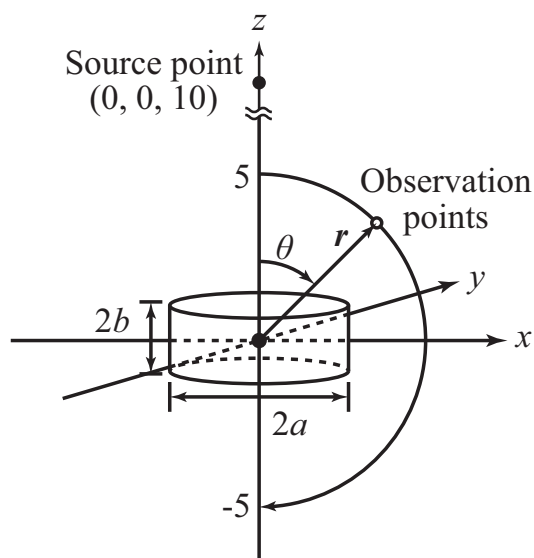


Fig. 6.2 扁平な有限長円筒と点音源による散乱音場

6.2 数値計算例

ここでは提案手法を用いて障害物による散乱音場を実際に解析し，提案手法の妥当性を確認するとともに，提案手法の数値特性について検証する。このとき，提案手法による計算結果との比較対象としては，これまでと同様に BEM による計算結果を用いる。また，障害物形状としては，第 4 章において提案した球波動関数と Kirchhoff-Huygens の公式を用いた準理論解析手法では解析することが難しかった，扁平な障害物形状について扱う。以下に，本節で実行する計算タスクを示す。

- 散乱波の指向特性
 - － 障害物形状が扁平な有限長円筒である場合
 - － 障害物形状が正方形板形状である場合
 - － 障害物形状が長方形板形状である場合
- 計算コスト

ここで，提案手法の計算プログラムを実装する際に必要な楕円体波動関数は，Zhang による Fortran コード [52, 53] を基にしたものが Python 用の科学技術計算パッケージである Scipy [54] において実装されているが，精度や安定性の面で問題があったため，自ら実装したものをを用いた。その詳細は付録に記す。

また，数値計算に用いた計算機環境は以下のとおりである。

- CPU: Intel Core i7 2.80 GHz
- Memory: 8 GB
- Language: Python

6.2.1 扁平な有限長円筒による散乱音場の解析

ここでは障害物形状として扁平な有限長円筒を設定し、Fig. 6.2 に示す音場における散乱波の指向特性を計算する。このとき、有限長円筒の寸法を直径については $2a = 1$ で固定し、高さについては $2b = 0.5, 0.25, 0.1, 0.05$ と徐々に小さく変化させていった場合について計算を行った。また、音源点は $\mathbf{r}_s = (0, 0, 10)$ とし、観測点は原点から 5 m の位置に設定した。

まずは、有限長円筒の寸法を直径 $2a = 1.0$ 、高さ $2b = 0.5$ とした場合について計算した。このとき BEM による計算では 952 個の三角形一定要素（最大メッシュ長：0.104 [m]）を用いた。また、提案手法による計算では焦点間の距離を $d = 1$ 、打ち切り次数を $N = 10$ とし、積分計算は BEM で用いた三角形一定要素と同じものを用いて実行した。

Fig. 6.3 に、直径 $2a = 1.0$ 、高さ $2b = 0.5$ の有限長円筒による散乱波の計算結果を示す。ここで BEM : BEM による計算結果、Spherical : 第 4 章で定式化した球波動関数を用いた準理論解析手法を用いた場合の計算結果、Spheroidal : 本章で定式化した楕円体波動関数を用いた準理論解析手法を用いた場合の計算結果である。Fig. 6.3 より、楕円体波動関数を用いた手法による計算結果は、指向特性の概形については捉えられているものの、球波動関数を用いた手法と比較して精度が良いとはいえない。さらに、解析周波数が大きくなるほど、提案手法の計算結果における誤差も大きくなっていることが確認できる。また、これまでと同様に、

$$\varepsilon = \frac{1}{181} \sum_{n=1}^{181} \frac{|p_{ref}(\mathbf{r}_n) - p(\mathbf{r}_n)|}{|p_{ref}(\mathbf{r}_n)|} \quad (6.10)$$

として、提案手法による計算結果と BEM による計算結果との相対誤差の平均値を調べた。Fig. 6.4 に、散乱波の指向特性における相対誤差の平均値を Eq. (6.10) を用いて算出した結果を示す。Fig. 6.4 より、打ち切り次数 N を大きくしても計算結果は収束しないことが確認できる。また、BEM による計算結果との相対誤差の平均値も大きい。このことから、波動関数として楕円体波動関数を用いた場合は、ここで用いた直径 $2a = 1.0$ 、高さ $2b = 0.5$ の有限長円筒による散乱音場を十分な精度で計算するのは難しいといえる。

次に、有限長円筒の寸法において高さを $2b = 0.25$ とした場合についても散乱波の指向特性について計算を行った。このとき、BEM による計算結果では 736 個の三角形一定要素（最大メッシュ長：0.104 [m]）を用いた。また、提案手法による計算結果では焦点間の距離を $d = 1$ 、打ち切り次数を $N = 10$ とし、積分計算には BEM で用いたものと同じ三角形一定要素を用いて実行した。この場合における結果を Fig. 6.5 に示す。ここで、楕円体波動関数を用いた準理論解析手法による計算結果は、球波動関数を用いた準理論解析手法による計算結果と同程度の計算結果が得られており、BEM による計算結果との誤差も少ない。ゆえに、この場合は楕円体波動関数を用いた準理論解析手法で妥当な計算結果が得られているといえる。さらに、打ち切り次数 N を変化させ、それぞれ打ち切り次数における計算結果と BEM による計算結果との相対誤差の平均値を調べた。Fig. 6.6 にその結果を示す。ここで、Fig. 6.6 (a) は楕円体波動関数を用いた準理論解析手法における相対誤差の平均値、Fig. 6.6 (b) は球波動関数を用いた準理論解析手法における相対誤差の平均値である。Fig. 6.6 (a) より、打ち切り次数 N を大きくした場合に誤差の増大が見られるもの

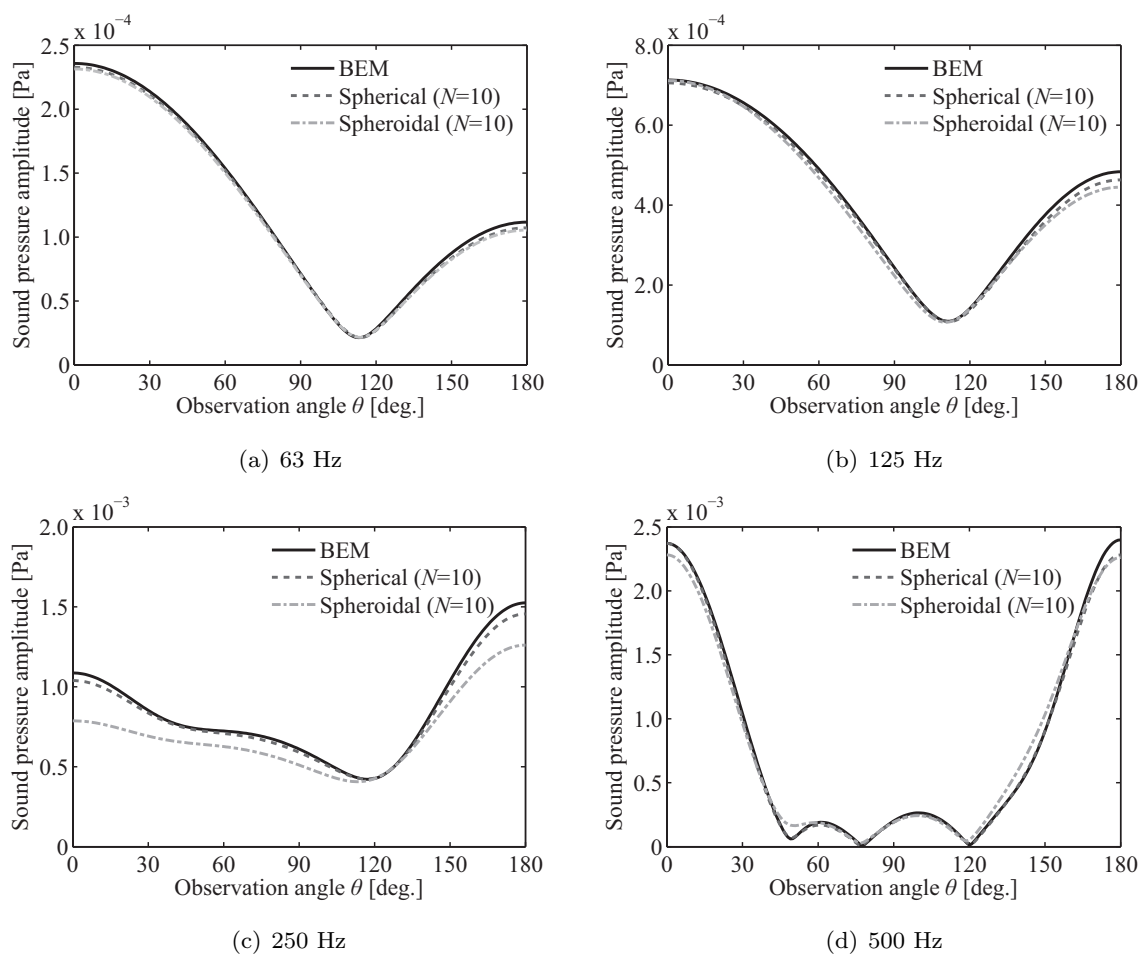


Fig. 6.3 高さ $2b = 0.5$ とした場合の散乱波の指向特性

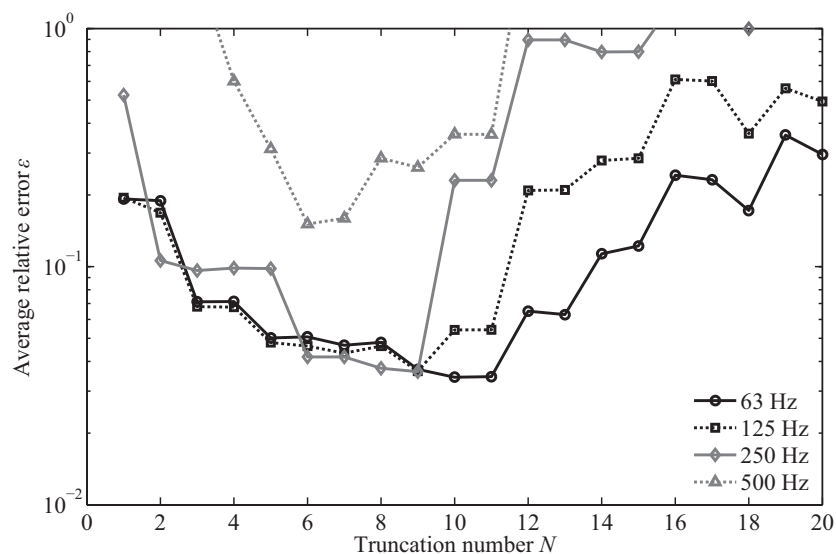


Fig. 6.4 高さ $2b = 0.5$ とした場合の散乱波の指向特性における相対誤差の平均値の変化

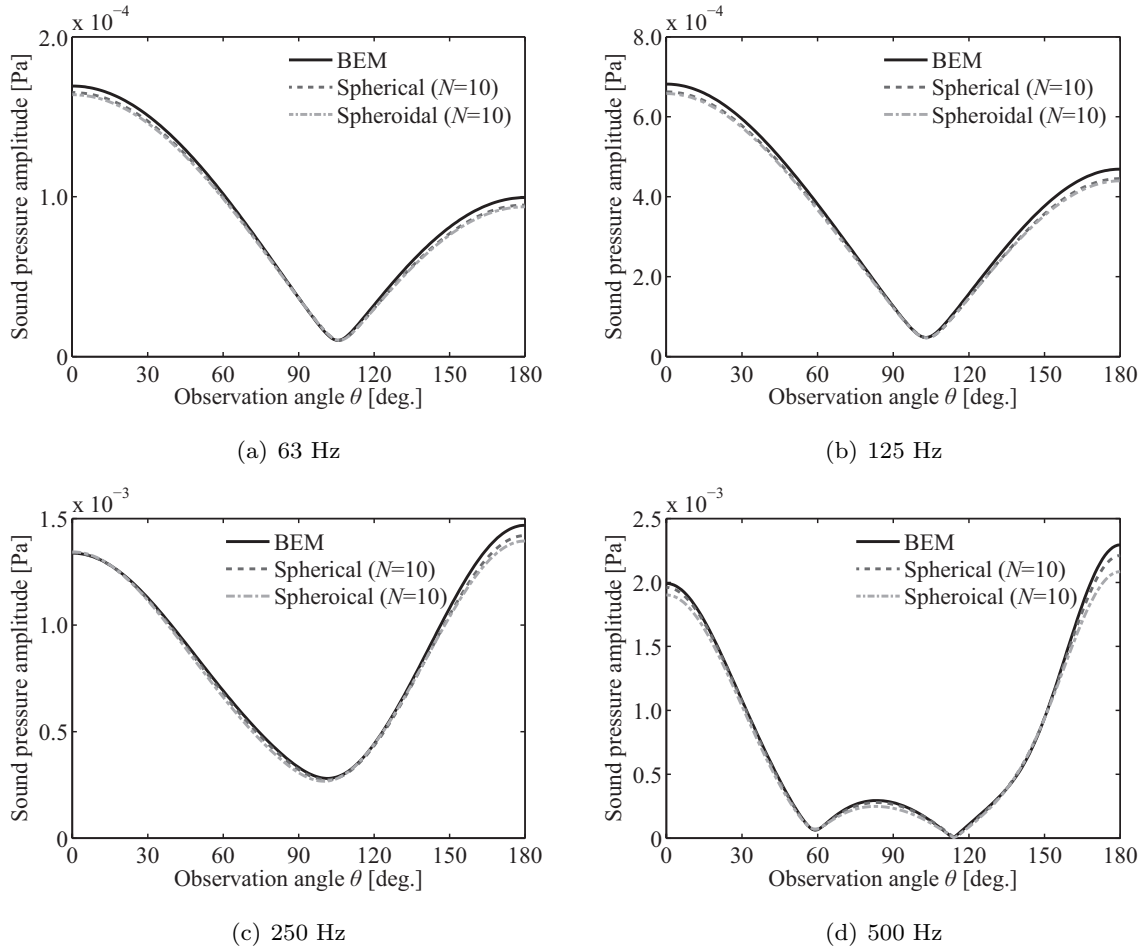
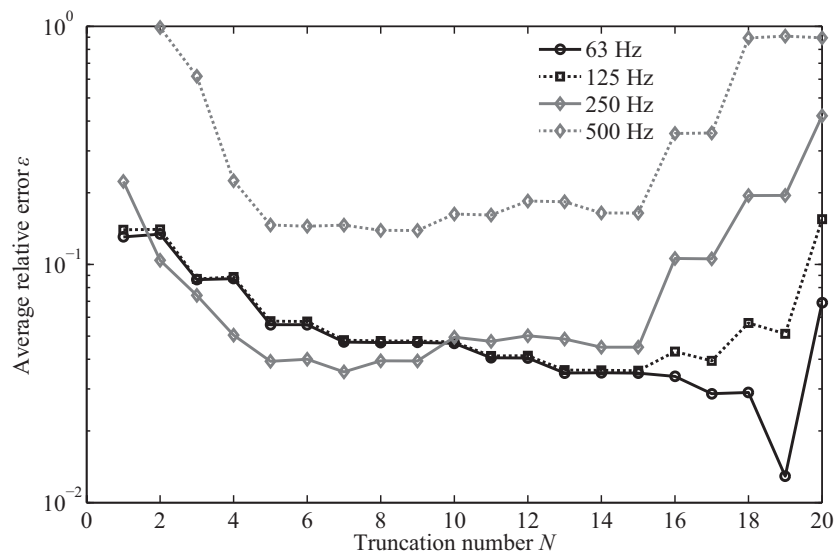


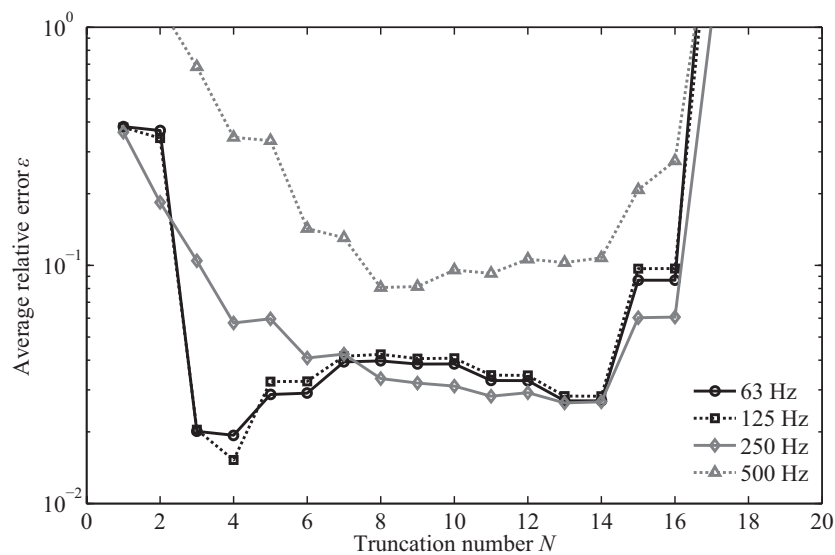
Fig. 6.5 高さ $2b = 0.25$ とした場合の散乱波の指向特性

の、さきほどの Fig. 6.4 の結果と比較して、安定した計算結果が得られる打ち切り次数 N の上限が大きくなっている。また、球波動関数を用いた場合の結果である Fig. 6.6 (b) と比較しても、妥当な計算結果が得られる打ち切り次数 N の上限について改善が見られる。さらに、誤差の増加の度合いに関しても球波動関数を用いた場合の準理論解析手法と比べて緩やかである。そのため、高さを $2b = 0.25$ とした場合は打ち切り次数 N の上限に関して、本章で提案した楕円体波動関数を用いた準理論解析手法のほうが、前章において提案した球波動関数を用いた準理論解析手法よりも安定した結果を得ることができるといえる。

さらに、有限長円筒の高さを $2b = 0.1$ とし、楕円体波動関数を用いた場合と球波動関数を用いた場合についてそれぞれ、BEM による計算結果との相対誤差の平均値を算出した。このとき BEM による計算結果では 664 個の三角形一定要素（最大メッシュ長：0.104 [m]）を用いた。また、提案手法による計算では焦点間の距離を $d = 1$ とし、積分計算は BEM で用いた三角形一定要素と同じものを用いて実行した。この場合の結果を Fig. 6.7 に示す。Fig. 6.7 (a) より、楕円体波動関数を用いた場合には、打ち切り次数 N が大きくなることで、計算結果における BEM との誤差も小さくなり、計算結果が収束していく様子を確認することができる。一方で、Fig. 6.7 (b) の球波動



(a) 楕円体波動関数を用いた準理論解析手法の場合

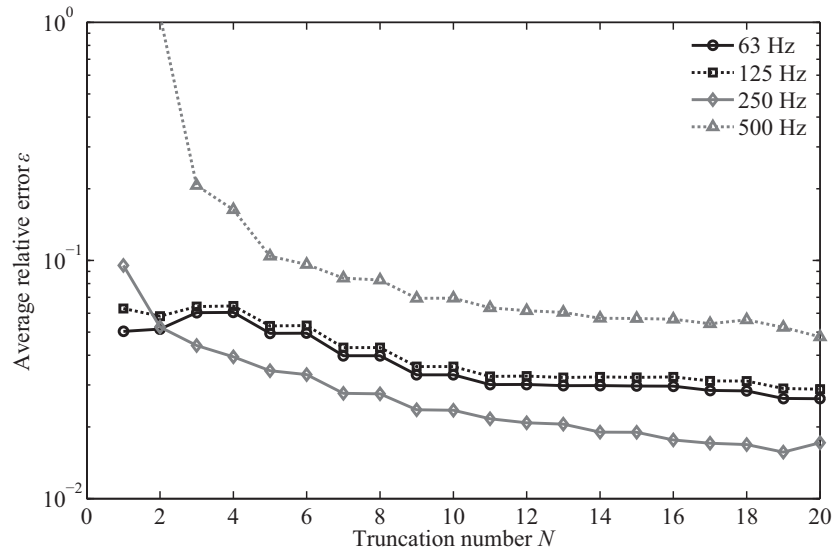


(b) 球波動関数を用いた準理論解析手法の場合 (Fig. 4.15 (b), 再掲)

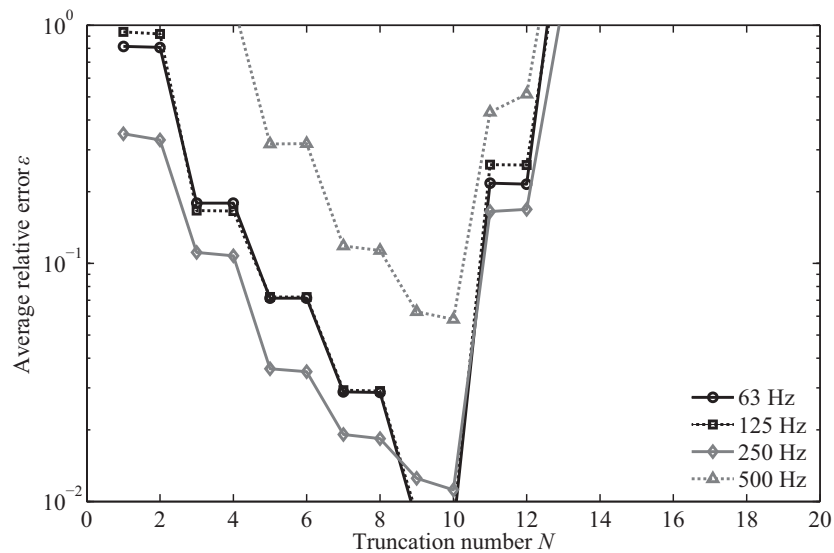
Fig. 6.6 高さ $2b = 0.25$ とした場合の散乱波の指向特性における相対誤差の平均値の変化

関数を用いた場合の結果に関しては、打ち切り次数 N が $N \leq 10$ である範囲については BEM との誤差は収束していくが、 $N > 10$ である範囲については誤差が急激に増加し、妥当な計算結果が得られないことが分かる。

最後に、有限長円筒の高さをさらに小さくし、 $2b = 0.05$ とした場合について計算した。このとき、BEM による計算結果では 592 個の三角形一定要素（最大メッシュ長：0.104 [m]）を用いた。また、提案手法による計算結果では焦点間の距離を $d = 1$ とし、積分計算には BEM で用いたものと同じ三角形一定要素を用いて実行した。この場合において、BEM による計算結果との相対誤差



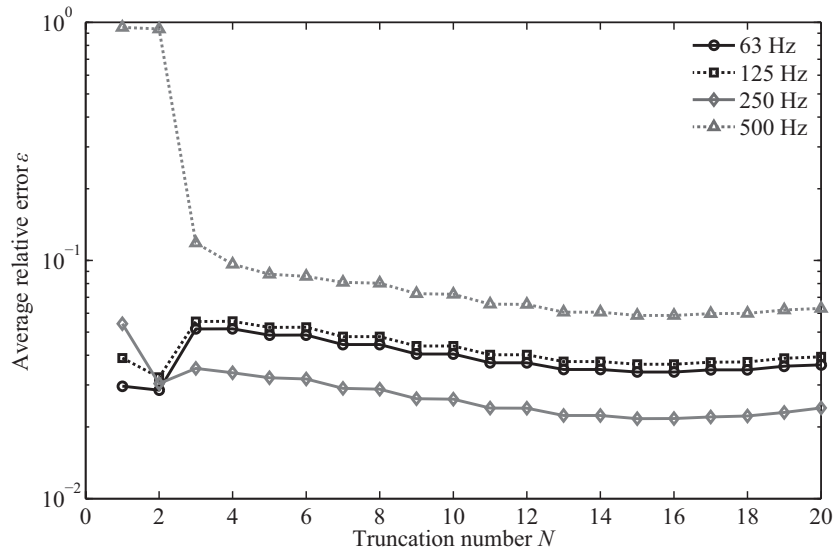
(a) 楕円体波動関数を用いた準理論解析手法の場合



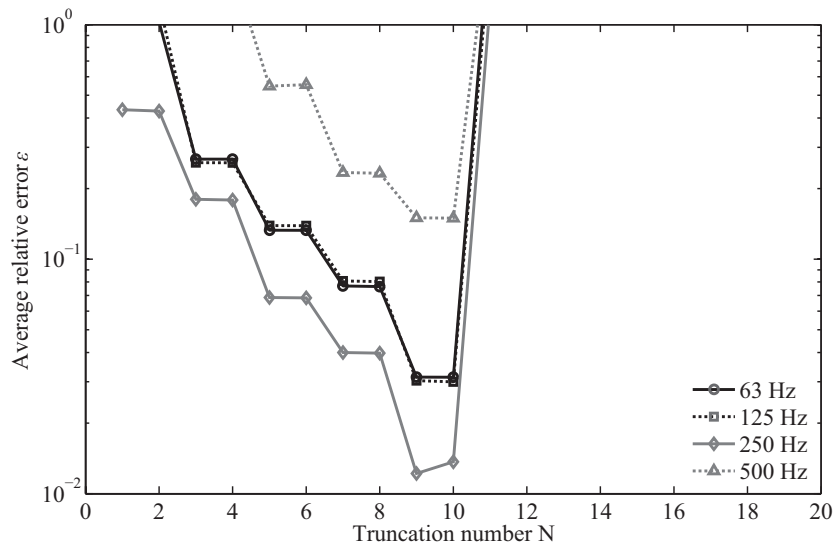
(b) 球波動関数を用いた準理論解析手法の場合

Fig. 6.7 高さ $2b = 0.1$ とした場合の散乱波の指向特性における相対誤差の平均値の変化

の平均値を、楕円体波動関数を用いた場合と球波動関数を用いた場合のそれぞれに対して算出した結果を Fig. 6.8 に示す。Fig. 6.8 (a) より、楕円体波動関数を用いた準理論解析手法の場合、今回計算を行った範囲においては計算結果は収束しており、安定した計算結果が得られているといえる。一方で、Fig. 6.8 (b) の球波動関数を用いた準理論解析手法の場合には、先ほどの有限長円筒の高さを $2b = 0.1$ とした Fig. 6.7 (b) の結果と同様に、打ち切り次数 N が $N > 10$ である範囲については誤差が急激に増加していくことが確認でき、精度や収束の安定した計算結果を得るのは難しいといえる。



(a) 楕円体波動関数を用いた準理論解析手法の場合



(b) 球波動関数を用いた準理論解析手法の場合

Fig. 6.8 高さ $2b = 0.05$ とした場合の散乱波の指向特性における相対誤差の平均値の変化

以上より、障害物が扁平な有限長円筒である場合の散乱波の指向特性を、波動関数として楕円体波動関数を用いた場合と球波動関数を用いた場合のそれぞれについて計算し、比較したことから得られた結果をまとめると、楕円体波動関数を用いた準理論解析手法は障害物形状が扁平であるほど良い計算結果が得られるといえる。そこで、次式を用いて扁平率 Δ を設定する。

$$\Delta = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a} \quad (6.11)$$

Eq. (6.11) より、本項で設定した有限長円筒の寸法における扁平率はそれぞれ $\Delta = 0.5, 0.75, 0.9$,

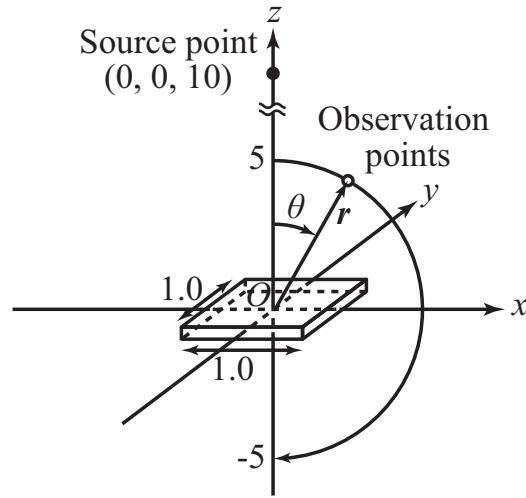


Fig. 6.9 正方形板形状の障害物と点音源による散乱音場

0.95 となる。扁平率 Δ を基準として楕円体波動関数を用いた準理論解析手法のほうが球波動関数を用いた準理論解析手法よりも良い結果が得られる範囲について考えれば、障害物における扁平率が $\Delta \geq 0.75$ である範囲が楕円体波動関数を用いるのに適した状況であるといえる。そのため、波動関数の選択に関して、楕円体波動関数・球波動関数を適切に使い分けるためには、障害物形状の扁平率を考慮する必要がある。

6.2.2 正方形板形状の障害物による散乱音場の解析

前項では、有限長円筒の直径については $2a = 1$ で固定し、高さ $2b$ を変化させ、それぞれの有限長円筒による散乱音場の解析を行うことで、提案手法の妥当性について確認することができた。本項では障害物形状として正方形板形状を設定し、散乱波の指向特性を計算することで提案手法の適用範囲について検証する。まずは、日本建築学会・音響数値解析小委員会により公開されているベンチマーク問題 [25] を参考に、寸法が $1 \times 1 \times 0.05$ [m] の正方形板形状の障害物による散乱音場について解析を行う。

まずは、Fig. 6.9 に示すような、寸法 $1 \times 1 \times 0.05$ [m] の正方形板形状の障害物による散乱波の指向特性について計算する。このとき、BEM による計算では 480 要素の三角形一定要素（最大メッシュ長：0.100 [m]）を用いて計算を行った。また、提案手法による計算では焦点間の距離 $d = \sqrt{2}$ 、打ち切り次数 $N = 15$ とし、積分計算には BEM で用いたものと同じ三角形一定要素を用いて実行した。Fig. 6.10 に、寸法が $1 \times 1 \times 0.05$ [m] の正方形板形状の障害物による散乱波の指向特性の計算結果を示す。Fig. 6.10 より、有限長円筒において高さ $2b = 0.05$ とした場合と同様に、提案手法による解析結果は BEM による解析結果と比べても、精度よく計算できているといえる。さらに、打ち切り次数 N を大きくしていった際における相対誤差の平均値の変化について調べた結果を Fig. 6.11 に示す。この結果より、打ち切り次数 N を大きくしていくことで、提案手

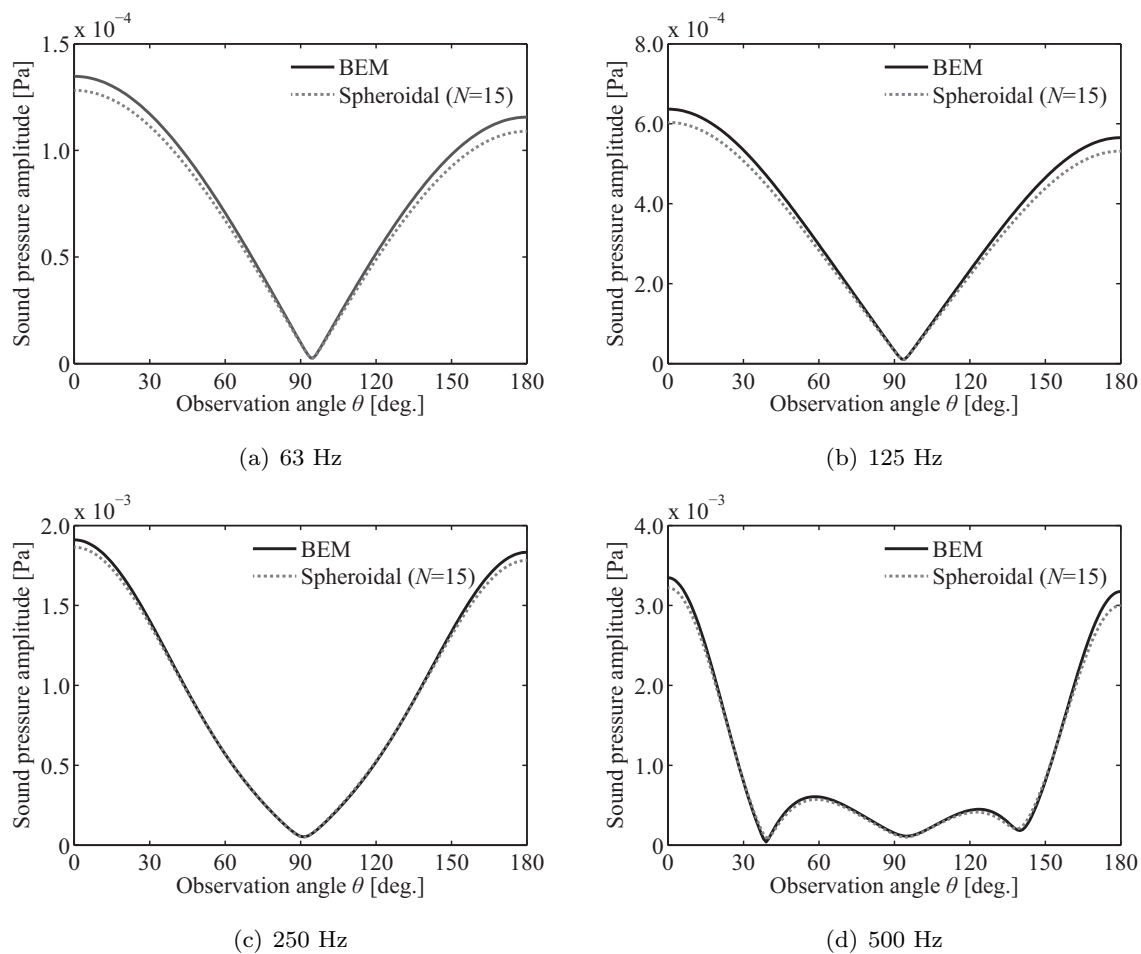


Fig. 6.10 寸法 $1 \times 1 \times 0.05$ [m] の正方形板形状の障害物による散乱波の指向特性

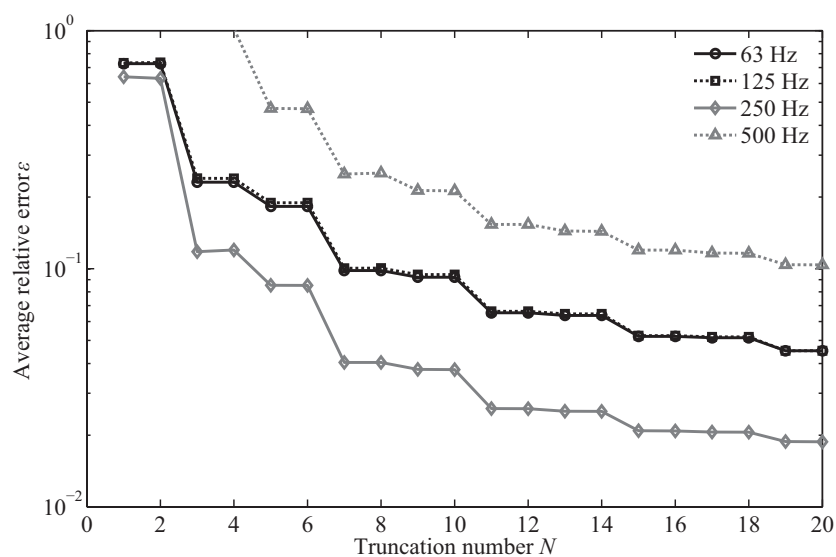


Fig. 6.11 寸法 $1 \times 1 \times 0.05$ [m] の正方形板形状の障害物による散乱波の指向特性の計算結果における相対誤差の平均値

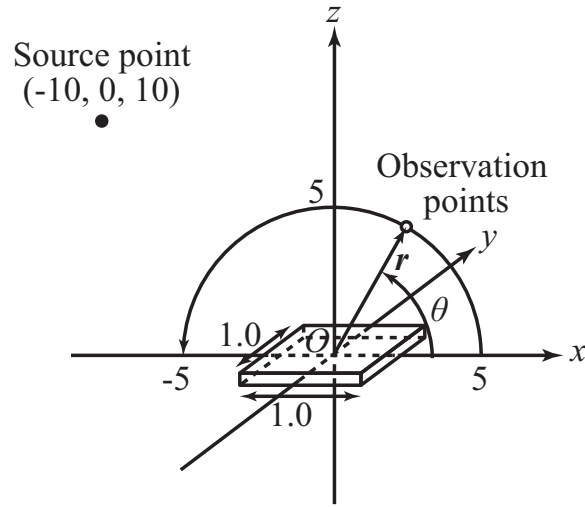


Fig. 6.12 音源が斜め方向にある場合の正方形板形状の障害物と点音源による散乱音場

法による計算結果と BEM による計算結果との相対誤差の平均値は小さくなり、ある値に収束していくといえる。

次に、音源位置が斜め方向にある場合について計算する。このとき、Fig. 6.12 に示すような、Fig. 6.9 と同じ正方形板形状の障害物による散乱音場において、音源位置が $\mathbf{r}_s = (-10, 0, 10)$ である場合を想定した。Fig. 6.13 に、音源が斜め方向にある場合の寸法が $1 \times 1 \times 0.05$ [m] の正方形板形状の障害物による散乱波の指向特性の計算結果を示す。Fig. 6.13 より、先ほどと同様に、この場合においても提案手法による解析結果は BEM による解析結果に対する誤差も小さく、精度よく計算できているといえる。また、打ち切り次数 N を大きくしていった際における相対誤差の平均値の変化について調べた結果を Fig. 6.14 に示す。この結果についても、打ち切り次数 N を大きくしていくことで、提案手法による計算結果と BEM による計算結果との相対誤差の平均値は小さくなり、ある値に収束していくといえる。

以上より、障害物形状が正方形板形状である場合についても、提案手法を用いて妥当な計算結果が得られるといえる。一方で、本章における楕円体波動関数を用いた準理論解析手法についても、第 2 種 Radial 関数は引数の小さな場合に絶対値が非常に大きな値となる。そのため、第 5 章までで提案してきた球波動関数を用いた準理論解析手法と同様に、打ち切り次数 N が大きくなることで係数行列の条件数も大きくなり、その結果、得られた展開係数 B_{mn} に含まれる誤差が大きくなるため、妥当な計算結果が得られない状況が起こると予想できる。

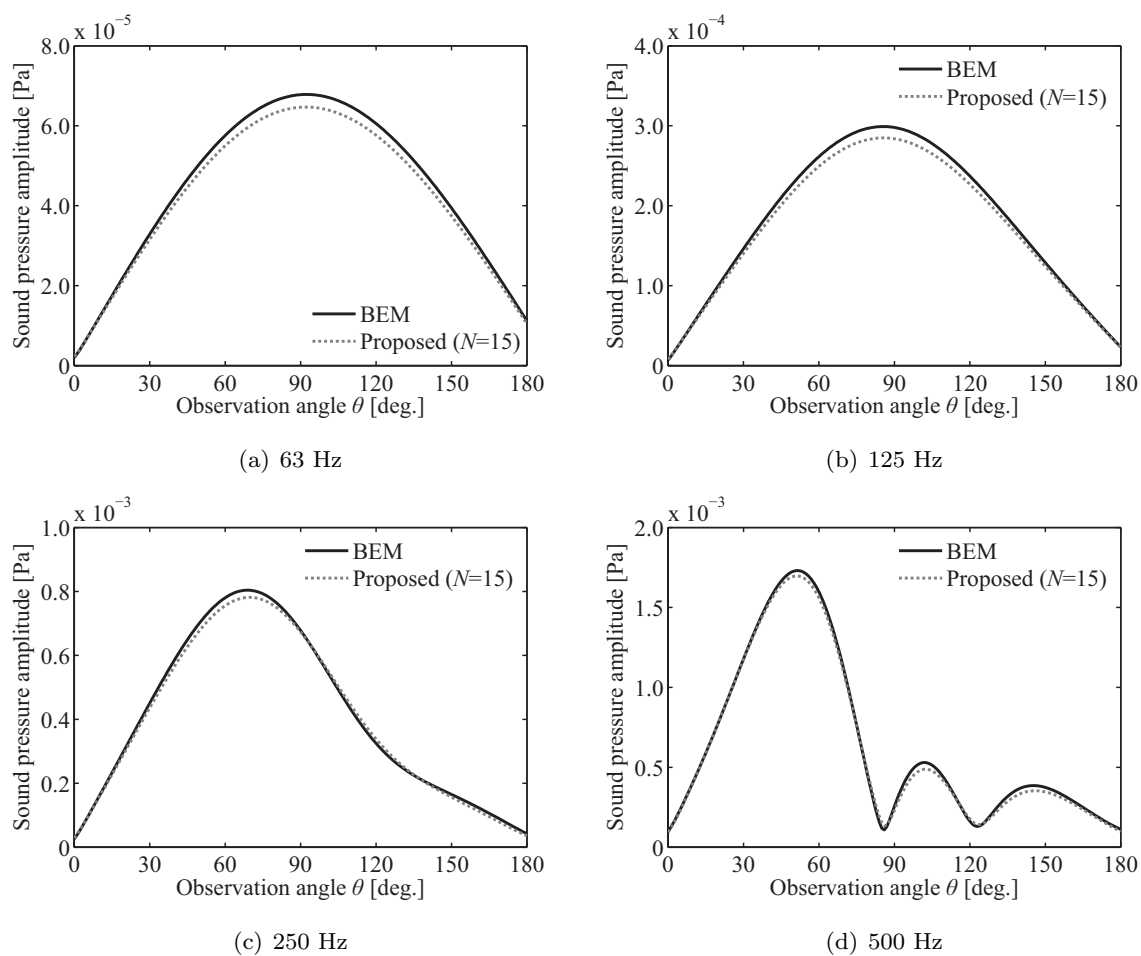


Fig. 6.13 寸法 $1 \times 1 \times 0.05$ [m] の正方形板形状の障害物に対して音源が斜め方向にある場合の散乱波の指向特性

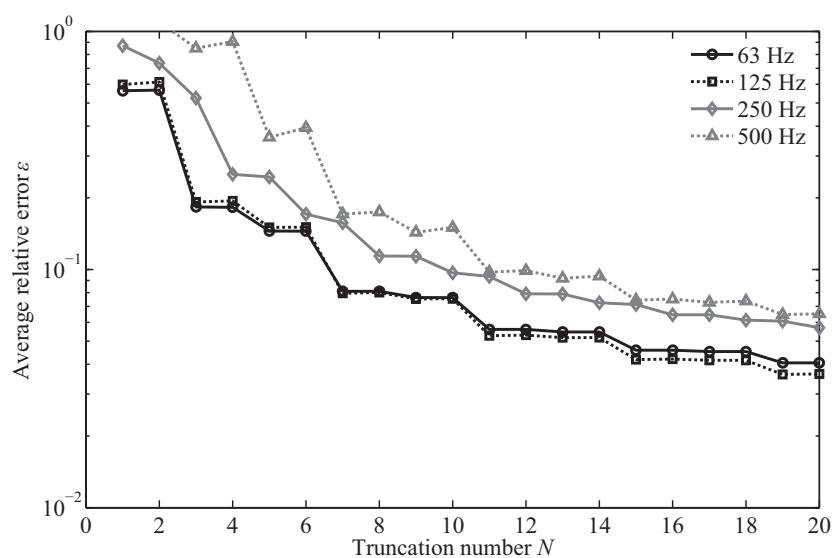


Fig. 6.14 寸法 $1 \times 1 \times 0.05$ [m] の正方形板形状の障害物に対して音源が斜め方向にある場合の散乱波の指向特性の計算結果における相対誤差の平均値

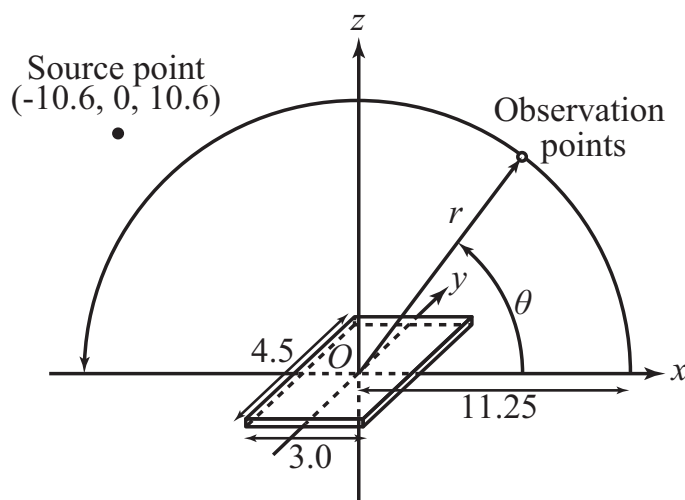


Fig. 6.15 長方形板形状の障害物と点音源による散乱音場

6.2.3 長方形板形状の障害物による散乱音場の解析

日本建築学会・音響数値解析小委員会により公開されているベンチマーク問題 [25] に基づいた、Fig. 6.15 に示すような、寸法 $3 \times 4.5 \times 0.075$ [m] の長方形板形状の障害物による散乱音場を扱う。ここで、BEM による計算結果では 3064 要素の四角形一定要素（最大メッシュ長：0.10 [m]）を用いた。また、提案手法による計算結果では、焦点間の距離 $d = \sqrt{3^2 + 4.5^2} = 5.408$ ，打ち切り次数 $N = 20$ とした。さらに、提案手法における積分計算では計算時間の都合上、BEM による計算で用いた要素ではなく、1532 要素の三角形一定要素（最大メッシュ長：0.20 [m]）を新たに作成して用いた。寸法 $3 \times 4.5 \times 0.075$ [m] の長方形板形状の障害物による散乱波の指向特性の計算結果を Fig. 6.16 に示す。Fig. 6.16 より、ここで用いた解析対象のような比較的大きな障害物に対しても妥当な計算結果を得ることができているといえる。しかしながら、Fig. 6.16 (d) の解析周波数を 500 Hz とした場合では、提案手法による計算結果は指向特性の概形は捉えられているものの、BEM との誤差は大きい。また、Fig. 6.17 に打ち切り次数 N を大きくしていった際の相対誤差の平均値の変化を示す。Fig. 6.17 より、解析周波数がそれぞれ 63, 125, 250 Hz である場合については、打ち切り次数を大きくすることで相対誤差の平均値が小さくなり、計算結果が収束していく様子が確認できる。一方で、解析周波数が 500 Hz である場合については、BEM との相対誤差の平均値は大きいままである。そのため、現状では焦点間の距離 d と波数に依存するパラメータ $h = kd/2$ が大きな場合には、提案手法を用いて BEM と同程度の精度で計算結果を得るのは難しいといえる。このとき、解析対象において解析周波数を 500 Hz とした場合は $h \approx 50$ である。よって、障害物の寸法が小さく焦点間の距離 d の設定が小さくて済むような場合においても、解析周波数が高く、パラメータ h が 50 以上となるような範囲においては、精度の良い計算結果を得るのは難しいと予想できる。

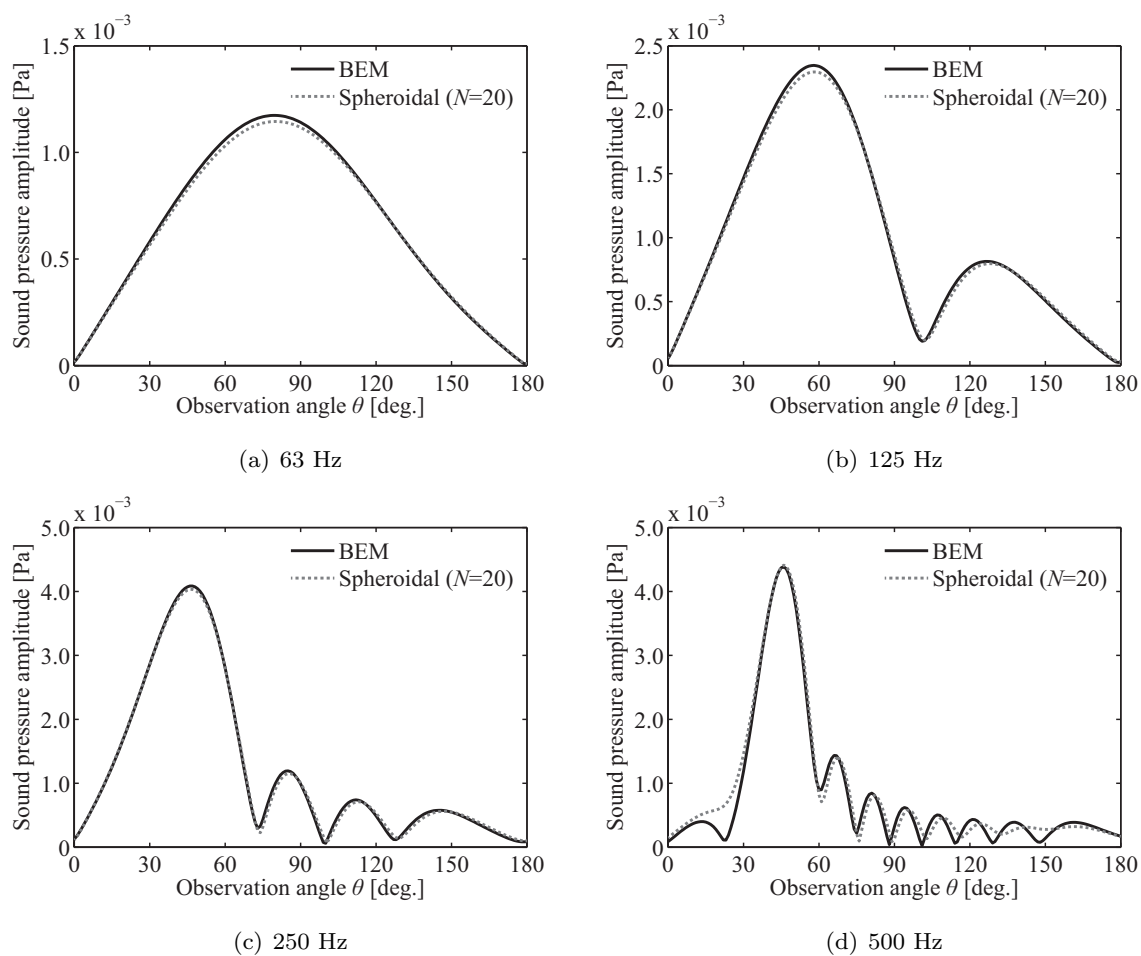


Fig. 6.16 寸法 $3 \times 4.5 \times 0.075$ [m] の長方形板形状の障害物による散乱波の指向特性

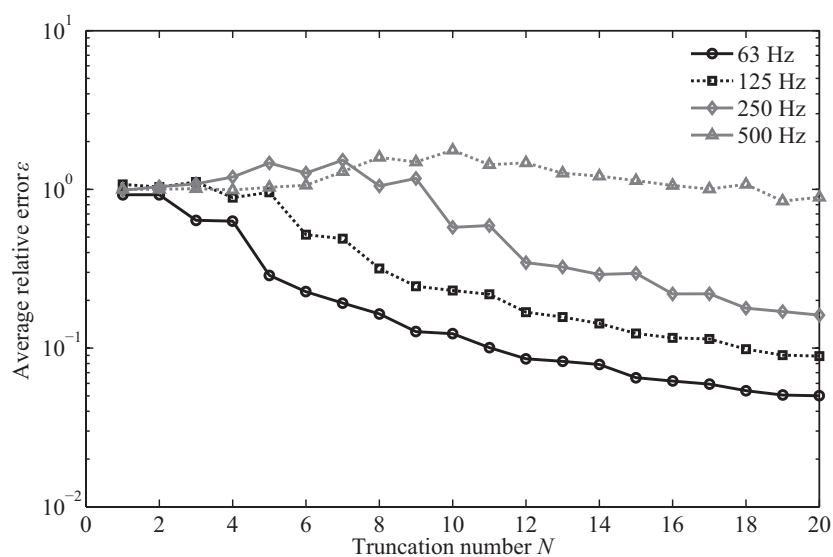


Fig. 6.17 寸法 $3 \times 4.5 \times 0.075$ [m] の長方形板形状の障害物による散乱波の指向特性の計算結果における相対誤差の平均値

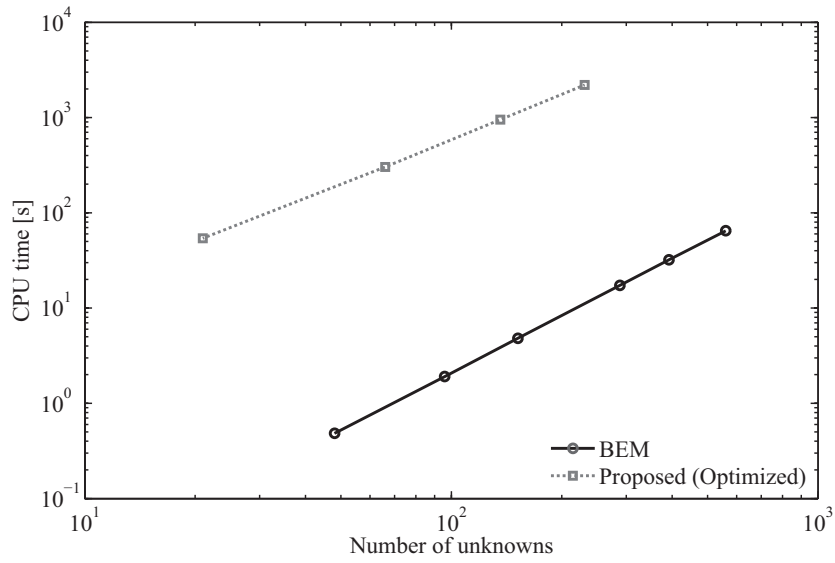


Fig. 6.18 係数行列を得るために必要とした計算時間の比較

6.2.4 計算コスト

提案手法の計算コストについて考える。提案手法において計算に必要な未知数の数は $N_p = (N+1)(N+2)/2$ であるため、係数行列を得るために必要な計算コストは計算量・メモリ共に $O(N_p^2) \approx O(N^2)$ のオーダーとなる。そこで、有限長円筒の寸法が直径 $2a = 1$ 、高さ $2b = 0.05$ である場合の散乱音場を計算する際に、係数行列を得るために必要とした計算時間を計測し、BEM との比較を行った。このとき、提案手法における結果では、有限長円筒の φ 方向の直交性より被積分関数は $m \neq j$ の場合にゼロとなり、さらに η 方向の偶奇性より $(n-m)$ および $(i-j)$ が共に偶数または奇数である場合以外はゼロとなる性質を利用し、数値積分計算にかかる負荷を軽減した。また面積分の実行には 592 要素の三角形一定要素を用いた。Fig. 6.18 に係数行列を得るために必要とした計算時間の結果を示す。この結果より、計算に用いる未知数の数が同じである場合、提案手法は BEM と比べて非常に多くの計算時間が必要となることがわかる。上記の被積分関数における性質を利用することにより、実際に積分計算が必要な係数行列の要素の数は少なくなっているにもかかわらず、このような結果が得られたのは、積分計算にかかる計算時間が非常に大きいためだといえる。前章までの球波動関数を用いた準理論解析手法で有限長円筒による散乱音場を計算する場合のように、障害物形状の特徴を利用して面積分を線積分に変換するなど、数値積分計算をさらに軽減できる場合でないと、現状では BEM よりも計算時間に関しては不利である。そのため、積分計算にかかる計算時間を低減するためにさらなる検証が必要であり、また、提案手法を用いることで十分な精度の計算結果が得られる打ち切り次数 N の設定に関する検証も必要であるといえる。

6.3 まとめ

本章では障害物形状が扁平な場合における準理論解析手法として、音場については楕円体波動関数を用いた展開表現で表し、その展開係数については Kirchhoff–Huygens の公式を用いてマトリクス方程式に帰着させ数値的に求める手法を構築・提案した。本章で提案した手法を用いて扁平な有限長円筒や、正方形および長方形の板形状の障害物による散乱音場の解析から、以下に示すような結果を得た。

- (1) 提案手法を用いることで、扁平な形状の障害物による散乱音場を解析することができる。
- (2) 提案手法を用いたほうが第 4 章で提案した球波動関数を用いた準理論解析手法よりも有利であるのは、障害物の扁平率が $\Delta \geq 0.75$ となる範囲である。そのため、障害物の扁平率 Δ が 0.75 より小さな場合には、球波動関数による手法を用いたほうが適当である。
- (3) 提案手法を用いた場合、解析する状況においてパラメータ $h \approx 50$ となる場合に精度の良い計算結果を得ることが難しいことが確認された。そのため、障害物形状、または解析周波数が大きく、パラメータ h が 50 以上となるような場合は、妥当な計算結果を得ることができない予想できる。

本章において残された課題として、計算コストに関するより詳細な検証が挙げられる。現状では提案手法の積分計算では、BEM のように障害物表面を要素分割して積分計算を実行しているため、未知数が少ない場合においても計算時間が非常に大きい。本章における提案手法においても、前章までで提案してきた準理論解析手法と同様に、障害物形状によっては面積分が線積分に変換できるなど、理論的に積分計算を行える部分があると予想でき、提案手法における積分計算に関してより詳細な検証を行う必要がある。また、十分な精度の計算結果が得られる打ち切り次数 N の設定に関する検証も必要であるといえる。

さらに、本章において提案した準理論解析手法では、厚さがゼロである薄板については扱うことができないことが分かっている。これは、障害物形状が薄板である場合は、マトリクス方程式において音源に関する列ベクトルが零ベクトルとなるためである。障害物形状が薄板である場合、積分計算において常に $\xi_0 = 0$ となるが、このときそれぞれの次数において、第 1 種 Radial 関数 $R_{mn}(-jh, 0)$ 、またはその 1 階微分 $R'_{mn}(-jh, 0)$ のどちらかがゼロとなり、定式化において楕円体波動関数を用いていることが原因である。障害物形状が板形状である散乱音場の解析において、その厚さが解析周波数の波長と比較して非常に小さい場合、障害物形状を薄板として扱うことが出来れば計算コストの面で有利になり得る。そこで、次章では薄板による散乱音場の解析を目的とした準理論解析手法について考える。

第 7 章

楕円体波動関数と最小二乗法を用いた 薄板による散乱音場の準理論解析手法

前章で提案した楕円体波動関数と Kirchhoff-Huygens の公式を用いた準理論解析手法では、薄板のような障害物の厚さがゼロである障害物形状を扱うことができない。板形状の障害物による散乱音場の解析において、その厚さが解析周波数の波長と比較して非常に小さい場合、障害物を薄板として扱うことが出来れば、数値積分にかかる負荷を軽減できるため計算コストの面で有利になり得る。そこで、本章では Kirchhoff-Huygens の公式ではなく、境界条件に関する評価関数を設定し、その評価関数に最小二乗法を適用することで展開係数を未知数としたマトリクス方程式を導く手法を定式化する。

7.1 提案解析手法

7.1.1 問題設定

点音源と厚さがゼロである音響的に剛な薄板が存在する 3 次元音場について考える。ここで、薄板は x - y 平面上にあるとし、障害物に外接する円の直径が d となるように設定する。また、音源 $\mathbf{r}_s = (\xi_s, \eta_s, \varphi_s)$ と観測点 $\mathbf{r} = (\xi, \eta, \varphi)$ は障害物に外接する円の外部にあるものとする。

7.1.2 定式化

第 6 章と同様に、入射ポテンシャル ϕ_i および散乱ポテンシャル ϕ_s を楕円体波動関数による展開表現で表す。楕円体波動関数を用いればそれぞれ次のように展開することができる。

$$\phi_i(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} A_{mn}(\xi_s, \eta_s) \Psi_{mn}^{(1)}(\xi, \eta) \cos m(\varphi - \varphi_s) \quad (7.1)$$

$$\phi_s(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} B_{mn} \Psi_{mn}^{(3)}(\xi, \eta) \cos m(\varphi - \varphi_s) \quad (7.2)$$

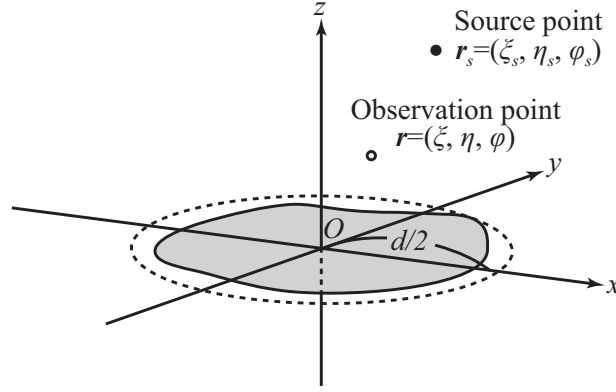


Fig. 7.1 点音源と薄板による散乱音場

ここで,

$$\Psi_{mn}^{(1)}(\xi, \eta) = R_{mn}^{(1)}(-jh, j\xi) S_{mn}(-jh, \eta)$$

$$\Psi_{mn}^{(3)}(\xi, \eta) = R_{mn}^{(3)}(-jh, j\xi) S_{mn}(-jh, \eta)$$

とおいた。また、 B_{mn} は未知の展開係数であり、この B_{mn} に関するマトリクス方程式を以下で導く。

次に、境界条件に関する評価関数について考える。このとき、Fig. 7.2 の示すように、薄板による境界を Γ_{in} とし、 Γ_{in} 上の点を $\mathbf{r}_{in}$ とする。また、薄板に外接する円の内部において Γ_{in} 以外の領域を Γ_{out} とし、 Γ_{out} 上の点を $\mathbf{r}_{out}$ とする。まずは Γ_{in} における評価関数として境界条件の二乗平均誤差を用いて

$$E_{in} = \iint_{\Gamma_{in}} \left| \frac{\partial \phi(\mathbf{r}_{in})}{\partial \mathbf{n}_{in}} \right|^2 dS_{in} \quad (7.3)$$

と設定する。これは、電磁場解析におけるモード整合法 [35] で用いられている評価関数と同様の、障害物表面における境界条件を考慮したものである。次に、 Γ_{out} における評価関数として、

$$E_{out} = \iint_{\Gamma_{out}} |\phi_s(\mathbf{r}_{out})|^2 dS_{out} \quad (7.4)$$

を設定する。これは、薄板による散乱音場において、薄板と同じ平面（今回の問題設定においては x - y 平面）において、薄板の外部における散乱ポテンシャルはゼロになるという性質 [55, 56] を考慮したものである。以上より、全体の評価関数 E として次式を設定する。

$$E = E_{in} + wE_{out} \quad (7.5)$$

ここで、 w : 重み係数である。このようにして得られた評価関数 E に最小二乗法を適用する。

$$\frac{\partial E}{\partial B_{ji}} = 0 \quad (7.6)$$

$$j = 0, 1, \dots, \quad i = j, j+1, \dots,$$

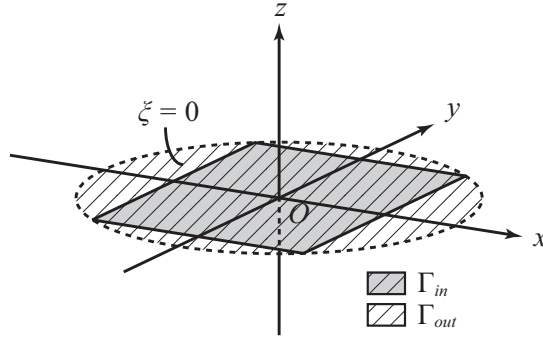


Fig. 7.2 評価関数に関する領域の設定

その結果、以下の一次方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \iint_{\Gamma_{in}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{in}} \Psi_{ji}^{(3)}(\xi_{in}, \eta_{in}) \cos j(\varphi_{in} - \varphi_s) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{in}} \{\phi(\mathbf{r}_{in})\}^* dS_{in} \\ & + \iint_{\Gamma_{out}} \Psi_{ji}^{(3)}(\xi_{out}, \eta_{out}) \cos j(\varphi_{out} - \varphi_s) \{\phi_s(\mathbf{r}_{out})\}^* dS_{out} = 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, \quad i = j, j+1, j+2, \dots$$

Eq. (7.7) を未知の展開係数 B_{mn} に関して整理すれば、

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} B_{mn} (X_{ji}^{mn} + Y_{ji}^{mn}) &= - \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} \tilde{X}_{ji}^{mn} \\ j &= 0, 1, 2, \dots, \quad i = j, j+1, j+2, \dots \end{aligned} \quad (7.8)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} X_{ji}^{mn} &= \iint_{\Gamma_{in}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{in}} \Psi_{ji}^{(3)}(\xi_{in}, \eta_{in}) \cos j(\varphi_{in} - \varphi_s) \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{in}} \Psi_{ji}^{(4)}(\xi_{in}, \eta_{in}) \cos j(\varphi_{in} - \varphi_s) dS_{in} \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{ji}^{mn} &= \iint_{\Gamma_{in}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{in}} \Psi_{ji}^{(3)}(\xi_{in}, \eta_{in}) \cos j(\varphi_{in} - \varphi_s) \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{in}} \Psi_{ji}^{(1)}(\xi_{in}, \eta_{in}) \cos j(\varphi_{in} - \varphi_s) dS_{in} \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} Y_{ji}^{mn} &= \iint_{\Gamma_{out}} \Psi_{ji}^{(3)}(\xi_{out}, \eta_{out}) \cos j(\varphi_{out} - \varphi_s) \\ &\quad \times \Psi_{ji}^{(4)}(\xi_{out}, \eta_{out}) \cos j(\varphi_{out} - \varphi_s) dS_{out} \end{aligned} \quad (7.11)$$

とした。Eq. (7.8) における無限級数和を適当な次数 N で打ち切れば、 $(N+1)(N+2)/2$ 個の未知の展開係数 B_{mn} からなるマトリクス方程式が得られる。

ここで、Eq. (7.9), (7.10), (7.11) の各項について考える。それぞれの項において、 ξ については $\xi_{in} = 0$, $\xi_{out} = 0$ となる。また、 Γ_{in} における法線方向積分は $\partial/\partial \mathbf{n}_{in} = \partial/\partial \xi_{in}$, となる。以

上を考慮すれば, Eq. (7.9), (7.10), (7.11) はそれぞれ,

$$X_{ji}^{mn} = R_{ji}^{(3)'}(-jh, 0)R_{ji}^{(4)'}(-jh, 0) \times \iint_{\Gamma_{in}} S_{ji}(-jh, \eta_{in}) \cos j(\varphi_{in} - \varphi_s) S_{ji}(-jh, \eta_{in}) \cos j(\varphi_{in} - \varphi_s) dS_{in} \quad (7.12)$$

$$\tilde{X}_{ji}^{mn} = R_{ji}^{(3)'}(-jh, 0)R_{ji}^{(1)'}(-jh, 0) \times \iint_{\Gamma_{in}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{in}} S_{ji}(-jh, \eta_{in}) \cos j(\varphi_{in} - \varphi_s) S_{ji}(-jh, \eta_{in}) \cos j(\varphi_{in} - \varphi_s) dS_{in} \quad (7.13)$$

$$Y_{ji}^{mn} = R_{ji}^{(3)}(-jh, 0)R_{ji}^{(4)}(-jh, 0) \times \iint_{\Gamma_{out}} S_{ji}(-jh, \eta_{out}) \cos j(\varphi_{out} - \varphi_s) S_{ji}(-jh, \eta_{out}) \cos j(\varphi_{out} - \varphi_s) dS_{out} \quad (7.14)$$

となる。また, η_{in} , η_{out} に関する被積分関数の偶奇性を利用すれば,

$$X_{ji}^{mn} \begin{cases} \neq 0, & (n-m) \text{ and } (i-j) \text{ are odd} \\ \neq 0, & (n-m) \text{ and } (i-j) \text{ are even} \\ = 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7.15)$$

となる。また, $\tilde{X}_{ji}^{mn}$, Y_{ji}^{mn} についても同様の性質があり, 係数行列を計算する際には, $(n-m)$ と $(i-j)$ が共に偶数の場合, または $(n-m)$ と $(i-j)$ が共に奇数の場合についてのみ積分計算を行えばよい。

7.2 数値計算例

ここでは, 障害物として音響的に剛な薄板と点音源による散乱音場について解析を行う。このとき, 提案手法による計算結果の妥当性を確認し, また数値特性について検証するために, 比較対象として観測点に関する法線方向微分を適用した Kirchhoff – Huygens の公式を基にした BEM (NDF) による計算結果を用いる。以下に本節で実行する計算タスクを示す。

- 正方形の薄板による散乱音場の解析
- 長方形の薄板による散乱音場の解析
- 評価関数における重み係数 w の設定に関する検証

また, 数値計算に用いた計算機環境は以下のとおりである。

- CPU: Intel Core i7 2.80 GHz
- Memory: 8 GB
- Language: Python

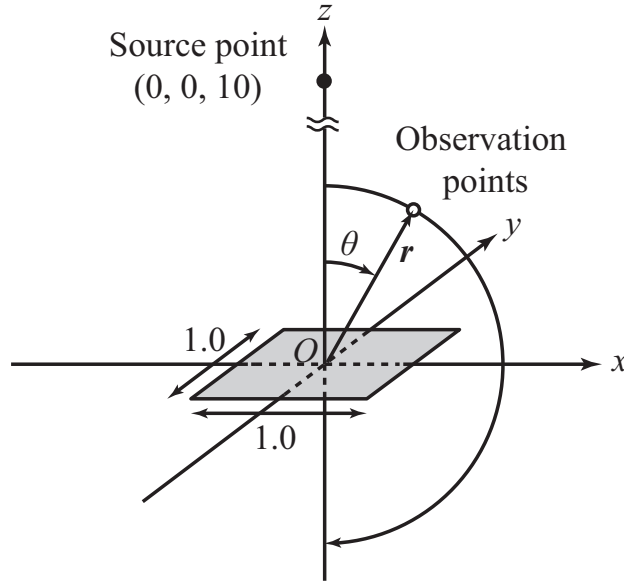


Fig. 7.3 寸法 1×1 [m] の正方形の薄板による散乱音場

7.2.1 正方形の薄板による散乱音場の解析

ここでは第6章で扱った正方形板形状の障害物による散乱音場において、障害物の厚さをゼロとした場合について解析を行う。

まずは寸法 1×1 [m] の正方形の薄板と点音源による散乱音場について解析を行う。ここで、Fig. 7.3 に示すように音源位置を $\mathbf{r}_s = (0, 0, 10)$ 、観測点を原点から 5 m の位置に設定した。また、BEM による計算では 400 要素の四角形一定要素（最大メッシュ長：0.05 [m]）を用い、提案手法による計算では焦点間の距離 $d = \sqrt{2}$ 、打ち切り次数 $N = 20$ 、重み係数 $w = 1.0$ とした。Fig. 7.4 に、正方形の薄板による散乱波の指向特性の計算結果を示す。提案手法による計算結果は、全ての解析周波数において BEM による計算結果との誤差が認められるものの、指向特性の概形についてはよく一致しているといえる。また、これまでと同様に次式を用いて提案手法の計算結果における相対誤差の平均値を算出し、提案手法による計算結果の収束について調べた。

$$\varepsilon = \frac{1}{181} \sum_{n=1}^{181} \frac{|p_{ref}(\mathbf{r}_n) - p(\mathbf{r}_n)|}{|p_{ref}(\mathbf{r}_n)|} \quad (7.16)$$

ここで、 p_{ref} : BEM による計算結果、 p : 提案手法による計算結果、 $\mathbf{r}_n$: n 番目の観測点である。Fig. 7.5 に、打ち切り次数 N に対する相対誤差の平均値の変化を示す。Fig. 7.5 より、提案手法による計算結果は、打ち切り次数 N を大きくすることで BEM による計算結果との相対誤差が小さくなっていく様子が確認できる。

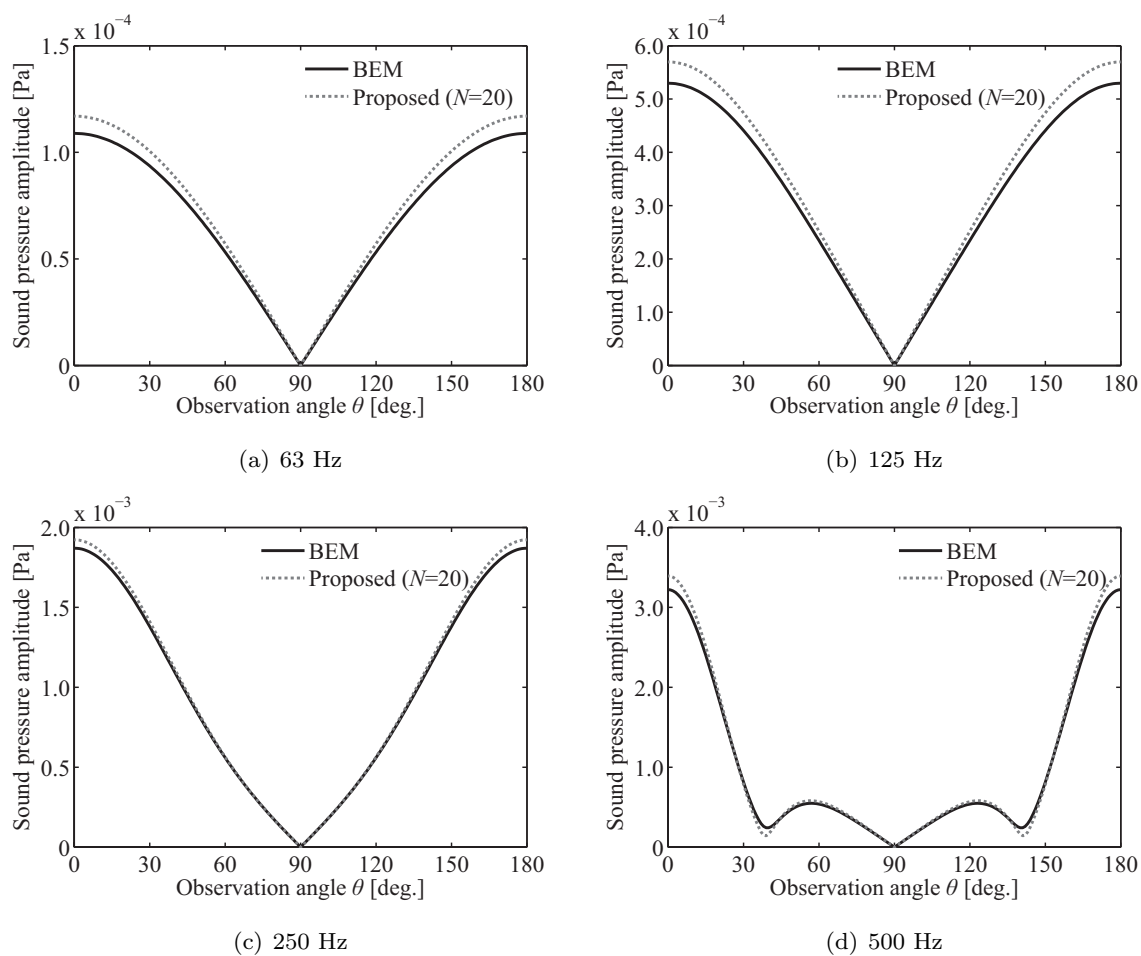


Fig. 7.4 寸法 1×1 [m] の正方形の薄板による散乱波の指向特性の計算結果

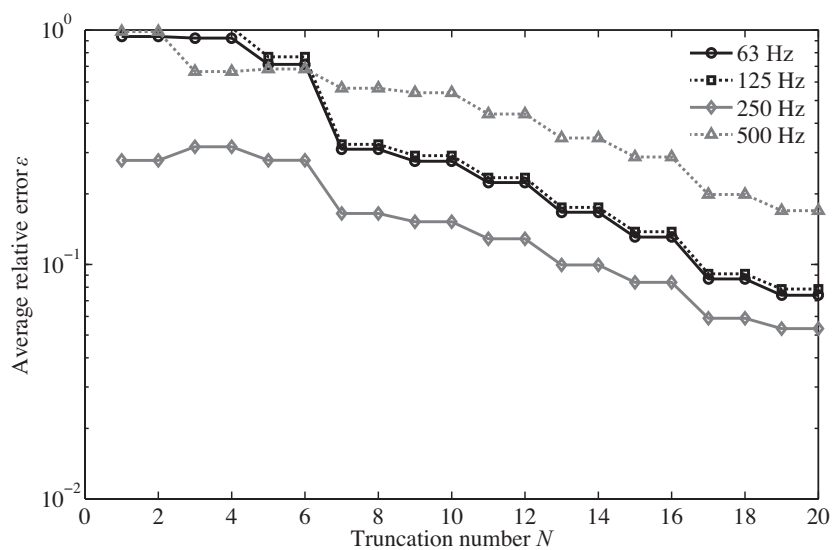


Fig. 7.5 寸法 1×1 [m] の正方形の薄板による散乱波の指向特性の計算結果における相対誤差の平均値

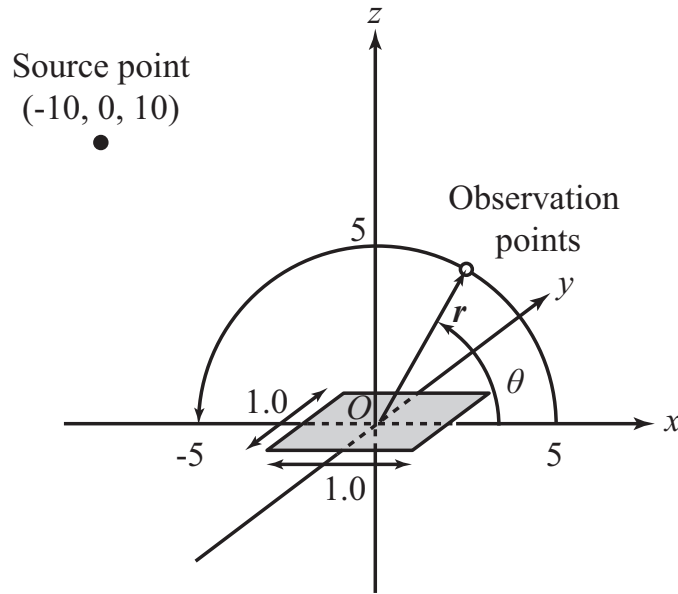


Fig. 7.6 音源が斜め方向にある場合における寸法 1×1 [m] の正方形の薄板による散乱音場

次に, Fig. 7.6 に示すような, 障害物に対して斜め方向に音源がある場合の散乱波の指向特性についても計算を行った。この場合においても, BEM による計算では 400 要素の四角形一定要素 (最大メッシュ長: 0.05 [m]) を用い, 提案手法による計算では焦点間の距離 $d = \sqrt{2}$, 打ち切り次数 $N = 20$, 重み係数 $w = 1.0$ とした。Fig. 7.7 に, この場合における散乱波の指向特性の計算結果を示す。Fig. 7.7 より, 提案手法による計算結果は BEM による計算結果と多少の誤差が見られるものの, 指向特性の概形をよく捉えており, 妥当な計算結果であるといえる。また, BEM による計算結果との相対誤差の平均値 ε を算出した結果を Fig. 7.8 に示す。Fig. 7.8 より, 音源が斜め方向にある場合についても, 提案手法における計算結果は打ち切り次数 N を大きくすることで, BEM による計算結果との相対誤差が小さくなっていく様子が確認できる。

以上の結果より, 寸法 1×1 [m] の正方形の薄板による散乱音場については, 提案手法を用いて妥当な計算結果を得ることができているといえる。また, 打ち切り次数 N を大きくすることで, 提案手法を用いた場合の計算結果における誤差は小さくなり, 収束するといえる。

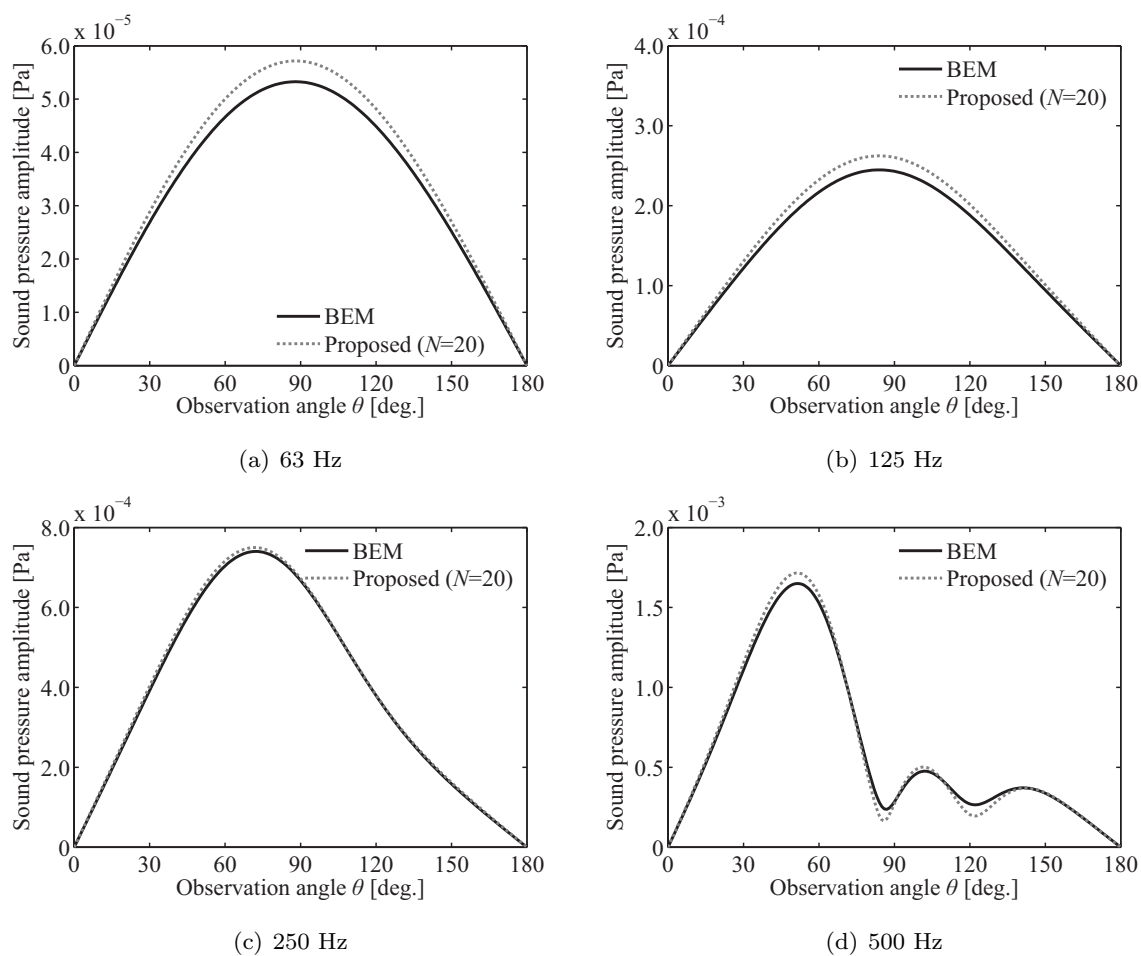


Fig. 7.7 音源が斜め方向にある場合の寸法 1×1 [m] の正方形の薄板による散乱波の指向特性の計算結果

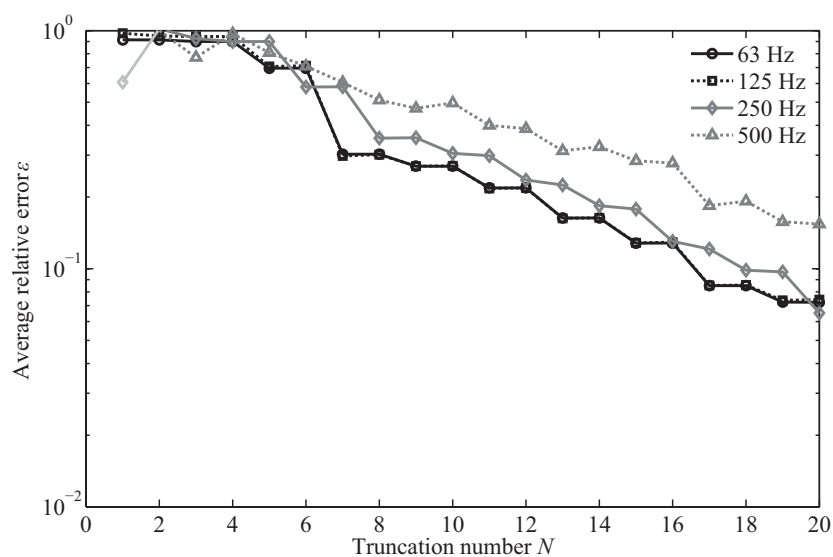


Fig. 7.8 音源が斜め方向にある場合の寸法 1×1 [m] の正方形の薄板による散乱波の指向特性の計算結果における相対誤差の平均値の変化

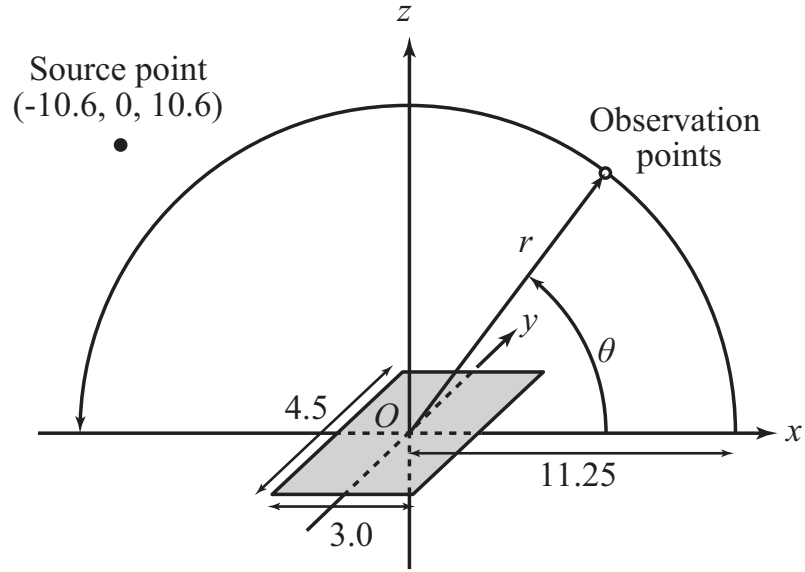


Fig. 7.9 寸法 3×4.5 [m] の長方形の薄板による散乱音場

7.2.2 長方形の薄板による散乱音場の解析

薄板の形状や大きさに関する検証として、寸法を 3×4.5 [m] 長方形の薄板による散乱音場について計算した。ここで、Fig. 7.9 に示すように、音源位置を $\mathbf{r}_s = (-10.6, 0, 10.6)$ 、観測点を原点から 11.25 m の位置に設定した。また、BEM による計算では 1380 要素の四角形一定要素（最大メッシュ長：0.10 [m]）を用いて計算を行い、提案手法による計算では焦点間の距離 $d = \sqrt{3^2 + 4.5^2} = 5.408$ ，打ち切り次数 $N = 25$ とし、重み係数 $w = 1.0$ とした。Fig. 7.10 に、長方形の薄板による散乱波の指向特性の計算結果を示す。Fig. 7.10 より、長方形の薄板による散乱音場の解析においても、提案手法による計算結果は BEM による計算結果と誤差はあるものの、妥当な計算結果が得られているといえる。しかしながら、Fig. 7.10 (d) の解析周波数を 500 Hz とした場合の計算結果にも見られるように、解析周波数が高くなった場合に、指向特性の概形については類似しているものの、指向特性における凹凸の位置に関して BEM による計算結果とのずれが見られる。また、長方形の薄板による散乱音場の計算結果において、打ち切り次数 N を大きくしていった場合の相対誤差の平均値の変化を Fig. 7.11 に示す。Fig. 7.11 より、解析周波数が 500 Hz 以外の場合では、打ち切り次数 N を大きくしていくことで、相対誤差の平均値は小さくなり、収束していく様子が確認できる。一方で、解析周波数が 500 Hz の場合では、打ち切り次数を大きくしても相対誤差の平均値にほとんど変化はなく、相対誤差は大きいままである。解析周波数が 500 Hz である場合、第 6 章において寸法 $3 \times 4.5 \times 0.075$ の長方形板形状の障害物による散乱音場について解析したときと同様にパラメータ $h \approx 50$ であるため、パラメータ h が大きくなると精度の良い計算結果を得るのは難しいといえる。さらに、Fig. 7.10 の計算結果において、位相につい

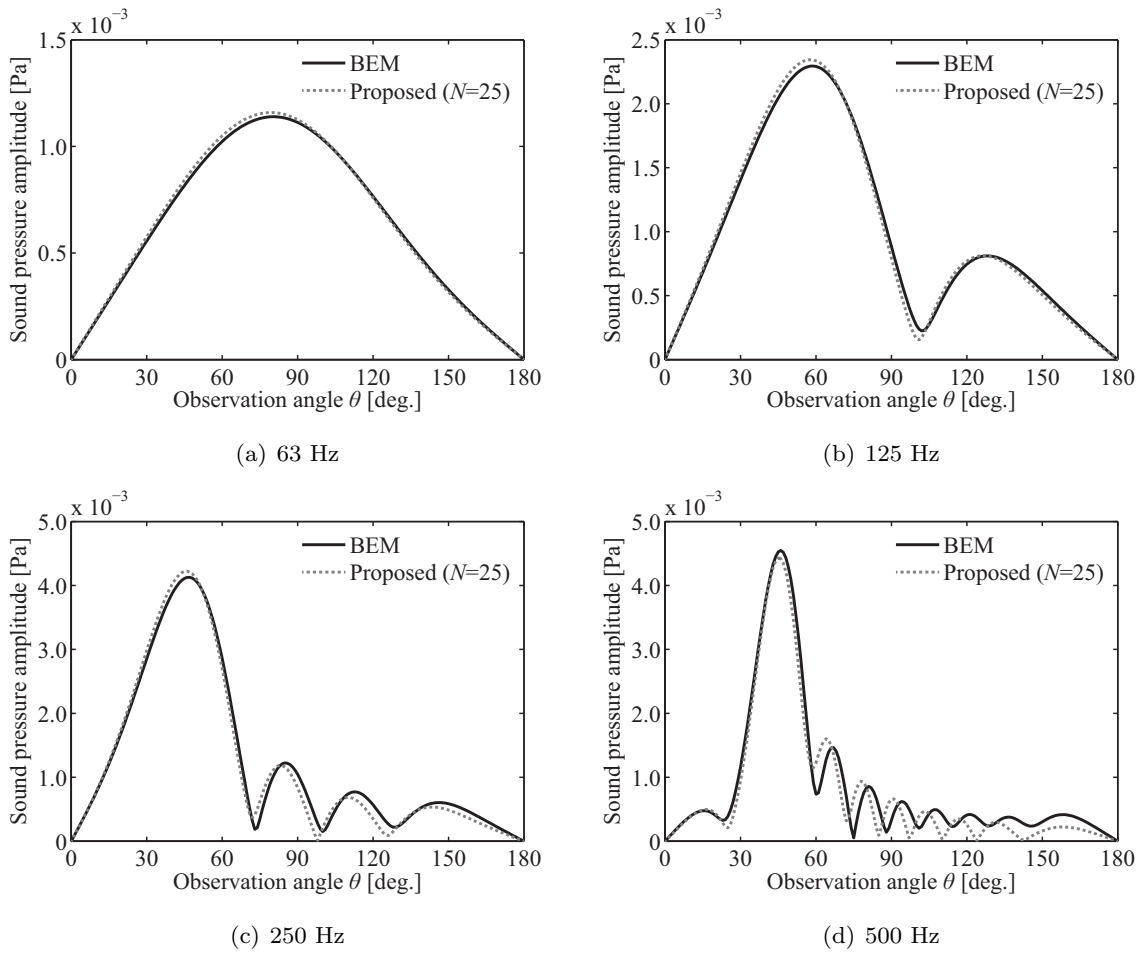


Fig. 7.10 寸法 3×4.5 [m] の長方形の薄板による散乱波の指向特性の計算結果

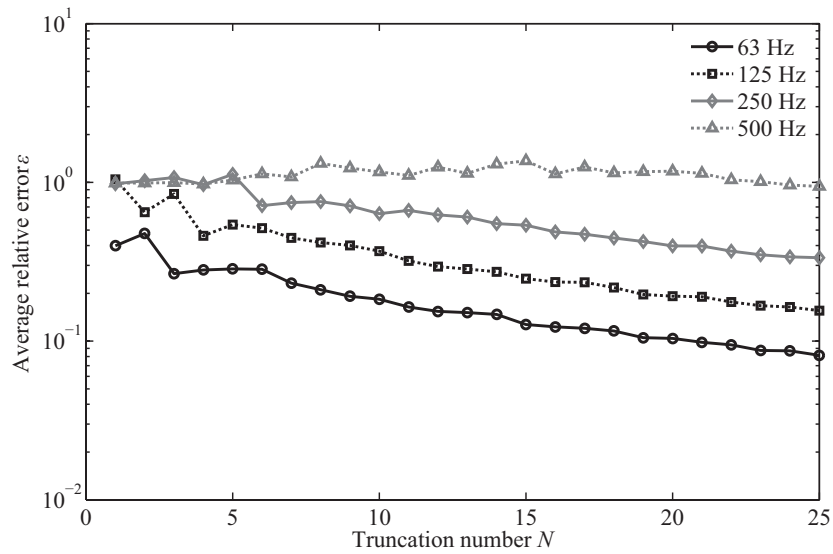


Fig. 7.11 寸法 3×4.5 [m] の長方形の薄板による散乱波の指向特性の計算結果における相対誤差の平均値の変化

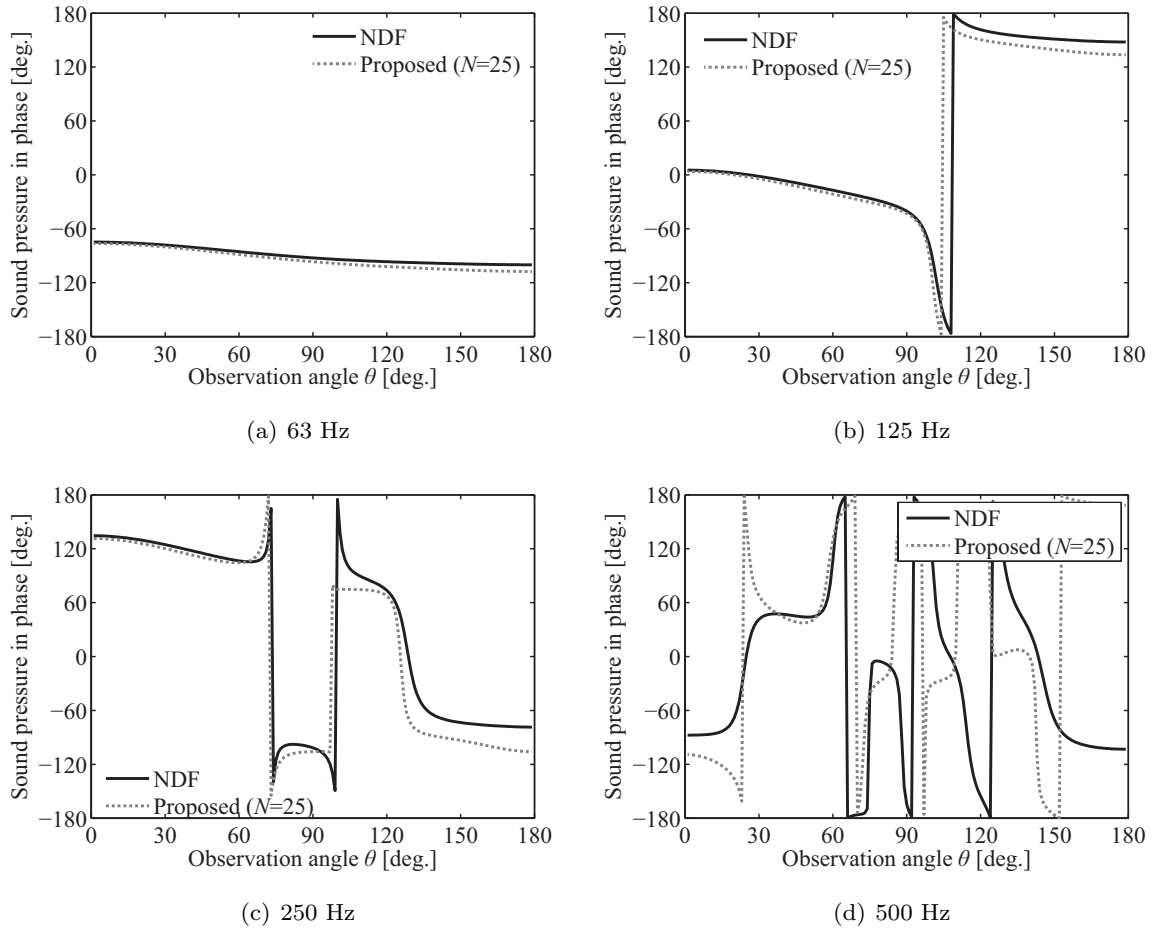


Fig. 7.12 寸法 3×4.5 [m] の長方形の薄板による散乱波の指向特性の位相

てプロットした結果を Fig. 7.12 に示す。これより、提案手法による計算結果は解析周波数が大きくなるほど位相における誤差が大きくなり、Fig. 7.12 (d) の解析周波数が 500 Hz である場合には、妥当な計算結果が得られているとはいえない。この結果より、提案手法による計算結果は位相に関する誤差が大きく、これが原因となり Fig. 7.11 における相対誤差の平均値が小さくならないと考えられる。

以上より、提案手法を用いることで薄板による散乱音場について解析することができるといえる。ただし、第 6 章における提案手法と同様に、パラメータ h が大きくなると妥当な計算結果を得ることが難しく、障害物の寸法が大きな場合、または解析周波数が大きな場合について解析するのは困難であるといえる。

7.2.3 重み係数の設定に関する検証

提案手法では、評価関数において重み係数 w を任意の値に設定することができる。そこで、重み係数 w の値の変化が、提案手法による計算結果の精度等へ及ぼす影響について検証する。

まずは、Fig. 7.3 の寸法 1×1 [m] の正方形の薄板による散乱音場の解析において重み係数 $w = 0.1, 10, 100$ と変化させた場合について相対誤差の平均値を求めた。その結果を Fig. 7.13 に示す。Fig. 7.13 (a) の重み係数を $w = 0.1$ とした場合の結果では、重み係数を $w = 1$ とした Fig. 7.5 における結果とほとんど違いはみられない。一方で、重み係数を $w = 10, 100$ とした Fig. 7.13 (b), (c) における結果では、BEM との誤差が改善しており、特に解析周波数が 63, 125 Hz の場合にその傾向が顕著である。

次に、Fig. 7.6 の音源が斜め方向にある場合の寸法 1×1 [m] の正方形の薄板による散乱音場の解析において、重み係数 $w = 0.1, 10, 100$ と変化させた場合について相対誤差の平均値を求めた。その結果を Fig. 7.14 に示す。この場合においても、Fig. 7.14 (b) の重み係数を $w = 0.1$ としたものと、Fig. 7.5 の重み係数を $w = 1$ としたものの結果にほとんど違いは見られない。また、この場合においても重み係数を $w = 10, 100$ とした Fig. 7.14 (b), (c) における結果では、BEM との誤差が改善しており、特に解析周波数が 63, 125 Hz の場合にその傾向が顕著である。これらのことから、重み係数の設定に関しては音源位置や観測点は関係なく、障害物の寸法が関係してくると思われる。

最後に、Fig. 7.9 の 3×4.5 [m] の長方形の薄板による散乱音場の解析についても同様に、重み係数 $w = 0.1, 10, 100$ と変化させた場合について相対誤差の平均値を求めた。その結果を Fig. 7.15 に示す。この場合においても、重み係数を $w = 0.1$ とした場合の結果は、重み係数を $w = 1$ とした Fig. 7.11 の結果と大きな違いはない。一方で、Fig. 7.11 (b) の重み係数を $w = 10$ とした場合では、依然として BEM との誤差は大きいものの、解析周波数を 500 Hz とした場合における相対誤差の平均値が改善している。この傾向は Fig. 7.11 (c) の重み係数を $w = 100$ とした場合にもみられる。しかしながら、解析周波数が 63, 125 Hz である場合には逆に重み係数を大きくしたことによって、重み係数が $w = 1$ の場合よりも相対誤差の平均値が増大している。また、これまでの結果より、重み係数を $w = 0.1$ とした場合は全て $w = 1$ とした場合と違いがほとんど見られなかったことから、重み係数は $w \geq 1$ とするべきであるといえる。

以上のことから、重み係数 w を変化させることで、提案手法の計算結果の精度や収束も変化することがわかった。また、障害物の寸法や解析周波数によっては、重み係数を大きくしたことによって相対誤差が悪化する場合もあることから、それらを考慮して適当な $w \geq 1$ となる重み係数を設定する必要があると予想される。

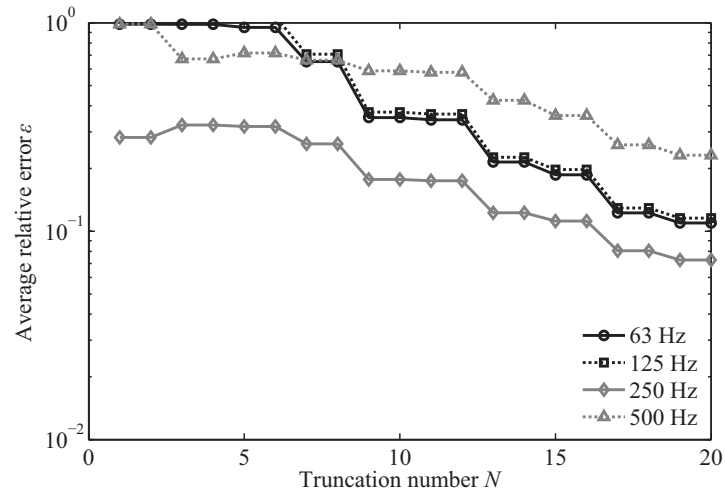
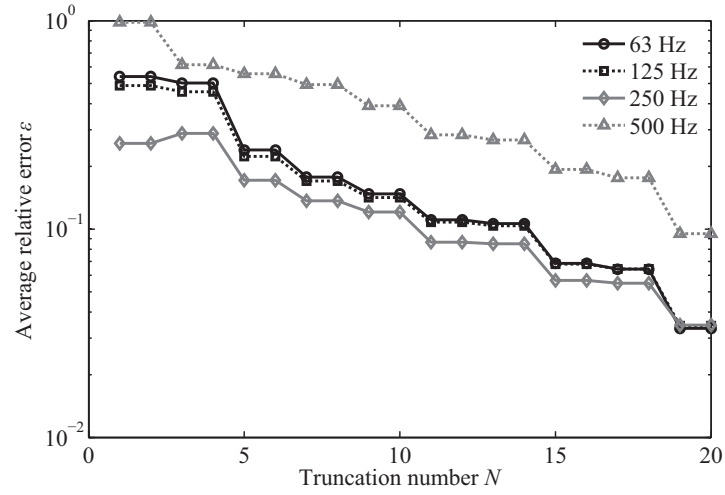
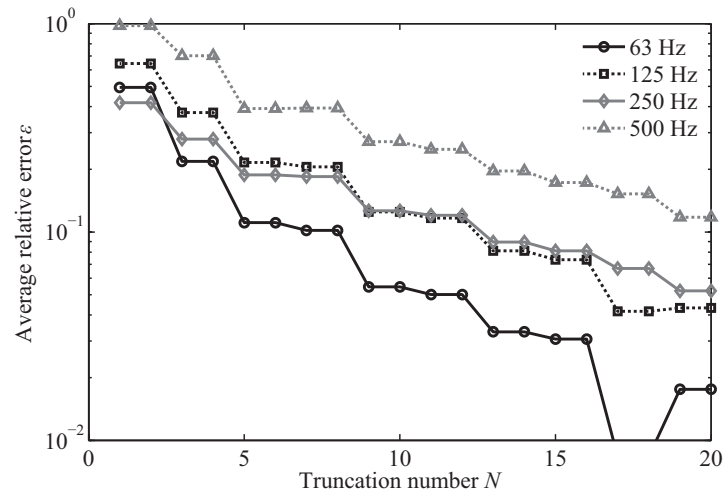
(a) 重み係数 $w = 0.1$ (b) 重み係数 $w = 10$ (c) 重み係数 $w = 100$

Fig. 7.13 寸法 1×1 [m] の正方形の薄板による散乱音場の解析において重み係数 w を変化した場合の相対誤差の平均値

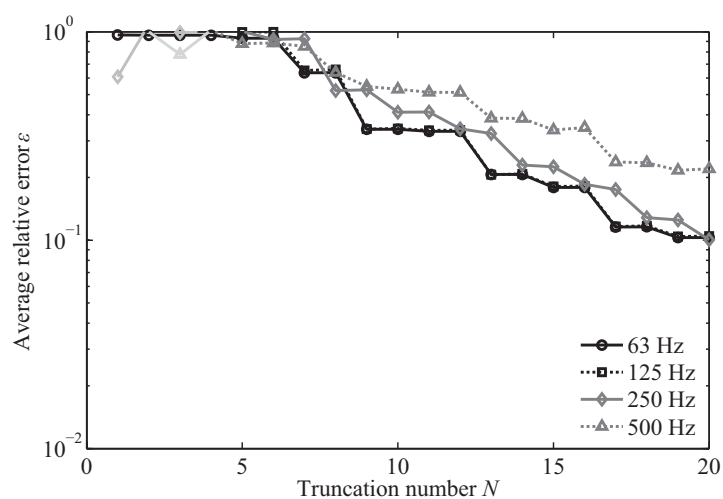
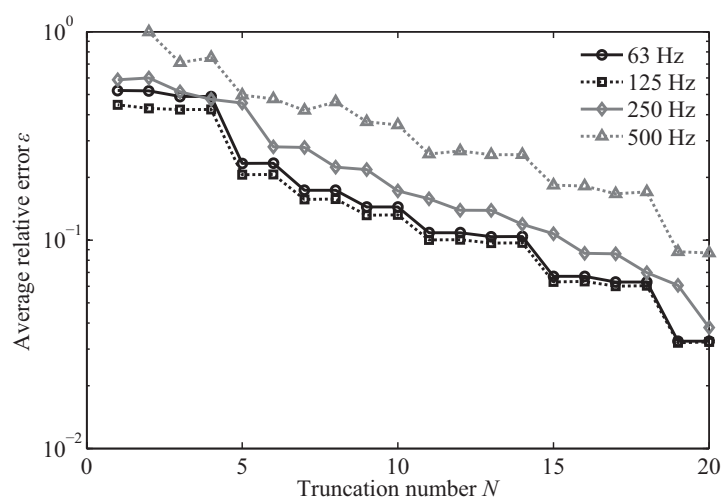
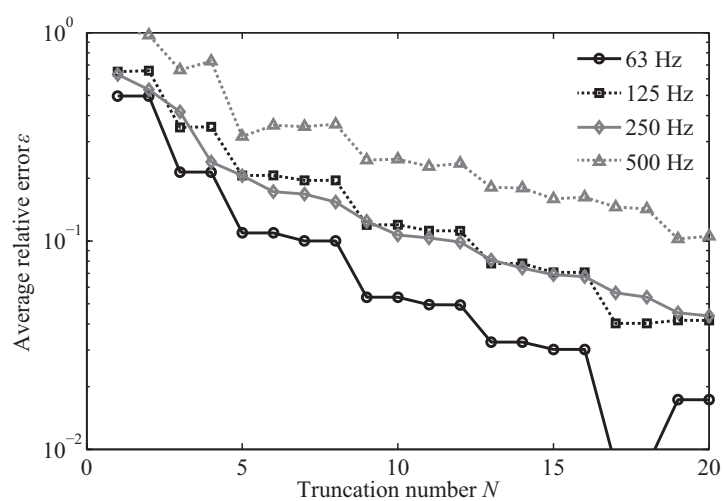
(a) 重み係数 $w = 0.1$ (b) 重み係数 $w = 10$ (c) 重み係数 $w = 100$

Fig. 7.14 音源が斜め方向にある場合の寸法 1×1 [m] の正方形の薄板による散乱音場の解析において重み係数 w を変化した場合の相対誤差の平均値

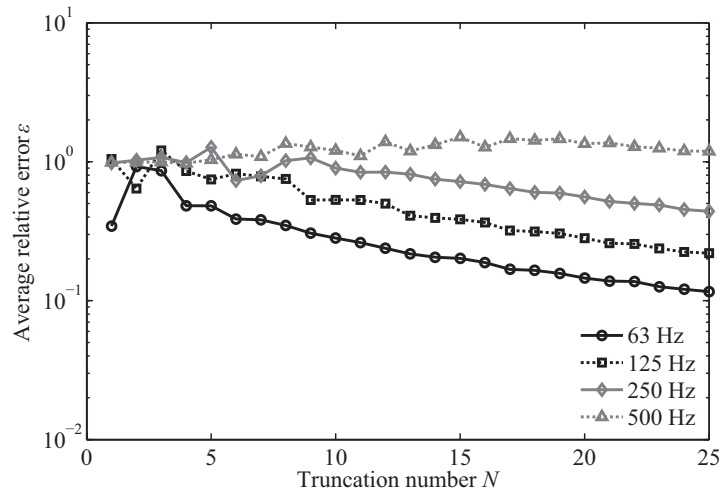
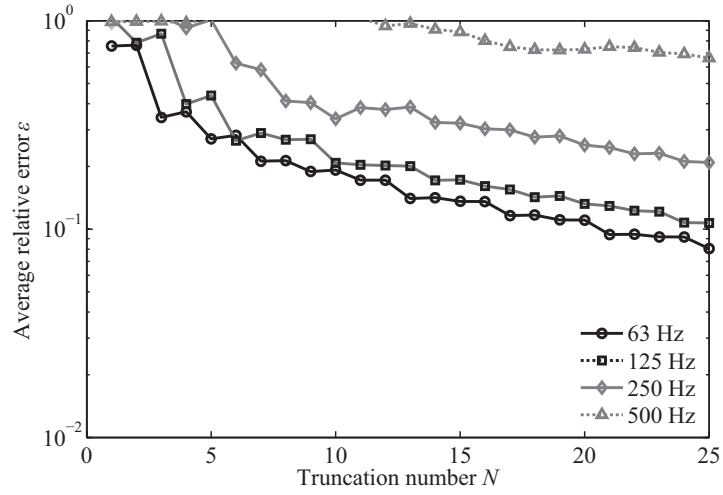
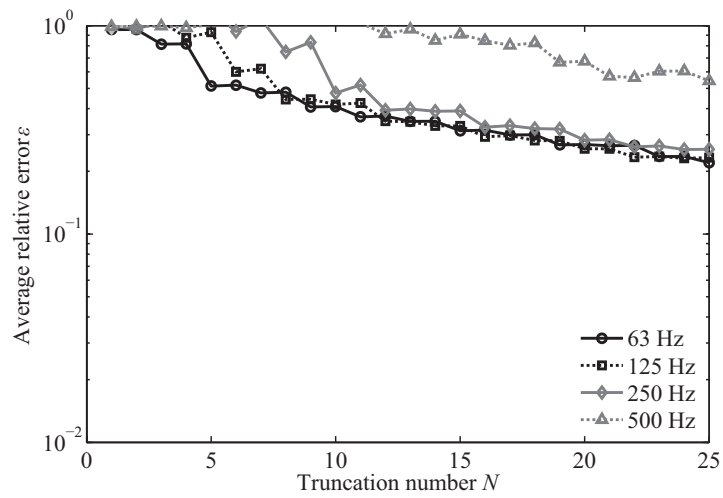
(a) 重み係数 $w = 0.1$ (b) 重み係数 $w = 10$ (c) 重み係数 $w = 100$

Fig. 7.15 寸法 3×4.5 [m] の長方形の薄板による散乱音場の解析において重み係数 w を変化した場合の相対誤差の平均値

7.3 まとめ

本章では薄板による散乱音場の準理論解析手法として、音場を楕円体波動関数による展開表現で表し、その展開係数については境界条件を基に評価関数を設定し、そこに最小二乗法を適用することでマトリクス方程式に帰着させ数値的に求める手法を定式化した。提案手法を正方形および長方形の薄板による散乱音場の解析に適用し、BEM による計算結果との比較から以下の示す結果を得た。

- (1) 薄板による散乱音場の解析に対して効果が認められるが、第 6 章で提案した手法と同様に、パラメータ h が大きくなると提案手法の解析精度は悪化し、妥当な計算結果を得るのは困難である。
- (2) 重み係数を変化させることで解析精度は変化する。このとき、障害物の寸法や解析周波数によって最適な重み係数は異なると予想される。

今回扱った数値計算例により、提案手法の基本的な性能については示すことができた。しかしながら、重み係数の設定に関しては課題も多く、今後、解析対象に応じて最適な重み係数を設定するための方法について検討する必要がある。また、本章における提案手法は境界条件としては音響的に剛な場合にしか適用することができない。そのため薄板が吸音境界である場合などを解析するためには評価関数の設定について検討する必要があるなど、課題が残っている。

第 8 章

結論

計算機資源の充実や、波動音響数値解析手法自体の開発・改良により、建築物や音響機器の設計に対する数値解析手法の適用は今後さらに重要性を増すと考えられる。このような中で、障害物による散乱音場について解析を行う際に、その解析手法として BEM を用いるのは非常に有効である。しかしながら、限られた計算機資源を有効に利用するためには、どのような解析対象に対しても BEM を用いるのではなく、障害物形状や解析周波数に応じて適切な解析手法を選択するべきである。

そこで、本論文では、比較的単純な障害物による散乱音場の波動音響解析手法として、音場を適当な波動関数による展開表現を用いて表し、その展開係数については境界条件を基にマトリクス方程式に帰着させ数値的に求める準理論解析手法を提案した。以下に、本論文で得られた知見と残された課題について記す。

球波動関数と最小二乗法を用いた散乱音場の準理論解析手法

第 3 章では、単一の障害物による散乱音場の準理論解析手法として、音場を球波動関数を用いた展開表現で表し、その展開係数については境界条件の二乗平均誤差を評価関数として最小二乗法を適用することでマトリクス方程式に帰着させ、数値的に求める準理論解析手法を扱った。提案手法を用いて有限長円筒による散乱音場の解析を行い、その数値特性について検証することで、次に示すような結果を得た。

- (1) 提案手法を用いることで任意の観測点において妥当性のある計算結果を得ることができる。
- (2) 一方で、提案手法による計算精度には限界があり、BEM と比較すると十分な計算精度で結果が得られるとはいえない。
- (3) 提案手法を用いて周波数応答関数を計算した場合、BEM において解の非一意性の問題により計算結果に不連続点が発生するといったことが生じず、滑らかな周波数応答関数を求めることができる。

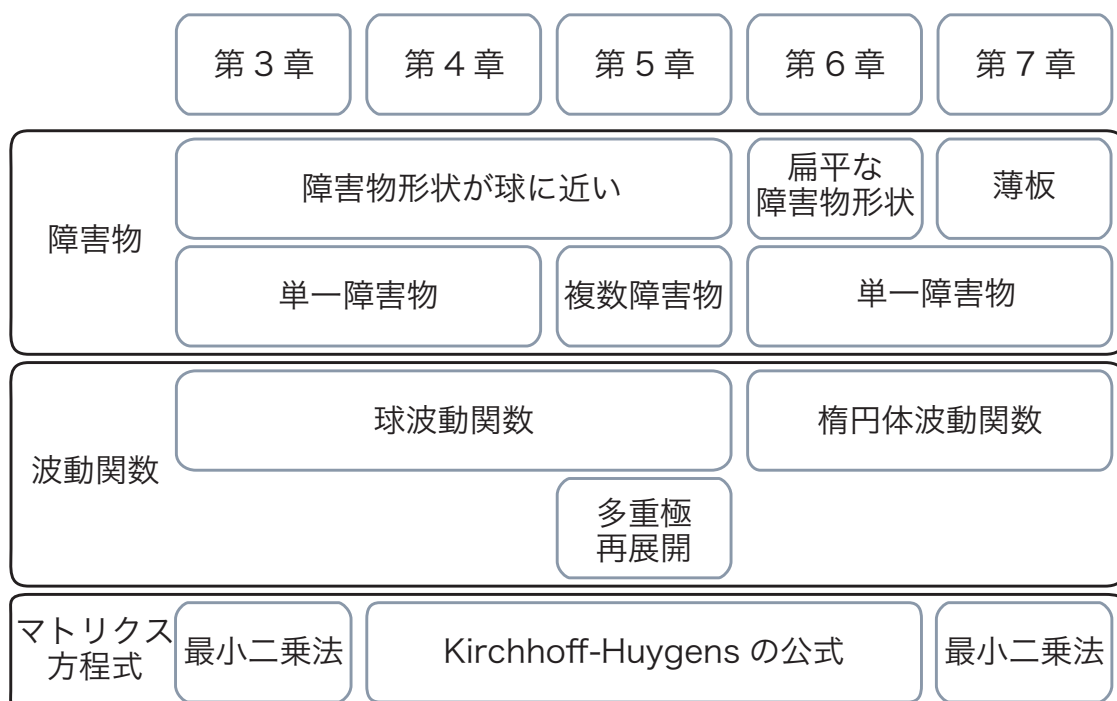


Fig. 8.1 本論文で提案した準理論解析手法 (Fig. 1.2, 再掲)

球波動関数と Kirchhoff-Huygens の公式を用いた散乱音場の準理論解析手法

第 4 章では、単一の障害物による散乱音場に対して、音場を球波動関数を用いた展開表現で表し、その展開係数については Kirchhoff-Huygens の公式を用いてマトリクス方程式を導き、数値的に求める手法を定式化した。また、提案手法を用いて有限長円筒による散乱音場について解析し、次に示すような結果を得た。

- (1) 提案手法を用いて遠方場を計算する場合、計算に用いる打ち切り次数 N を大きくしていくことで計算結果は収束し、BEM と同程度の精度で計算結果を得ることができる。
- (2) 提案手法を用いて解析する場合、打ち切り次数 N の設定式 $N = 2kr_{min} + 5 \ln(2kr_{min} + \pi)$ より算出した打ち切り次数を用いることで、十分な精度の計算結果を得ることができる。
- (3) 障害物表面や障害物に外接する球の内部における速度ポテンシャルを精度良く計算することはできない。したがって、妥当な計算結果が得られる範囲は障害物に外接する球の外部に限定される。
- (4) 障害物形状が計算精度に与える影響は大きく、障害物形状が球形に近い場合のほうが精度がよい。また、障害物形状が球形から乖離しているほど係数行列における条件数が大きくなり、妥当な計算結果が得られる打ち切り次数の上限が小さくなる。
- (5) 提案手法では、一般的な BEM のように解の非一意性による影響を受けることがなく、滑らかな周波数応答関数を得ることができる。
- (6) 提案手法における計算コストは BEM と比較して必ずしも有利とはいえない。特に、計算

時間については提案手法では積分計算にかかる計算時間が大きいことから、BEM よりも基本的に不利である。提案手法のほうが BEM よりも計算コストの面で有利である状況としては、

- 解析周波数が低い場合や、障害物の寸法が小さな場合
 - 障害物形状における対称性などを利用することで、理論的に積分計算を進めることのできる部分があり、数値積分計算への依存を低減できる場合
- などである。

多重極再展開を用いた多重散乱音場の準理論解析手法

第 5 章では、複数の障害物が配置されている場合の散乱音場の解析手法として、音場を球波動関数と多重極再展開を用いて表し、その展開係数については Kirchhoff-Huygens の公式を利用してマトリクス方程式を導き数値的に求める準理論解析手法を提案した。また、提案手法を用いた解析例として、複数個の有限長円筒が自由空間中に配置された散乱音場について計算を行い、BEM による計算結果との比較から、数値特性についての検証を行い、次に示すような結果を得た。

- (1) 提案手法では、BEM のように障害物内部の Dirichlet 周波数付近においても、解の非一意性による問題が生じることなく計算結果を得られる。
- (2) 提案手法においても、単一の障害物の場合と同様に、打ち切り次数が大きくなると係数行列の条件数の悪化し、得られた展開係数に含まれる誤差が大きくなるため、妥当な計算結果を得られない場合がある。また、条件数には障害物の個数や配置も関係している。
- (3) 観測点が障害物から離れた位置にあるほど、安定した計算結果が得られる。また、障害物に外接する球の内部に観測点を設定した場合は、妥当な計算結果を得ることができない。
- (4) 障害物間の距離は計算精度に与える影響が大きく、障害物の配置に関しては、それぞれの障害物に外接する球が、他の障害物に重ならないようにする必要がある。このことが保たれていない場合は計算結果が収束せず、不安定な振る舞いをする。
- (5) 提案手法における計算コストは障害物の個数や寸法、解析周波数に依存する。このとき、それぞれの障害物における寸法のばらつきが小さく、また、障害物の寸法が小さいほうが、解析に必要な打ち切り次数が小さくて済むため、BEM よりも必要メモリの面で有利である。
- (6) 実際に計算コードを実行した際の計算時間については、提案手法のほうが積分計算に要する時間が大きいため計算時間は BEM よりも大きくなる。しかし、(5) のように解析に必要な未知数の数が BEM よりも少ないことに加え、それぞれの障害物の形状が同じで、かつ有限長円筒のように障害物形状に対称性があるなど、積分計算を理論的に進めることが出来る場合は、計算時間においても有利となることがある。

楕円体波動関数と Kirchhoff-Huygens の公式を用いた扁平な障害物による散乱音場の準理論解析手法

第 6 章では、障害物形状が扁平な場合に対して、波動関数として楕円体波動関数を用い、展開係数については第 4 章と同様に、Kirchhoff-Huygens の公式を用いてマトリクス方程式に帰着させる手法を定式化した。提案手法を用いて扁平な有限長円筒や、正方形および長方形の板形状の障害物による散乱音場の解析から、次に示すような結果を得た。

- (1) 提案手法を用いることで、扁平な形状の障害物による散乱音場を解析することができる。
- (2) 第 6 章で提案した楕円体波動関数を用いた準理論解析手法を用いたほうが、第 4 章で提案した球波動関数を用いた準理論解析手法よりも有利であるのは、障害物の扁平率が $\Delta \geq 0.75$ となる範囲である。そのため、障害物の扁平率 Δ が 0.75 より小さな場合には、球波動関数による手法を用いたほうが適当であるといえる。
- (3) 提案手法を用いた場合、解析する状況においてパラメータ $h \approx 50$ となる場合に精度の良い計算結果を得ることが難しいことが確認された。そのため、障害物形状、または解析周波数が大きく、パラメータ h が 50 以上となるような場合は、妥当な計算結果を得ることができない予想できる。

ここで残された課題としては、計算コストに関するより詳細な検証が挙げられる。現状では提案手法において積分計算を実行する際に、BEM のように三角形要素を用いているため、未知数が少ない場合においても計算時間が非常に大きい。本章における提案手法においても第 3 章、第 4 章および第 5 章で提案した手法と同様に、障害物形状によっては面積分が線積分に変換できるなど、理論的に積分計算を行える部分があると予想でき、提案手法における積分計算に関してより詳細な検証を行う必要がある。また、十分な精度の計算結果が得られる打ち切り次数 N の設定に関する検証も必要であるといえる。

楕円体波動関数と最小二乗法を用いた薄板による散乱音場の準理論解析手法

第 7 章では、薄板による散乱音場の準理論解析手法として、楕円体波動関数を用い、展開係数については境界条件を基に評価関数を設定し、そこに最小二乗法を適用することでマトリクス方程式に帰着させる手法を定式化した。提案手法を正方形および長方形の薄板による散乱音場の解析から、次に示すような結果を得た。

- (1) 薄板による散乱音場の解析に対して効果が認められるが、第 6 章で提案した手法と同様に、パラメータ h が大きくなると提案手法の解析精度は悪化し、妥当な計算結果を得るのは困難である。
- (2) 重み係数を変化させることで解析精度は変化する。このとき、障害物の寸法や解析周波数によって最適な重み係数は異なると予想される。

一方で、数値計算例により、提案手法の薄板による散乱音場の準理論解析手法としての妥当性については示すことができたものの、解析対象に応じて最適な重み係数を設定するための方法について検討や、薄板が吸音境界である場合について解析するための評価関数の設定について検討などの課題が残っている。

以上のことから、解析対象の音場によっては本論文にて提案した準理論解析手法を用いても十分な精度の計算結果が得られ、さらには、提案した準理論解析手法のほうが計算コストの面で有利となる状況が存在し、準理論解析手法を用いることの意義を確認することができた。そのため、理論解析解、本論文にて提案した各種の準理論解析手法、および BEM などその他の波動音響数値解析手法を、解析対象となる音場の特徴に応じて適切に使い分けることが、効率的な解析を行うために重要となってくるといえる。また、準理論解析手法を既存の波動音響解析手法を組み合わせることで、より幅広い音響問題を扱うことができるようになると考えられる。

付録 A

楕円体波動関数ソースコード

球波動関数における球 Bessel 関数や陪 Legendre 関数に関しては, GNU Scientific Library [57]をはじめ, 各種プログラミング言語において実装がなされている。一方で, 楕円体波動関数については Mathematica [58] において実装されているものの, 基本的には自ら実装する必要がある。そこで, 楕円体波動関数を本研究で使用するために実装したソースコードを記す。以下で示すソースコードは Python を用いて記述されており, デフォルトのパッケージ以外に, 科学技術計算向けのパッケージである NumPy [59] および SciPy を用いている。

実装においては, それぞれ以下の式を用いている。

$$S_{mn}(-jh, \eta) = \begin{cases} (1 - \eta^2) \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}^{mn} (1 - \eta^2)^k, & (n - m) \text{ even} \\ \eta(1 - \eta^2) \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}^{mn} (1 - \eta^2)^k, & (n - m) \text{ odd} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$R_{mn}^{(1)}(-jh, j\xi) = \left(\frac{\xi^2 + 1}{\xi^2} \right)^{m/2} \sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{(-1)^{(r-n+m)/2}}{\sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{(2m+r)!}{r!} d_r^{mn}(-jh)} \frac{(2m+r)!}{r!} d_r^{mn}(-jh) j_{m+r}(h\xi) \quad (\text{A.2})$$

$$R_{mn}^{(2)}(-jh, j\xi) = \left(\frac{\xi^2 + 1}{\xi^2} \right)^{m/2} \sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{(-1)^{(r-n+m)/2}}{\sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{(2m+r)!}{r!} d_r^{mn}(-jh)} \frac{(2m+r)!}{r!} d_r^{mn}(-jh) y_{m+r}(h\xi) \quad (\text{A.3})$$

ここで c_{2k}^{mn} は

$$c_{2k}^{mn} = \begin{cases} \frac{1}{2^m k! (m+k)!} \sum_{r=k}^{\infty} \frac{(2m+2r)!}{(2r)!} (-r)_k (m+r+1/2)_k d_{2r}^{mn}, & (n-m) \text{ even} \\ \frac{1}{2^m k! (m+k)!} \sum_{r=k}^{\infty} \frac{(2m+2r+1)!}{(2r+1)!} (-r)_k (m+r+3/2)_k d_{2r}^{mn}, & (n-m) \text{ odd} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

であり, $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+k+1)$ である。また, ξ が小さな範囲において, Eq. (A.3)

は収束が悪くなることから次式を用いている。

$$R_{mn}^{(2)}(-jh, j\xi) = Q_{mn}^*(-jh)R_{mn}^{(1)}(-jh, j\xi) \left[\tan^{-1} \xi - \frac{1}{2}\pi \right] + g_{mn}(-jh, j\xi) \quad (\text{A.5})$$

ここで,

$$Q_{mn}^*(-jh) = \begin{cases} \frac{[j^{-m}\kappa_{mn}^{(1)}(-jh)]^2}{h} \sum_{r=0}^m \alpha_r^{mn}(-jh) \frac{(2m-2r)!}{r![2^{m-r}(m-r)!]^2}, & (n-m) \text{ even} \\ -\frac{[j^{-m-1}\kappa_{mn}^{(1)}(-jh)]^2}{h} \sum_{r=0}^m \alpha_r^{mn}(-jh) \frac{(2m-2r-1)!}{r![2^{m-r}(m-r)!]^2}, & (n-m) \text{ odd} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

$$\kappa_{mn}^{(1)}(-jh) = \begin{cases} \frac{(2m+1)(n+m)! \sum_{r=0}^{\infty} {}'d_r^{mn} \frac{(2m+r)!}{r!}}{2^{n+m} d_0^{mn} h^{m+1} m! \left(\frac{n-m}{2}\right)! \left(\frac{n+m}{2}\right)!}, & (n-m) \text{ even} \\ \frac{(2m+3)(n+m+1)! \sum_{r=0}^{\infty} {}'d_r^{mn} \frac{(2m+r)!}{r!}}{2^{n+m} d_1^{mn} h^{m+1} m! \left(\frac{n-m-1}{2}\right)! \left(\frac{n+m+1}{2}\right)!}, & (n-m) \text{ odd} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$$\alpha_r^{mn} = \left\{ \frac{d^r}{dx^r} \frac{1}{\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}^{mn}(-jh)x^k \right]^2} \right\}_{x=0} \quad (\text{A.8})$$

また,

$$g_{mn}(-jh, j\xi) = \begin{cases} (\xi^2 + 1)^{-\frac{1}{2}m} \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r}^{mn} \xi^{2r+1}, & (n-m) \text{ even} \\ (\xi^2 + 1)^{-\frac{1}{2}m} \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r}^{mn} \xi^{2r}, & (n-m) \text{ odd} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

であり, 係数 B_{2r}^{mn} は次式を用いることで求まる。

$$\begin{aligned} & (2r+2)(2r+3)B_{2r+2}^{mn} + [(2r+1)(2r-2m+2) + m(m-1) - \lambda_{mn}(-jh)]B_{2r}^{mn} + h^2 B_{2r-2}^{mn} \\ & = -2Q_{mn}^*(-jh)[j^{-m}\kappa_{mn}^{(1)}(-jh)]^{-1} \sum_{k=r-m+1}^{\infty} c_{2k}^{mn}(-jh)(2k+m) {}_{k+m-1}C_r, \quad (n-m) \text{ even} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} & (2r+1)(2r+2)B_{2r+2}^{mn} + [(2r+1)(2r-2m+1) + m(m-1) - \lambda_{mn}(-jh)]B_{2r}^{mn} + h^2 B_{2r-2}^{mn} \\ & = -2Q_{mn}^*(-jh)[j^{-m-1}\kappa_{mn}^{(1)}(-jh)]^{-1} \left[\sum_{k=r-m}^{\infty} c_{2k}^{mn}(-jh)(2k+m+1) {}_{k+m}C_r \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=r-m-1}^{\infty} c_{2k}^{mn}(-jh)(2k+m) {}_{k+m+1}C_r \right], \quad (n-m) \text{ odd} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

ここで, ${}_nC_r$ は二項係数である。

以上の式に基づき実装したコードを Code A.1 に示す。また, 現時点における問題点として, パラメータ h が大きな範囲では第 2 種 Radial 関数において精度の悪化が見られる。そこで, パラ

メータ h が大きな範囲においては次のような Laguerre 関数による近似展開を用いた楕円体波動関数を用いるのがよいとされている [60]。

$$R_{mn}^{(4)}(-jh, j\xi) \approx \frac{2\pi(2h)^n j^{n-m+1}}{m! A_{-\nu}^{mn}} e^{-2h(\xi^2 + 1)^{m/2}} \sum_{s=-\nu}^{\infty} A_s^{mn} e^{jh\xi} U_{\nu+s}^m(2h(1-j\xi)) \quad (\text{A.12})$$

$$U_n^m(z) \approx \frac{e^{-j(n+1/2)\pi} e^z}{n! \pi z^{n+m+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+r)!(n+m+r)!}{r! z^r} \quad (\text{A.13})$$

$$\nu = \begin{cases} \frac{n-m}{2}, & (n-m) \text{ even} \\ \frac{n-m-1}{2}, & (n-m) \text{ odd} \end{cases}$$

ただし, U_n^m : 第2種 Laguerre 関数である。また, 係数 A_s^{mn} は Laguerre 関数の循環式 Eq. (A.14) から得られる。

$$(s+\nu+1)(s+\nu+m+1)A_{s+1}^{mn} - [\Lambda + 2s(2\nu+m+1-2h+s)]A_s^{mn} + (s+\nu)(s+\nu+m)A_{s-1}^{mn} = 0 \quad (\text{A.14})$$

ここで, Λ_{mn} は次式の連分数表示で与えられる。

$$\Lambda_{mn} = \frac{Q_0^2}{\Lambda_{mn} + P_{-1} - \frac{Q_{-1}^2}{\Lambda_{mn} + P_{-2} - \dots}} + \frac{Q_1^2}{\Lambda_{mn} + P_1 - \frac{Q_2^2}{\Lambda_{mn} + P_2 - \dots}} \quad (\text{A.15})$$

$$Q_s = (s+\nu)(s+\nu+m)$$

$$P_s = 2s(2\nu+m+1-2h+s)$$

Code A.1 を実行すると, 次のような出力が得られる。

```
> python swf.py 2 3 4 0 2 -1

Wronskian check
xi          exact          calculated      error [%]
0.000000    2.500000e-01          2.500000e-01    0.000000e+00
0.200000    2.403846e-01          2.403846e-01    5.773160e-14
0.400000    2.155172e-01          2.155172e-01    3.090861e-13
0.600000    1.838235e-01          1.838235e-01    2.566836e-13
0.800000    1.524390e-01          1.524390e-01    8.921752e-13
1.000000    1.250000e-01          1.250000e-01    1.831868e-12
1.200000    1.024590e-01          1.024590e-01    3.332001e-12
1.400000    8.445946e-02          8.445946e-02    5.290879e-12
1.600000    7.022472e-02          7.022472e-02    5.578804e-11
1.800000    5.896226e-02          5.896226e-02    5.689886e-10
2.000000    5.000000e-02          5.000000e-02    6.003531e-10
max error : 6.003531e-10
```

ここで, コマンドライン引数は左から, 位数 m , 次数 n , パラメータ h , ξ_{min} , ξ_{max} , 回転楕円体座標系・扁球座標系の判断に対応しており, その出力は次式に示す Radial 関数の Wronskian を, $[\xi_{min} \ \xi_{max}]$ の範囲について求めた結果である。

$$R_{mn}^{(1)}(-jh, j\xi) R_{mn}^{(2)'}(-jh, j\xi) - R_{mn}^{(1)'}(-jh, j\xi) R_{mn}^{(2)}(-jh, j\xi) = \frac{1}{h(\xi^2 + 1)} \quad (\text{A.16})$$

Eq. (A.16) より Wronskian の理論値と計算値の誤差を算出することで, 計算された Radial 関数の精度を評価することができる。

Code A.1 swf.py

```

# This is python module for calculating spheroidal wave functions.
#

# dependencies
import numpy as np
# Bessel functions, associated legendre functions, and log(gamma(x))
from scipy.special import jv, yv, lpmn, lqmn, gammaln
from scipy.misc import factorial
from matplotlib.mlab import amap

__all__ = ['proAng1', 'proAng1p', 'proRad1', 'proRad1p', 'proRad2', 'proRad2p',
           'proRad3', 'proRad3p', 'proRad4', 'proRad4p',
           'oblAng1', 'oblAng1p', 'oblRad1', 'oblRad1p', 'oblRad2', 'oblRad2p',
           'oblRad3', 'oblRad3p', 'oblRad4', 'oblRad4p',]

# ----- spherical bessel functions -----
def sph_besselj(n, xi):
    """Spherical bessel functions"""
    N = n + 0.5
    jn = np.zeros(xi.size)

    index1 = np.where(xi == 0.0)[0]
    index2 = np.where(xi > 0.0)[0]
    if n == 0:
        jn[index1] = 1.0
    else:
        jn[index1] = 0.0

    jn[index2] = np.sqrt(np.pi/(2*xi[index2])) * jv(N, xi[index2])

    return jn

def sph_besselpj(n, xi):
    """First derivative of spherical bessel functions"""
    jp = np.zeros(xi.size)

    if n == 0:
        jp = -sph_besselj(1, xi)
    else:
        jp = 1.0/(2*n+1.0) * (n*sph_besselj(n-1, xi) - (n+1)*sph_besselj(n+1, xi))

    return jp

def sph_bessely(n, xi):
    """Spherical neumann function"""
    N = n + 0.5
    yn = np.zeros(xi.size)

    index1 = np.where(xi == 0.0)[0]
    index2 = np.where(xi > 0.0)[0]
    yn[index1] = -np.inf
    yn[index2] = np.sqrt(np.pi/(2*xi[index2])) * yv(N, xi[index2])

    return yn

def sph_besselyp(n, xi):
    """First derivative of spherical neumann function"""
    yp = np.zeros(xi.size)

    if n == 0:
        yp = -sph_bessely(1, xi)
    else:
        index1 = np.where(xi == 0.0)[0]
        index2 = np.where(xi > 0.0)[0]
        yp[index1] = np.inf
        yp[index2] = 1.0/(2*n+1.0) \
            * (n*sph_bessely(n-1, xi[index2]) - (n+1)*sph_bessely(n+1, xi[index2]))

```

```

    return yp

# ----- spheroidal wave functions -----
def coeffDq(m, r, hh):
    nume = r * (r-1.0)
    deno = (2*m+2*r-3.0) * (2*m+2*r-1.0)

    dq = (nume / deno) * hh

    return dq

def coeffEq(m, r, hh):
    nume = 2*(m+r) * (m+r+1.0) - 2*m*m - 1.0
    deno = (2*m+2*r-1.0) * (2*m+2*r+3.0)

    eq = (nume / deno) * hh + (m+r)*(m+r+1.0)

    return eq

def coeffFq(m, r, hh):
    nume = (2*m+r+2.0) * (2*m+r+1.0)
    deno = (2*m+2*r+3.0) * (2*m+2*r+5.0)

    fq = (nume / deno) * hh

    return fq

def eignValue(m, n, h, sign=1):
    """
    m, n : mode parameter
    h     : spheroidal parameter
    sign : if sign == 1 (default value) return prolate, else return oblate
    """

    N = n + 5 + int(h)      # truncation number
    A = np.zeros((N, N))

    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    hh = h**2 if sign == 1 else -h**2

    for q in xrange(N):
        if q == 0:
            A[q, q] = coeffEq(m, 2*q+s, hh)
            A[q, q+1] = np.sqrt(coeffDq(m, 2*(q+1)+s, hh)*coeffFq(m, 2*q+s, hh))

        elif q == N-1:
            A[q, q-1] = np.sqrt(coeffDq(m, 2*q+s, hh)*coeffFq(m, 2*(q-1)+s, hh))
            A[q, q] = coeffEq(m, 2*q+s, hh)

        else:
            A[q, q-1] = np.sqrt(coeffDq(m, 2*q+s, hh)*coeffFq(m, 2*(q-1)+s, hh))
            A[q, q] = coeffEq(m, 2*q+s, hh)
            A[q, q+1] = np.sqrt(coeffDq(m, 2*(q+1)+s, hh)*coeffFq(m, 2*q+s, hh))

    segv = np.linalg.eigvals(A)

    return segv[int((n-m)/2)]

def swfCoeff(m, n, h, sign=1):
    """
    m, n : mode parameter
    h     : spheroidal parameter
    sign : if sign == 1 (default value) return prolate, else return oblate
    """

```

```

s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
p = 50 + 2*n + 2*int(h) + s      # downward recursion started at p
hh = h**2 if sign == 1 else -h**2

tmp1, tmp2, g = 0.0, 0.0, 0.0
hpr, hr, fr, dr = np.zeros(p+1), np.zeros(p+1), np.zeros(p+1), np.zeros(p+1)
segv = eignValue(m, n, h, sign)

if h == 0.0:      # special case
    dr[n-m] = 1.0
else:
    for r in xrange(s, (n-m)+2, 2):
        if r == s:
            hr[s] = 1.0
        elif r == s+2:
            hr[r] = -(coeffEq(m, r-2, hh) - segv) / coeffFq(m, r-2, hh)
        else:
            hr[r] = -((coeffEq(m, r-2, hh) - segv)*hr[r-2] \
                + coeffDq(m, r-2, hh)*hr[r-4]) / coeffFq(m, r-2, hh)

    # backward recurrence
    for r in xrange(p, s-2, -2):
        if r == p:
            hpr[p] = 1e-100
        elif r == p-2:
            hpr[r] = -(coeffEq(m, r+2, hh) - segv)*hpr[r+2] / coeffDq(m, r+2, hh)
        else:
            hpr[r] \
                = -(coeffFq(m, r+2, hh)*hpr[r+4] + (coeffEq(m, r+2, hh)-segv)*hpr[r+2]) \
                / coeffDq(m, r+2, hh)
    hr[n-m+2:p+2:2] = hr[n-m] / hpr[n-m] * hpr[n-m+2:p+2:2]

    # normalization using flammer's schime
    for r in xrange(s, p+2, 2):
        fr[r] = ((-1.0)**((r-s)/2) / 2.0**r) \
            * np.exp(gammaln(r+2*m+s+1) - gammaln((r-s)/2+1) - gammaln((r+2*m+s)/2+1))
    if abs(fr[r]) == np.inf:
        fr = fr[:r-1]
        hr = hr[:r-1]
        break

    g = np.dot(fr, hr) / fr[n-m]
    dr = hr / g

return dr

def swfCoeff2(m, n, h, dr, sign=1):
    """
    Compute the expansion coefficients of the prolate and oblate spheroidal
    functions for negative
    """
    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    p = 50 + 2*n + 2*int(h) + s + 2*m
    hh = h**2 if sign == 1 else -h**2

    hr = np.zeros(p+1)
    fr = np.zeros(p+1)
    dn = np.zeros(p+1)
    segv = eignValue(m, n, h, sign)

    for r in xrange(1, m+1):
        t = coeffEq(m, -2*m+s, hh) - segv
        for l in xrange(m-r):
            t = (coeffEq(m, -2*(m-l-1)+s, hh) - segv) \
                - coeffDq(m, -2*(m-l-1)+s, hh) * coeffFq(m, -2*(m-l)+s, hh) / t
            hr[2*r-s] = -coeffFq(m, -2*r+s, hh) / t

    frac = 1.0
    for r in xrange(1, m+1):
        frac *= hr[2*r-s]
        dn[2*r-s] = dr[s] * frac

    fr[-1] = coeffEq(m, -p-2, hh) - segv

```

```

for r in xrange(p-2, 2*m-s, -2):
    fr[r] = (coeffEq(m, -r, hh) - segv) \
        - coeffDq(m, -r, hh) * coeffFq(m, -r-2, hh) / fr[r+2]
    hr[r] = -coeffFq(m, -r, hh) / fr[r]

dnp = dr[s] if m == 0 else dn[2*m-s]

dn[2*m+2-s] = (-1)**s * dnp * hh / ((2.0*m-1.0)*(2.0*m+1.0-4.0*s)*fr[2*m+2-s])
for r in xrange(2*m+4-s, p+2, 2):
    dn[r] = hr[r] * dn[r-2]

return dn

def coeffC2k(m, n, dr):
    """
    Compute the expansion coefficients of
    the prolate and oblate spheroidal functions c2k
    """
    p = dr.size - 1
    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    kMax = (p - s) / 2
    c2k = np.zeros(kMax*2+1)

    for k in xrange(kMax+1):
        for r in xrange(k, kMax+1):
            term1 = np.exp(gammaln(2*m+2*r+s+1) - gammaln(2*r+s+1))
            term2 = 1.0
            for i in xrange(k):
                term2 *= (-r+i) * (m+r+0.5+s+i)

            c2k[2*k] += term1 * term2 * dr[2*r+s]

        c2k[2*k] /= (2**m) * factorial(k) * factorial(m+k)

        if abs(c2k[2*k]) == np.inf:
            c2k = c2k[:2*(k-1)+1]
            break

    return c2k

def joinFactorK1(m, n, h, dr):
    """
    Compute joining factor kmn of the 1st kind
    for the prolate and oblate spheroidal functions
    """
    p = dr.size - 1
    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    kmn1 = 0.0

    for r in xrange(s, p+2, 2):
        kmn1 += dr[r] * np.exp(gammaln(2*m+r+1) - gammaln(r+1))

    nume = (2*m+1.0+2.0*s) * factorial(n+m+s)
    deno = 2.0**((n+m)*dr[s]*h**((m+s) \
        * (factorial(m)*factorial(0.5*(n-m-s))*factorial(0.5*(n+m+s))))
    kmn1 *= nume / deno

    return kmn1

def joinFactorK2(m, n, h, dr, dn, sign=1):
    """
    Compute joining factor kmn of the 2nd kind
    for the prolate and oblate spheroidal functions
    """
    p = dr.size - 1
    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    kmn2 = 0.0

```

```

    for r in xrange(s, p+2, 2):
        kmn2 += dr[r] * factorial(2*m+r) / factorial(r)

    dnp = dr[s] if m == 0 else dn[2*m-s]

    nume = 2**(n-m)*factorial(2*m)*factorial(0.5*(n-m-s))*factorial(0.5*(n+m+s)) * dnp
    if s == 0:
        deno = (2.0*m-1.0) * (factorial(m) * factorial(n+m)) * h**(m-1)
    else:
        deno = (2.0*m-3.0) * (2.0*m-1.0) * (factorial(m) * factorial(n+m+1)) * h**(m-2)

    kmn2 *= nume / deno * (-1.0)**s

    return kmn2

def spheroidalNorm(m, n, h, sign=1):

    dr = swfCoeff(m, n, h, sign)
    p = dr.size - 1
    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1

    Nmn = 0.0
    for r in xrange(s, p+2, 2):
        nume = 2.0 * factorial(r+2*m) * (dr[r]**2)
        deno = (2.0*r+2.0*m+1.0) * factorial(r)
        Nmn += nume / deno

    return Nmn

# ===== prolate spheroidal wave functions =====
# ----- prolate angular function of the 1st kind -----
def pro_S1(m, n, h, eta):
    """
    Compute prolate angular function of the 1st kind
    """

    dr = swfCoeff(m, n, h, 1)
    c2k = coeffC2k(m, n, dr)
    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    kMax = (c2k.size - 1) / 2
    ang1 = np.zeros(eta.size)

    for k in xrange(kMax+1):
        ang1 += c2k[2*k] * (1-eta**2)**k

    ang1 *= (1-eta**2)**(0.5*m) if s == 0 else eta * (1-eta**2)**(0.5*m)

    return ang1

def pro_S1p(m, n, h, eta):

    dr = swfCoeff(m, n, h, 1)
    c2k = coeffC2k(m, n, dr)
    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    kMax = (c2k.size - 1) / 2
    ang1p = np.zeros(eta.size)

    if s == 0:
        if m == 0:
            for k in xrange(1, kMax+1):
                ang1p += -c2k[2*k] * (k) * (1-eta**2)**(k-1) * 2*eta
        elif m == 1:
            index1 = np.where(eta == -1.0)[0]
            index2 = np.where(eta == 1.0)[0]
            index3 = np.where(abs(eta) != 1.0)[0]
            ang1p[index1] = np.inf
            ang1p[index2] = -np.inf
            for k in xrange(kMax+1):
                ang1p[index3] += -c2k[2*k] * (k+0.5*m) * (1-eta[index3]**2)**(k+0.5*m-1) *
                    2*eta[index3]
        else:
            for k in xrange(kMax+1):

```

```

        ang1p += -c2k[2*k] * (k+0.5*m) * (1-eta**2)**(k+0.5*m-1) * 2*eta
    else:
        if m == 0:
            ang1p[:] = c2k[0]
            for k in xrange(1, kMax+1):
                ang1p += c2k[2*k] * (1-eta**2)**k
                ang1p += -c2k[2*k] * k * (1-eta**2)**(k-1) * 2*eta**2
        elif m == 1:
            index1 = np.where(abs(eta) == 1.0)[0]
            index2 = np.where(abs(eta) != 1.0)[0]
            ang1p[index1] = -np.inf
            for k in xrange(kMax+1):
                ang1p[index2] += c2k[2*k] * (1-eta[index2]**2)**(k+0.5*m)
                ang1p[index2] += -c2k[2*k] * (k+0.5*m) * (1-eta[index2]**2)**(k+0.5*m-1) *
                    2*eta[index2]**2
        else:
            for k in xrange(kMax+1):
                ang1p += c2k[2*k] * (1-eta**2)**(k+0.5*m)
                ang1p += -c2k[2*k] * (k+0.5*m) * (1-eta**2)**(k+0.5*m-1) * 2*eta**2

    return ang1p

# ----- prolate radial function of the 1st kind -----
def pro_R1(m, n, h, xi):
    """Prolate radial function of the 1st kind"""
    dr = swfCoeff(m, n, h, 1)
    p = dr.size - 1
    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    eps = 1e-14
    ar = np.zeros(p+1)
    rad1 = np.zeros(xi.size)

    for r in xrange(s, p+2, 2):
        ar[r] = dr[r] * np.exp(gammaln(2*m+r+1) - gammaln(r+1))
        rad1 += (-1.0)**(0.5*(r+m-n)) * ar[r] * sph_besselj(m+r, h*xi)

    rad1 = rad1 * (1-1.0/(xi**2))**0.5 / sum(ar)

    return rad1

def pro_R1p(m, n, h, xi):
    """First derivative of prolate radial function of the 1st kind"""

    dr = swfCoeff(m, n, h, 1)
    p = dr.size - 1
    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    ar = np.zeros(p+1)
    rad1p = np.zeros(xi.size)

    term1, term2 = np.zeros(xi.size), np.zeros(xi.size)
    for r in xrange(s, p+2, 2):
        ar[r] = dr[r] * np.exp(gammaln(2*m+r+1) - gammaln(r+1))
        term1 += (-1.0)**(0.5*(r+m-n)) * ar[r] * sph_besselj(m+r, h*xi)
        term2 += (-1.0)**(0.5*(r+m-n)) * ar[r] * h*sph_besseljp(m+r, h*xi)

    term1 *= -m/((xi)**(3.0)*(1.0-1.0/(xi**2)))
    rad1p = (term1 + term2) * (1-1.0/(xi**2))**0.5 / sum(ar)

    return rad1p

def pro_R2(m, n, h, xi):
    """Prolate radial function of the 2nd kind"""
    dr = swfCoeff(m, n, h, 1)
    p = dr.size - 1
    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    eps = 1e-10
    ar = np.zeros(p+1)
    rad2 = np.zeros(xi.size)

    sw = np.zeros(xi.size)
    for r in xrange(s, p+2, 2):
        ar[r] = dr[r] * np.exp(gammaln(2*m+r+1) - gammaln(r+1))

```

```

    rad2 += (-1.0)**(0.5*(r+m-n)) * ar[r] * sph_bessely(m+r, h*xi)
    index1 = np.where(abs(rad2 - sw) > abs(rad2)*eps)[0]
    index2 = np.where(abs(rad2 - sw) <= abs(rad2)*eps)[0]
    sw = rad2.copy()

    rad2[index2] = rad2[index2] * (1-1.0/(xi[index2]**2))**(0.5*m) / sum(ar)

    dn = swfCoeff2(m, n, h, dr, 1)
    kmn2 = joinFactorK2(m, n, h, dr, dn, 1)
    val= np.zeros(len(index1))
    for r in xrange(-2*m+s, p, 2):
        if r < 0:
            if m + r < 0:
                q1 = legendreQ(m, 1, xi[index1])
                q0 = legendreQ(m, 0, xi[index1])
                for k in xrange(0, m+r+1, -1):
                    qmn = ((2*k+1) * xi[index1] * q0 - (k-m+1) * q1) / (k+m)
                    q1 = q0
                    q0 = qmn
                val += dn[abs(r)] * qmn
            else:
                val += dn[abs(r)] * legendreQ(m, m+r, xi[index1])[0]
        else:
            val += dr[r] * legendreQ(m, m+r, xi[index1])[0]

    for r in xrange(2*(m+1)-s, len(dn), 2):
        val += dn[r] * legendreP(m, r-m-1, xi[index1])[0]

    rad2[index1] = val / kmn2

    return rad2

def pro_R2p(m, n, h, xi):
    """First derivative of prolate radial function of the 2nd kind"""
    dr = swfCoeff(m, n, h, 1)
    p = dr.size - 1
    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    eps = 1e-10
    ar = np.zeros(p+1)
    rad2p = np.zeros(xi.size)

    sw = np.zeros(xi.size)
    term1 = np.zeros(xi.size)
    term2 = np.zeros(xi.size)
    for r in xrange(s, p+2, 2):
        ar[r] = dr[r] * np.exp(gammaln(2*m+r+1) - gammaln(r+1))
        term1 += (-1.0)**(0.5*(r+m-n)) * ar[r] * sph_bessely(m+r, h*xi)
        term2 += (-1.0)**(0.5*(r+m-n)) * ar[r] * h * sph_besselyp(m+r, h*xi)
        index1 = np.where(abs(term2 - sw) > abs(term2)*eps)[0]
        index2 = np.where(abs(term2 - sw) < abs(term2)*eps)[0]
        sw = term2.copy()

    term1[index2] += (m / (xi[index2]**3 * (1-1/xi[index2]**2)))
    rad2p[index2] = (term1[index2] + term2[index2]) * (1-1/xi[index2]**2)**(0.5*m) / sum(ar)

    dn = swfCoeff2(m, n, h, dr, 1)
    kmn2 = joinFactorK2(m, n, h, dr, dn, 1)
    val= np.zeros(len(index1))
    for r in xrange(-2*m+s, p, 2):
        if r < 0:
            if m + r < 0:
                q1 = legendreQ(m, 1, xi[index1])
                q0 = legendreQ(m, 0, xi[index1])
                if s == 0:
                    for k in xrange(0, m+r+1, -1):
                        qmn = ((2*k+1) * xi[index1] * q0 - (k-m+1) * q1) / (k+m)
                        qd = ((k-m)*q0 - k*xi[index1]*qmn) / (xi[judge1]**2 - 1)
                        q1 = q0
                        q0 = qmn
                    else:
                        for k in xrange(0, m+r, -1):
                            qmn = ((2*k+1) * xi[index1] * q0 - (k-m+1) * q1) / (k+m)
                            qd = (k*xi[index1]*q0 - (k+m)*qmn) / (xi[judge1]**2 - 1)

```

```

        q1 = q0
        q0 = qmn
        val += dn[abs(r)] * qd
    else:
        val += dn[abs(r)] * legendreQ(m, m+r, xi[index1])[1]
    else:
        val += dr[r] * legendreQ(m, m+r, xi[index1])[1]

for r in xrange(2*(m+1)-s, len(dn), 2):
    val += dn[r] * legendreP(m, r-m-1, xi[index1])[1]

rad2p[index1] = val / kmn2;

return rad2p

def legendreP(m, n, x):
    pmn, pd = np.zeros(len(x)), np.zeros(len(x))
    for i in xrange(len(x)):
        val1, val2 = lpmn(m, n, x[i])
        pmn[i], pd[i] = val1[m, n], val2[m, n]

    return pmn, pd

def legendreQ(m, n, x):
    qmn, qd = np.zeros(len(x)), np.zeros(len(x))
    for i in xrange(len(x)):
        val1, val2 = lqmn(m, n, x[i])
        qmn[i], qd[i] = val1[m, n], val2[m, n]

    return qmn, qd

# ===== oblate spheroidal wave functions =====
# ----- oblate angular function of the 1st kind -----
def obl_S1(m, n, h, eta):
    """Oblate angular function of the 1st kind"""

    dr = swfCoeff(m, n, h, -1)
    c2k = coeffC2k(m, n, dr)
    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    kMax = (c2k.size - 1) / 2
    ang1 = np.zeros(eta.size)

    for k in xrange(kMax+1):
        ang1 += c2k[2*k] * (1-eta**2)**k

    ang1 *= (1-eta**2)**(0.5*m) if s == 0 else eta * (1-eta**2)**(0.5*m)

    return ang1

def obl_S1p(m, n, h, eta):
    """First derivative of oblate angular function of the 1st kind"""
    dr = swfCoeff(m, n, h, -1)
    c2k = coeffC2k(m, n, dr)
    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    kMax = (c2k.size - 1) / 2
    ang1p = np.zeros(eta.size)

    if s == 0:
        if m == 0:
            for k in xrange(1, kMax+1):
                ang1p += -c2k[2*k] * (k) * (1-eta**2)**(k-1) * 2*eta
        elif m == 1:
            index1 = np.where(eta == -1.0)[0]
            index2 = np.where(eta == 1.0)[0]
            index3 = np.where(abs(eta) != 1.0)[0]
            ang1p[index1] = np.inf
            ang1p[index2] = -np.inf
            for k in xrange(kMax+1):
                ang1p[index3] += -c2k[2*k] * (k+0.5*m) * (1-eta[index3]**2)**(k+0.5*m-1) *
                    2*eta[index3]
        else:
            for k in xrange(kMax+1):

```

```

        ang1p += -c2k[2*k] * (k+0.5*m) * (1-eta**2)**(k+0.5*m-1) * 2*eta
    else:
        if m == 0:
            ang1p[:] = c2k[0]
            for k in xrange(1, kMax+1):
                ang1p += c2k[2*k] * (1-eta**2)**k
                ang1p += -c2k[2*k] * k * (1-eta**2)**(k-1) * 2*eta**2
        elif m == 1:
            index1 = np.where(abs(eta) == 1.0)[0]
            index2 = np.where(abs(eta) != 1.0)[0]
            ang1p[index1] = -np.inf
            for k in xrange(kMax+1):
                ang1p[index2] += c2k[2*k] * (1-eta[index2]**2)**(k+0.5*m)
                ang1p[index2] += -c2k[2*k] * (k+0.5*m) * (1-eta[index2]**2)**(k+0.5*m-1) *
                    2*eta[index2]**2
        else:
            for k in xrange(kMax+1):
                ang1p += c2k[2*k] * (1-eta**2)**(k+0.5*m)
                ang1p += -c2k[2*k] * (k+0.5*m) * (1-eta**2)**(k+0.5*m-1) * 2*eta**2

    return ang1p

# ----- oblate radial function of the 1st kind -----
def obl_R1(m, n, h, xi):
    """Oblate radial function of the 1st kind"""
    dr = swfCoeff(m, n, h, -1)
    p = dr.size - 1
    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    eps = 1e-14
    ar = np.zeros(p+1)
    rad1 = np.zeros(xi.size)

    index1 = np.where(xi == 0.0)[0]
    index2 = np.where(xi > 0.0)[0]
    for r in xrange(s, p+2, 2):
        ar[r] = dr[r] * np.exp(gammaln(2*m+r+1) - gammaln(r+1))
        rad1[index2] += (-1.0)**(0.5*(r+m-n)) * ar[r] * sph_besselj(m+r, h*xi[index2])

    rad1[index2] = rad1[index2] * (1+1.0/(xi[index2]**2))**((0.5*m) / sum(ar))

    if s == 0:
        nume = (-1)**(0.5*(n-m)) * (2*h)**m * factorial(m) * dr[0]
        deno = (2*m+1) * sum(ar)
        rad1[index1] = nume / deno
    else:
        rad1[index1] = 0.0

    return rad1

def obl_R1p(m, n, h, xi):
    """First derivative of oblate radial function of the 1st kind"""
    dr = swfCoeff(m, n, h, -1)
    p = dr.size - 1
    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    ar = np.zeros(p+1)
    rad1p = np.zeros(xi.size)

    term1, term2 = np.zeros(xi.size), np.zeros(xi.size)
    index1 = np.where(xi == 0.0)[0]
    index2 = np.where(xi > 0.0)[0]
    for r in xrange(s, p+2, 2):
        ar[r] = dr[r] * np.exp(gammaln(2*m+r+1) - gammaln(r+1))
        term1[index2] += (-1.0)**(0.5*(r+m-n)) * ar[r] * sph_besselj(m+r, h*xi[index2])
        term2[index2] += (-1.0)**(0.5*(r+m-n)) * ar[r] * h*sph_besseljp(m+r, h*xi[index2])

    term1[index2] *= -m/((xi[index2])**3.0*(1.0+1.0/(xi[index2]**2)))
    rad1p[index2] = (term1[index2] + term2[index2]) * (1+1.0/(xi[index2]**2))**((0.5*m) /
        sum(ar))

    if s == 0:
        rad1p[index1] = 0.0
    else:
        nume = (-1)**(0.5*(n-m-1)) * h * (2*h)**m * factorial(m) * dr[1]

```

```

        deno = (2*m+3) * sum(ar)
        radip[index1] = nume / deno

    return radip

# ---- sub functions for oblate radial function of the 2nd kind ----
def qstar(m, n, h, c2k, kmn1):

    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    ar = np.zeros(m+1)
    qmn = 0.0

    ar[0] = 1.0 / (c2k[0]**2)
    for r in xrange(1, m+1):
        term1 = 0.0
        for i in xrange(1, r+1):
            term2 = 0.0
            for k in xrange(i+1):
                term2 += c2k[2*k] * c2k[2*(i-k)]
            term1 += term2 * ar[r-i]
        ar[r] = -ar[0] * term1

    qmn = ar[m]
    for r in xrange(1, m+1):
        term3 = 1.0
        for k in xrange(1, r+1):
            term3 *= (2.0*k+s)*(2.0*k-1.0+s)/((2.0*k)**2)
        qmn += ar[m-r]*term3

    qmn *= (-1.0)**s * kmn1**2 / h

    return qmn

def coeffBr(m, n, h, c2k, kmn1, qmn):

    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    nm = (c2k.size - 1) / 2
    segv = eignValue(m, n, h, -1)
    n2 = nm - 2

    qt = -2.0 / kmn1 * qmn
    v, w, br = np.zeros(nm), np.zeros(nm), np.zeros(n2)
    for r in xrange(1, nm):
        v[r-1] = (2.0*r-1.0-s)*(2.0*(r-m)-s) + m*(m-1.0)-segv
        w[r-1] = (2.0*r-s) * (2.0*r+1.0-s)

    if s == 0:
        rad1 = obl_R1(m, n, h, np.array([0.0]))
        ref = 1/(h*rad1) - qmn*rad1
        for r in xrange(n2):
            s1 = 0.0
            kStart = r-m+1 if r-m+1 >= 0 else 0
            for k in xrange(kStart, nm+1):
                r1 = 1.0
                for j in range(1, r+1):
                    r1 *= (k+m-1.0-(r-j)) / j
                s1 += c2k[2*k] * (2.0*k+m) * r1

            br[r] = qt * s1
    else:
        ref = -1/(h*obl_R1p(m, n, h, np.array([0.0])))
        for r in xrange(n2):
            s1 = 0.0
            kStart = r-m+1 if r-m+1 >= 0 else 0
            for k in xrange(kStart, nm+1):
                r1 = 1.0
                for j in range(1, r+1):
                    r1 *= (k+m-1.0-(r-j)) / j
                s1 += c2k[2*(k-1)]*(2.0*k+m-1.0)*r1 if k > 0 else 0
                s1 += -c2k[2*k] * (2.0*k+m) * r1

            br[r] = qt * s1

```

```

w[0] /= v[0]
br[0] /= v[0]
for r in xrange(2, n2+1):
    t = v[r-1] - w[r-2] * h**2
    w[r-1] /= t
    br[r-1] = (br[r-1]-br[r-2]*h**2) / t

for r in xrange(n2-1, 0, -1):
    br[r-1] += -w[r-1] * br[r]

ref = ref / br[0]
br *= ref

return br

def Gmn(m, n, h, xi, br):

    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    nm = br.size
    xm = (1.0+xi**2)**(-0.5*m)
    gf0, gd0 = np.zeros(xi.size), np.zeros(xi.size)

    for k in xrange(nm):
        gf0 += br[k] * xi**(2*k)

    gf = xm * gf0 * xi**(1.0-s)

    gd1 = -m*xi / (1.0+(xi**2)) * gf
    for k in xrange(1, nm):
        if s == 0:
            gd0 += (2.0*k-1.0) * br[k-1] * xi**(2.0*k-2.0)
        else:
            gd0 += 2.0*k * br[k] * xi**(2.0*k-1.0)

    gd = gd1 + xm*gd0

    return (gf, gd)

# ----- oblate radial function of the 2nd kind -----
def obl_R2(m, n, h, xi):
    """Oblate radial function of the 2nd kind"""
    dr = swfCoeff(m, n, h, -1)
    p = dr.size - 1
    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    eps = 1e-10
    ar = np.zeros(p+1)
    rad2 = np.zeros(xi.size)

    index1 = np.where(xi != 0.0)[0]
    index2 = np.where(xi == 0.0)[0]

    sw = np.zeros(xi.size)
    for r in xrange(s, p+2, 2):
        ar[r] = dr[r] * np.exp(gammaln(2*m+r+1) - gammaln(r+1))
        rad2[index1] += (-1.0)**(0.5*(r+m-n)) * ar[r] * sph_bessely(m+r, h*xi[index1])
        index1 = np.where(abs(rad2 - sw) > abs(rad2)*eps)[0]
        index3 = np.where(abs(rad2 - sw) <= abs(rad2)*eps)[0]
        sw = rad2.copy()

    rad2[index3] *= (1+1.0/(xi[index3]**2))**(0.5*m) / sum(ar)

    index4 = np.where(abs(rad2) == np.inf)[0]
    index1 = np.concatenate((index4, index1))

    c2k = coeffC2k(m, n, dr)
    kmn1 = joinFactorK1(m, n, h, dr)
    qmn = qstar(m, n, h, c2k, kmn1)
    br = coeffBr(m, n, h, c2k, kmn1, qmn)

    gmn = Gmn(m, n, h, xi[index1], br)[0]
    rad2[index1] = qmn * obl_R1(m, n, h, xi[index1]) \
        * (np.arctan(xi[index1]) - 0.5*np.pi) + gmn

```

```

    if s == 0:
        rad2[index2] = -0.5 * np.pi * qmn * sum(c2k) / kmn1
    else:
        rad2[index2] = br[0]

    return rad2

def obl_R2p(m, n, h, xi):
    dr = swfCoeff(m, n, h, -1)
    p = dr.size - 1
    s = 0 if (n - m) % 2 == 0 else 1
    eps = 1e-10
    ar = np.zeros(p+1)
    rad2p = np.zeros(xi.size)

    index1 = np.where(xi != 0.0)[0]
    index2 = np.where(xi == 0.0)[0]

    sw = np.zeros(xi.size)
    term1 = np.zeros(xi.size)
    term2 = np.zeros(xi.size)
    for r in xrange(s, p+2, 2):
        ar[r] = dr[r] * np.exp(gammaln(2*m+r+1) - gammaln(r+1))
        term1[index1] += (-1.0)**(0.5*(r+m-n)) \
            * ar[r] * sph_bessely(m+r, h*xi[index1])
        term2[index1] += (-1.0)**(0.5*(r+m-n)) \
            * ar[r] * h * sph_besselyp(m+r, h*xi[index1])
        index1 = np.where(abs(term2 - sw) > abs(term2)*eps)[0]
        index3 = np.where(abs(term2 - sw) < abs(term2)*eps)[0]
        sw = term2.copy()

    rad2p[index3] = -m/((xi[index3])**3.0*(1.0+1.0/(xi[index3]**2)))*term1[index3] \
        + term2[index3]
    rad2p[index3] *= (1+1.0/(xi[index3]**2))**(0.5*m) / sum(ar)

    index4 = np.where(abs(term2) == np.inf)[0]
    index1 = np.concatenate((index4, index1))

    c2k = coeffC2k(m, n, dr)
    kmn1 = joinFactorK1(m, n, h, dr)
    qmn = qstar(m, n, h, c2k, kmn1)
    br = coeffBr(m, n, h, c2k, kmn1, qmn)
    gp = Gmn(m, n, h, xi[index1], br)[1]
    R1, R1p = obl_R1_all(m, n, h, xi[index1])
    rad2p[index1] = qmn * (R1p*(np.arctan(xi[index1]) - 0.5*np.pi) \
        + R1/(1.0 + xi[index1]**2)) + gp

    if s == 0:
        rad2p[index2] = qmn * sum(c2k) / kmn1 + br[0]
    else:
        rad2p[index2] = -0.5 * np.pi * qmn * sum(c2k) / kmn1

    return rad2p

def proAng1(m, n, h, eta):
    flag = 0
    if np.isscalar(eta):
        eta = np.array([float(eta)])
        flag = 1

    result = pro_S1(m, n, h, eta)

    if flag:
        result = result[0]

    return result

def proAng1p(m, n, h, eta):

```

```
    flag = 0
    if np.isscalar(eta):
        eta = np.array([float(eta)])
        flag = 1

    result = pro_S1p(m, n, h, eta)

    if flag:
        result = result[0]

    return result

def proRad1(m, n, h, xi):
    flag = 0
    if np.isscalar(xi):
        xi = np.array([float(xi)])
        flag = 1

    result = pro_R1(m, n, h, xi)

    if flag:
        result = result[0]

    return result

def proRad1p(m, n, h, xi):
    flag = 0
    if np.isscalar(xi):
        xi = np.array([float(xi)])
        flag = 1

    result = pro_R1p(m, n, h, xi)

    if flag:
        result = result[0]

    return result

def proRad2(m, n, h, xi):
    flag = 0
    if np.isscalar(xi):
        xi = np.array([float(xi)])
        flag = 1

    result = pro_R2(m, n, h, xi)

    if flag:
        result = result[0]

    return result

def proRad2p(m, n, h, xi):
    flag = 0
    if np.isscalar(xi):
        xi = np.array([float(xi)])
        flag = 1

    result = pro_R2p(m, n, h, xi)

    if flag:
        result = result[0]

    return result

def proRad3(m, n, h, xi):
    result = proRad1(m, n, h, xi) + 1j*proRad2(m, n, h, xi)

    return result
```

```

def proRad3p(m, n, h, xi):
    result = proRad1p(m, n, h, xi) + 1j*proRad2p(m, n, h, xi)

    return result

def proRad4(m, n, h, xi):
    result = proRad1(m, n, h, xi) - 1j*proRad2(m, n, h, xi)

    return result

def proRad4p(m, n, h, xi):
    result = proRad1p(m, n, h, xi) - 1j*proRad2p(m, n, h, xi)

    return result

def oblAng1(m, n, h, eta):
    flag = 0
    if np.isscalar(eta):
        eta = np.array([float(eta)])
        flag = 1

    result = obl_S1(m, n, h, eta)

    if flag:
        result = result[0]

    return result

def oblAng1p(m, n, h, eta):
    flag = 0
    if np.isscalar(eta):
        eta = np.array([float(eta)])
        flag = 1

    result = obl_S1p(m, n, h, eta)

    if flag:
        result = result[0]

    return result

def oblRad1(m, n, h, xi):
    flag = 0
    if np.isscalar(xi):
        xi = np.array([float(xi)])
        flag = 1

    result = obl_R1(m, n, h, xi)

    if flag:
        result = result[0]

    return result

def oblRad1p(m, n, h, xi):
    flag = 0
    if np.isscalar(xi):
        xi = np.array([float(xi)])
        flag = 1

    result = obl_R1p(m, n, h, xi)

    if flag:
        result = result[0]

    return result

def oblRad2(m, n, h, xi):

```

```

    flag = 0
    if np.isscalar(xi):
        xi = np.array([float(xi)])
        flag = 1

    result = obl_R2(m, n, h, xi)

    if flag:
        result = result[0]

    return result

def oblRad2p(m, n, h, xi):
    flag = 0
    if np.isscalar(xi):
        xi = np.array([float(xi)])
        flag = 1

    result = obl_R2p(m, n, h, xi)

    if flag:
        result = result[0]

    return result

def oblRad3(m, n, h, xi):
    result = oblRad1(m, n, h, xi) + 1j*oblRad2(m, n, h, xi)

    return result

def oblRad3p(m, n, h, xi):
    result = oblRad1p(m, n, h, xi) + 1j*oblRad2p(m, n, h, xi)

    return result

def oblRad4(m, n, h, xi):
    result = oblRad1(m, n, h, xi) - 1j*oblRad2(m, n, h, xi)

    return result

def oblRad4p(m, n, h, xi):
    result = oblRad1p(m, n, h, xi) - 1j*oblRad2p(m, n, h, xi)

    return result

def wronskian_check(m, n, h, xi, sign=1):

    if sign == 1:
        exact = 1.0 / (h * (xi**2 - 1))
        R1, R1p = proRad1(m, n, h, xi), proRad1p(m, n, h, xi)
        R2, R2p = proRad2(m, n, h, xi), proRad2p(m, n, h, xi)
    else:
        exact = 1.0 / (h * (xi**2 + 1))
        R1, R1p = oblRad1(m, n, h, xi), oblRad1p(m, n, h, xi)
        R2, R2p = oblRad2(m, n, h, xi), oblRad2p(m, n, h, xi)

    wronskian = R1 * R2p - R1p * R2

    error = abs(exact - wronskian) / exact * 100

    print("\nWronskian check")
    print("xi          exact          calculated          error [%]")
    for cnt in xrange(len(xi)):
        print("%2f      %e      %e      %e" % (xi[cnt], exact[cnt], wronskian[cnt], error[cnt]))

    print("max error : %e\n" % max(error))

    return

```

```
if __name__ == '__main__':
    import sys
    argvs = sys.argv
    argc = len(argvs)
    if argc != 7:
        print("Please check the arguments are correct")
        quit()

    m, n, h = int(argvs[1]), int(argvs[2]), float(argvs[3])
    xi_min, xi_max = float(argvs[4]), float(argvs[5])
    sign = int(argvs[6])
    xi = np.linspace(xi_min, xi_max, 11)
    wronskian_check(m, n, h, xi, sign)
```


参考文献

- [1] E. スタイン, R. ドウボースト, T. ヒューズ 編, 田端 正久, 萩原一郎 監訳, 計算力学理論ハンドブック, 朝倉書店, 東京, 2010.
- [2] 日本建築学会, 室内音場予測手法-理論と応用-, 丸善, 東京, 2001.
- [3] 日本建築学会, 音環境の数値シミュレーション-波動音響解析の技法と応用-, 丸善, 東京, 2011.
- [4] J. J. Bowman, T. B. A. Senior and P. L. E. Uslenghi, *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1987.
- [5] 石田康二, “幾何音響学に基づく各種シミュレーション手法について,” 音響技術, 34, 14-23 (2005).
- [6] P. C. Waterman, “New formulation of acoustic scattering,” *J. Acoust. Soc. Am.*, 45, 1417-1429 (1969).
- [7] 大嶋拓也, 伊藤克彦, “二次元一般座標系 FDTD 法による不整形音場の解析,” 日本音響学会北陸支部研究報告集, 48, 317-320 (2005).
- [8] 大鶴徹, “有限要素法を用いた室内音場解析の現状と問題点,” 建築音響研究会資料, No. AA97-14, 1997.
- [9] B. Engquist and A. Majda, “Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves,” *Math. Comp.*, 31, 629-651 (1977).
- [10] T. Sakuma, “Fast multipole boundary element method for predicting sound fields,” *Proc. Inter-Noise 99*, 1639-1644 (1999).
- [11] V. Rokhlin, “Rapid solution of integral equations of classical potential theory,” *J. Comput. Phys.* 60, 187-207 (1983).
- [12] “Fast multipole boundary element method for large-scale steady-state sound field analysis. Part I: Setup and Validation,” *Acust. Acta. Acust.*, 88, 513-525 (2002).
- [13] “Fast multipole boundary element method for large-scale steady-state sound field analysis. Part II: Examination of numerical items,” *Acust. Acta. Acust.*, 89, 28-38 (2003).
- [14] LMS Internatilnal, “LMS SYSNOISE,” <http://www.lmsintl.com/SYSNOISE>
- [15] CYBERNET, “WAON (音響解析ソフトウェア),” <http://www.cybernet.co.jp/waon/>
- [16] 谷川将規, 福若直子, 松浦有希子, 阪上公博, 森本政之, “境界展開法による線対称散乱体まわりの音場解析に関する基礎的研究,” 神戸大学大学院自然科学研究科紀要 25-B, 21-19

- (2007).
- [17] W. Williams, N. G. Parke, D. A. Moran and C. H. Sherman, "Acoustic radiation from a finite cylinder," *J. Acoust. Soc. Am.*, **36**, 2316–2322 (1964).
 - [18] W. Tobocman, "Comparison of the T -matrix and helmholtz integral equation methods for wave scattering calculations," *J. Acoust. Soc. Am.*, **77**, 369–374 (1985).
 - [19] P. C. Waterman, "Comments on "Comparison of the T -matrix and helmholtz integral equation methods for wave scattering calculations" [*J. Acoust. Soc. Am.*, **77**, 369–374 (1985)]," *J. Acoust. Soc. Am.*, **78**, 805–808 (1985).
 - [20] W. Tobocman, "Addendum and Erratum: "Comparison of the T -matrix and helmholtz integral equation methods for wave scattering calculations" [*J. Acoust. Soc. Am.*, **77**, 369–374 (1985)]," *J. Acoust. Soc. Am.*, **78**, 369–374 (1985).
 - [21] L. G. Copley, "Fundamental results concerning integral representations in acoustic radiation," *J. Acoust. Soc. Am.*, **44**, 28–32 (1968).
 - [22] H. A. Schenck, "Improved integral formulation for acoustic radiation problems," *J. Acoust. Soc. Am.*, **44**, 41–58 (1968).
 - [23] A. J. Burton and G. F. Miller, "The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems," *Proc. R. Soc. Lond. A*, **323**, 201–210 (1971).
 - [24] T. Terai, "On calculation of sound fields around three dimensional objects by integral equation methods," *J. Sound. Vib.*, **69**, 71–100 (1980).
 - [25] Working Group on Computational Method for Environmental Acoustics, "Benchmark Platform on Computational Methods for Architectural/Environmental Acoustics," <http://gacoust.hwe.oita-u.ac.jp/aij-bpca/>
 - [26] P. M. Morse and K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1986
 - [27] C. Flammer, *Spheroidal Wave Functions*, Stanford University Press, Stanford, California, 1957.
 - [28] D. B. Hodge, "Eigenvalue and eigenfunction of the spheroidal wave equation," *J. Math. Phys.*, **11**, 2308–2312 (1970).
 - [29] E. Skudrzyk, *The foundations of acoustics*, Springer, Wien, 1971.
 - [30] 横道央, 鮫島俊哉, "有限長円筒による散乱音場の解析手法," 日本音響学会講演論文集, No. 3-2-8, 643–644 (2005).
 - [31] 齊藤久典, 横道央, 鮫島俊哉, "障害物による散乱音場の解析手法," 日本音響学会講演論文集, No. 1-5-11, 527–528 (2006).
 - [32] 安浦亀之助, 板倉特也, "完備波動関数系の概念—波動関数の近似法について (I) —," 九大工学集報, **38**, 72–77 (1965).
 - [33] 安浦亀之助, 板倉特也, "完備波動関数系の概念—波動関数の近似法について (II) —," 九大工学集報, **38**, 378–385 (1966).

-
- [34] 安浦亀之助, 板倉特也, “完備波動関数系の概念—波動関数の近似法について (III) —,” 九大工学集報, 39, 51–56 (1966).
 - [35] 山下榮吉, 電磁波問題の基礎解析法, 電子情報通信学会, 東京, 1987.
 - [36] 富来礼次, 大鶴徹, 佐久間哲哉, 坂本慎一, “環境音響数値解析技術のための AIJ-BPCA ベンチマークプラットフォーム,” 建築音響研究会資料, No. AA-2005-08 (2005).
 - [37] 大嶋拓也, 鮫島俊哉, 小坂慶之, 佐久間哲哉, 大久保朝直, 横田考俊, 堀之内吉成, 榎本貴之, “AIJ-BPCA ベンチマーク外部問題群の解析—基本問題・拡散体・遮音壁の解析事例—,” 建築音響研究会資料, No. AA-2005-11 (2005).
 - [38] 安田洋介, 小坂慶之, 岡本則子, 大嶋拓也, 佐久間哲哉, 坂本慎一, “境界要素音場解析への Krylov 部分空間法の適用 反復解法を利用した大規模音場数値解析 その 1,” 日本建築学会環境系論文集, 605, 15–22 (2006).
 - [39] C. W. Ueberhuber, *Numerical computation : method, software, and analysis*, Springer, Berlin, 1997.
 - [40] P. M. Morse, *Vibration and sound*, McGraw-Hill, New York, 1948.
 - [41] N. A. Gumerov and R. Duraiswami, “Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion,” *J. Acoust. Soc. Am.*, 112, 2688–2701 (2002).
 - [42] N. A. Gumerov and R. Duraiswami, *Fast multipole methods for the helmholtz equation in three dimensions*, Elsevier, Amsterdam, 2004.
 - [43] W. C. Chew, “Recurrence relations for three-dimensional scalar addition theorem,” *J. Electromagn. Waves. Appl.*, 6, 133–142 (1992).
 - [44] S. Koc, J. Song and W. C. Chew, “Error analysis for the numerical evaluation of the diagonal forms of the scalar spherical addition theorem,” *SIAM J. Numel. Anal.*, 36, 906–921 (1999).
 - [45] M. Abramowitz and B. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1972.
 - [46] M. A. Epton and B. Dembart, “Multipole translation theory for the three-dimensional laplace and helmholtz equations,” *SIAM J. Sci. Comput.*, 4, 865–897 (1995).
 - [47] R. Coifman, V. Rokhlin and S. Wandzura, “The Fast Multipole Method for the Wave Equation: A Pedestrian Prescription,” *IEEE Antennas, Propag. Mag.*, 35, 7–12 (1993).
 - [48] J. T. Chen, C. T. Chen, P. Y. Chen and I. L. Chen, “A semi-analytical approach for radiation and scattering problems with circular boundaries,” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196, 2751–2764, 2007.
 - [49] W. Lee, “Acoustic scattering by multiple elliptical cylinders using collocation multipole method,” *J. Comput. Phys.*, 231, 4597–4612, 2012
 - [50] 鮫島俊哉, 木田佳孝, 齊藤久典, “波動関数展開とキルヒホッフ-ホイヘンスの公式を用いた散乱音場の準理論解析手法,” 日本音響学会誌, 67, 556–573 (2011).
 - [51] Y. Kida, T. Samejima and K. Morikuni, “Evaluation of a semi-analytical method for calculating multiple acoustic scattering fields,” *Acoust. Sci. & Tec.*, 33, 64–67 (2012).

- [52] S. Zhang and J. Jin, *Computation of special functions*, John Wiley & Sons, New York, 1996
- [53] S. Zhang and J. Jin, “FORTRAN routines for computation of special functions,” <http://jin.ece.illinois.edu/routines/routines.html>
- [54] SciPy developers, “SciPy.org,” <http://www.scipy.org>
- [55] A. Leitner, “Diffraction of sound by a circular disk,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **21**, 331–334 (1949).
- [56] F. M. Wiener, “The diffraction of sound by rigid disks and rigid square plates,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **21**, 334–337 (1949).
- [57] Free Software Foundation, “GNU Scientific Library,” <http://www.gnu.org/software/gsl/>
- [58] Wolfram, “Wolfram Mathematica,” <http://www.wolfram.com/mathematica/>
- [59] NumPy developers, “NumPy.org,” <http://www.numpy.org>
- [60] 岩瀬俊秀, 杉山清, “大型扁平回転楕円体の回折係数について,” *日本音響学会誌*, **56**, 318–323 (2000).

謝辞

本論文は、筆者が九州大学大学院芸術工学府 芸術工学専攻博士課程において、同専攻 鮫島俊哉准教授のご指導のもと行った研究をまとめたものです。

鮫島准教授には、本研究に関して終始ご指導ご鞭撻をいただき、また解析のおもしろさ・奥深さを教えていただきました。ここに深謝いたします。

同専攻 岩宮眞一郎教授ならびに尾本章准教授には、本論文をご精読いただき、有益なコメントをいただきました。ここに深くお礼申し上げます。

共同研究者である国立情報学研究所の保國恵一博士ならびにヤマハ発動機株式会社の齊藤久典氏には、共著論文を本論文の参考論文として提出することにご快諾いただきました。ここに深くお礼申し上げます。

学会や研究会においては、東京大学の佐久間哲哉准教授や神奈川大学の安田洋介准教授をはじめとし、多くの方々から本研究の位置づけ・意義に対し有益なアドバイスをいただきました。ここにお礼申し上げます。

鮫島研究室で共に過ごした喜田健司氏をはじめ、研究室の先輩・後輩の方々には、日常の議論をとおして多くの知識や刺激をいただきました。ここにお礼申し上げます。

最後になりましたが、筆者に博士課程に進学する機会を与えてくださり、また学生生活を支えてくださった両親に感謝いたします。