九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

Symbolic-Numeric Quantifier Elimination with Industrial Applications

岩根, 秀直

https://doi.org/10.15017/1441053

出版情報：九州大学, 2013, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：全文ファイル公表済

様式７

論文審査の結果の要旨

本論文は、実閉体(Real Closed Field:RCF)上での限量子消去法（quantifier elimination, QE）の計算アルゴリズムの高率化と、QE を用いた（多目的、パラメトリック）最適化問題への数値数式アプローチをテーマとしている。さらに提案手法を実応用から得られた多くの最適化問題へ適用し、その有効性も検証している。QE アルゴリズムの効率化のためには、QE 問題の構造を利用した効率化、及び、記号・代数演算のみではなく数値演算を利用しつつも正確な計算が可能な数値・数式ハイブリッド計算の効果的な導入による高率化を実現している。数式処理・代数計算と数値計算を併用した最適化問題への取り組みは、数値計算を主とする従来の最適化問題解法とは異なる視点を持つものであり、本論文の特徴となっている。

RCF 上での QE アルゴリズムについては、1930 年に A.Tarski がその存在を示し、非常に効率の悪いものであるが具体的なアルゴリズムが示した。1975 年に G.E. Collins が, 与えられた多項式系に対して、変数空間を cell と呼ばれる各多項式の符号が不変な領域に分割するアルゴリズム Cylindrical Algebraic Decomposition (CAD) を提案し、CAD による QE アルゴリズムを示した。現在でも CAD は QE アルゴリズムとしては汎用的で最も効率的な手法として知られており、さまざまな効率化のための改良が続けられている。一方で、RCF 上の QE の計算量の下限が限量記号の交代の数に対して 2 重指数であることが示され、QE が本質的に難しい問題であることが確認された。このことにより、QE アルゴリズムの研究が応用問題と関連した特別な問題のクラス（例えば限量記号がついた変数はすべて線形の場合など）に対するより効率的な専用 QE アルゴリズムの研究も進められている。また、実際の計算の効率化の工夫として、記号演算のみではなく数値演算を利用した数値・数式ハイブリッド計算によるアルゴリズムの高速化に関する研究も進められている。

本論文では、汎用の QE アルゴリズムである CAD 対する数値数式計算による効率化について議論している。通常の CAD の実装において、多くの記号計算が必要となる。記号計算を回避するため CAD の計算結果の再利用や数値手法を利用した複数の "quick test" を導入し、計算の効率化を実現している。本手法における数値手法では区間演算を利用し、正確性を失うことなく効率化を実現している。提案した多くの quick test が利用する問題の特徴の一つは、数値手法により入力の論理式の真偽値を部分的にではあるが正確に決定できることがある、というものである。例えば、ある変数は正であるとか、ある円の中を動くであるというように、正確に記号計算を行う必要がある領域が全変数空間でない場合が、多くの実問題で確認することができる。このような問題に対して、数値手法で正確に評価できない領域のみ CAD を構築する手法を bounded CAD と呼んでいる。提案した bounded CAD により構築される cell の数を通常の方法に比べ大幅に削減することができる。提案手法の効果については、多くのベンチマーク問題に対する計算機実験結果と他の QE の実装との比較により示されている。

また、Sign Definite Condition (SDC)と呼ばれる条件($\forall x\,(x \geqq 0 \rightarrow f(x) > 0)$)に対する専用 QE の改良について議論している。制御系設計のさまざまな制約条件を SDC に帰着

できるため SDC 専用 QE の効率化は非常に重要である。提案された QE アルゴリズムは Sturm-Habicht 列を用いた実根の数え上げ手法により実現されているが、冗長な出力を含んでいる。穴井らのアルゴリズムは出力となる論理式の簡単化により、提案手法の効率化が実現できる。またそれは実行可能領域の描画などの後処理の効率化にもつながる。本章では SDC が満たす必要条件を導出し、不要な条件の削減を行い、さらに論理関数処理手法を用いることにより論理式の簡単化を実現した。計算機実験結果により提案手法の効果を示している。

最後に、現実のものづくりにおける最適化問題に対する数値数式手法について述べている。QE は与えられた問題を等価変換により正確な答えを求めることができるため強力であるがその計算量により結果が得られないことが多い。本論文では、数式処理により消去できる変数のみを消去し、得られた新しい問題に対して従来の数値計算による最適化手法（遺伝的アルゴリズムや PSO などのヒューリスティクス手法）を適用することを提案している。QE により、与えられた元の最適化問題よりも決定変数の数が少なく、扱いやすい問題に等価変換しているため、元の問題に直接数値手法を適用するよりも精度良く解が得られることを計算機実験結果により示している。

以上の結果は、手法の新しさと応用範囲の広さ、また提案手法が計算機の発達により将来さらに有効となるであろうことから判断して、数式処理及び多目的最適化の分野において価値ある業績と認められる。

よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。