

Symbolic-Numeric Quantifier Elimination with Industrial Applications

岩根, 秀直

<https://doi.org/10.15017/1441053>

出版情報 : 九州大学, 2013, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 : 全文ファイル公表済

氏 名：岩根 秀直

論文題目：Symbolic-Numeric Quantifier Elimination with Industrial Applications
(数値数式計算に基づく限量記号消去法とその産業応用)

区 分：甲

論 文 内 容 の 要 旨

限量記号消去法(Quantifier Elimination:QE)は与えられた形式理論について限量記号($\forall \cdot \exists$)がついた一階述語論理式から、それと等価で限量記号がない論理式を求めるアルゴリズムである。一階述語論理式の記述能力は非常に高く、制約充足問題や最適化問題などのさまざまな応用問題を一階述語論理式に帰着することができる。

実閉体(Real Closed Field:RCF)上での QE アルゴリズムについては、1930年に A.Tarski がその存在を示し、非常に効率の悪いものであるが具体的なアルゴリズムが示した。1975年に G.E. Collins が与えられた多項式系に対して、変数空間を cell と呼ばれる各多項式の符号が不変な領域に分割するアルゴリズム Cylindrical Algebraic Decomposition (CAD) を提案し、CAD による QE アルゴリズムを示した。現在でも CAD は QE アルゴリズムとしては汎用的で最も効率的な手法として知られており、さまざまな効率化のための改良が続けられている。一方で、RCF 上の QE の計算量の下限が限量記号の交代の数に対して 2 重指数であることが示され、QE が本質的に難しい問題であることが確認された。このことにより、QE アルゴリズムの研究が応用問題と関連した特別な問題のクラス(例えば限量記号がついた変数はすべて線形の場合など)に対するより効率的な専用 QE アルゴリズムの研究も進められている。また、実際の計算の効率化の工夫として、記号演算のみではなく数値演算を利用した数値・数式ハイブリッド計算によるアルゴリズムの高速化に関する研究も進められている。本研究の主目的は、さまざまな産業分野で扱われる実問題を QE により解くための方法論の確立とその効率化であり、実応用問題の特徴・構造の利用と数値数式ハイブリッド計算の適用を特徴とする。

本論文の構成と内容は以下の通りである。

第 1 章では、限量記号消去法に関する先行研究と本論文の内容に関する概観が与えられている。

第 2 章では、汎用の QE アルゴリズムである CAD 対する、数値数式計算による効率化について議論している。通常の CAD の実装において、多くの記号計算が必要となる。大きな計算時間を必要とする記号計算を回避するため CAD の計算結果の再利用や数値手法を利用した複数の "quick test" を導入し、計算の効率化を実現している。本手法における数値手法では区間演算を利用し、正確性を失うことなく効率化を実現している。提案した多くの quick test が利用する問題の特徴の一つは、数値手法により入力 of 論理式 of 真偽値を部分的にはあるが正確に決定できることがある、というものである。例えば、ある変数は正であるとか、ある円の中を動くであるというように、正確に記号計算を行う必要がある領域が全変数空間でない場合が、多くの実問題で確認することができる。このような問題に対して、数値手法で正確に評価できない領域のみ CAD を構築する手法を bounded CAD と呼んでいる。提案した bounded CAD により構築される cell の数を通常の方法に比べ大幅に削減することができる。提案手法の効果については、多くのベンチマーク問題に対する計算機実験結果と他の QE の実装との比較により示されている。本章の内容は、Theoretical Computer Science および雑誌数式処理で公表された主結果である。

第 3 章では、穴井らにより提案された Sign Definite Condition (SDC) と呼ばれる条件($\forall x (x \geq 0$

→ $f(x) > 0$)に対する専用 QE の改良について議論している。制御系設計のさまざまな制約条件を SDC に帰着できるため SDC 専用 QE の効率化は非常に重要である。提案された QE アルゴリズムは Sturm-Habicht 列を用いた実根の数え上げ手法により実現されているが、冗長な出力を含んでいる。穴井らのアルゴリズムは出力となる論理式の単純化により、提案手法の効率化が実現できる。またそれは実行可能領域の描画などの後処理の効率化にもつながる。本章では SDC が満たす必要条件を導出し、不要な条件の削減を行い、さらに論理関数処理手法を用いることにより論理式の単純化を実現した。計算機実験結果により提案手法の効果を示している。本章の内容は、国際会議 *Computer Algebra in Scientific Computing 2013* で発表し、*Lecture Notes in Computer Science* で公表された主結果である。

第 4 章では、現実のものづくりにおける最適化問題（多目的、パラメトリック）に対する数値数式手法について述べている。QE は与えられた問題を等価変換により正確な答えを求めることができるため、とても強力であるがその計算量により結果が得られないことが多い。本章では、数式処理により消去できる変数のみを消去し、得られた新しい問題に対して従来の数値計算による最適化手法（遺伝的アルゴリズムや PSO などのヒューリスティクス手法）を適用することを提案している。QE により、与えられた最適化問題よりも決定変数の数が少なく、扱いやすい問題に等価変換しているため、元の問題に直接数値手法を適用するよりも精度良く解が得られることを計算機実験結果により示している。本章の内容は、*Mathematics in Computer Science* で公表された主結果である。