On algebraic independence of periods in characteristic p

三柴, 善範

https://doi.org/10.15017/1441051

出版情報：九州大学, 2013, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

様式7

論文審査の結果の要旨

本論文は、標数 p, 位数 q の有限体 F 上の有理函数体 $K=F(\theta)$ 上の「周期」と呼ばれるもの達の間の代数的独立性に関する画期的な研究である。周期とは、元来 指数函数 $\exp(z)$ の周期 $2\pi i$ の様に、超越函数の周期として現れる複素数であり、それらはしばしば超越数になる事が知られているか、またはそうなると予想されている。ゼータ函数の特殊値等も或る種の周期として解釈されるが、一般にこれらの超越性や代数的独立性に関しては知られている事は非常に少ない。例えばリーマン・ゼータの特殊値 $\zeta(n)$ の場合でも、n が 3 以上の奇数のとき超越的である事が予想されているが、実際には全く証明されていない。数論に於いては古くから代数体と函数体の類似がよく知られており、この類似を辿る事により数論に大きな進歩がもたらされて来た。本論文に於いては上の様な周期の函数体類似が研究され、代数体の場合では知られていない(しかも今後も暫くの間は証明するのは絶望的なのではないかと思われているような)結果が証明されている。

本論文で扱われている周期は、具体的には或る種の t-motive の周期であり、典型例として多重ゼータ値や多重ポリログ値の函数体版が現れる。主定理の一つは次の様に述べられる:π を Carlitz 基本周期とし、$\zeta(n\_1,...,n\_\mathrm{d})$ を Thakur の意味の多重ゼータ値とする。q-1 で割れない正整数 $n\_1, ..., n\_\mathrm{d}$ が或る緩い条件を満たす時、次の $1+d(d+1)/2$ 個の元は K 上代数的独立である:

$$\pi,\ \zeta(n\_1),\ \zeta(n\_2),\ \zeta(n\_3), \ldots\ldots,\ \zeta(n\_d),$$
$$\zeta(n\_1,n\_2),\ \zeta(n\_2,n\_3), \ldots,\ \zeta(n\_\{d\text{-}1\},n\_d),$$
$$\ldots\ldots,$$
$$\zeta(n\_1,\ldots,n\_\{d\text{-}1\}),\ \zeta(n\_2,\ldots,n\_d),$$
$$\zeta(n\_1,\ldots,n\_d).$$

これから幾つかの重要な系が導かれ、特に Y. Andre が motif についての書著の中で提出した問の函数体版に対する肯定的な答が(より強い形で)与えられる。即ち、K に $\zeta(n)$ (n は正整数) 達を添加した体上、上の様な $\zeta(n\_1,...,n\_d)$ 達は全て代数的独立である。

上の定理に言う「緩い条件」とは「n_i 達が全て異なり、かつ p 冪倍で移り合わない」事であるが、本論文に於いては、n_i 達が一致する場合として、π, $\zeta(n)$, $\zeta(n,n)$, $\zeta(n,n,n)$ の代数的独立性についての興味深い結果も得られている。これらは常に独立な訳ではなく、或る場合には所謂シャッフル積関係式に相当すると思われる関係式が成り立ち、特に興味深い結果となっている。さらに本論文に於いては、幾つかの n_i 達が p 冪倍で移り合うという微妙な状況においても、代数的独立性について有用な結果が得られている。

また、以上の全てについて、ポリログ版も証明されている。

これらの結果の証明には Anderson-Thakur による多重ゼータ値の t-motive 解釈と motivic ガロア群に関する Papanikolas 理論等の高度な数論幾何学的理論が使われ、さらにその motivic ガロア群の次元を計算するために独自の巧妙な帰納法が考案されている。

以上の諸結果は、いづれも第一級の興味深いものであり、数論幾何学の分野において価値ある業績と認められる。

よって、本研究者は博士(数理学)の学位を受ける資格があるものと認める。