On algebraic independence of periods in characteristic p

三柴, 善範

https://doi.org/10.15017/1441051

出版情報：九州大学, 2013, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

氏　　名： 三柴 善範

論文題目： On algebraic independence of periods in characteristic *p*
(標数 *p* における周期の代数的独立性について)

区　　分： 甲

論　文　内　容　の　要　旨

私は博士課程において，正標数における周期を主な興味の対象として調べ，特にそれらの間の代数的独立性について研究を行ってきた．本博士学位論文では，t モチーフと呼ばれる函数体上の対象の周期として現れる正標数多重ゼータ値及び(多変数)Carlitz 多重ポリログの代数的点での値に対して，それらの間の代数的独立性をかなり多くの場合に示している．これらの結果は，例えば重さを固定したときの正標数多重ゼータ値(或いは Carlitz 多重ポリログの値)が張る線型空間の次元の下からの非自明な評価や，深さ 1 の多重ゼータ値では生成されないような多重ゼータ値を無限に作り出すことを可能としている．これらは標数 0 における古典的な場合に対しては手の届きそうにない問題に対する，函数体類似における肯定的な解答を与えている．

本論文の構成は以下の通りである．まずは Introduction において古典的な場合について復習した後，正標数多重ゼータ値と Carlitz 多重ポリログについての知られている結果と私の結果を概観している．Chapter 1 において，本論文を通して使用する記号等について述べている．そして Chapter 2 において，正標数多重ゼータ値及び Carlitz 多重ポリログの値の独立性について，私の結果を含めて詳しく述べた．また，独立性から従ういくつかの系もここで触れている．Chapter 3 において，証明で重要となる t モチーフと Papanikolas の理論について復習をしている．最後の Chapter 4 において，私の結果に対する証明を全て与えている．以下では，これらを詳しく説明する．

Introduction では，古典的な場合と標数 p の場合に分け，扱う対象の定義と知られている結果及び本論文で示す結果を概観した．(標数 0 における)多重ゼータ値は Euler 及び Hoffman によって定義され，Zagier によって詳しく調べられたもので，正の整数からなる組 $\underline{n} = (n_1,\ldots,n_d)$で $n_1 \geqq 2$ となるものに対して

$$\zeta_Z(\underline{n}) = \sum \frac{1}{m_1^{n_1} \cdots m_d^{n_d}} \in \mathbf{R}$$

によって定義される．ここで，和は $m_1 > \cdots > m_d > 0$ となる整数全体を走る．これは Riemann ゼータ函数の特殊値の自然な一般化を与えている．$n_1 + \cdots + n_d$ を重さ，d を深さという．同様に，正の整数からなる組 $\underline{n} = (n_1,\ldots,n_d)$及び代数的数からなる組 $\underline{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_d)$で各 i について $|\alpha_i| < 1$ となるものに対して，対数函数の一般化として多重ポリログ $\mathrm{Li}^{\mathrm{C}}_{\underline{n}}(\underline{\alpha}) \in \mathbf{C}$ が定義される．一つの大きな目標として，多重ゼータ値(或いは多重ポリログ)の間の代数的な関係式を全て決定せよという問題が考えられる．これは大きく分けると，関係式を多く求めることと，特定の元たちの間には関係が全くないことを示すことに分かれる．関係式の存在については多くの人の努力によってかなりのことが分かっているが，関係式の非存在性，つまり線型独立性や代数的独立性についてはほとんど何も分かっていないのが現状である．例えば，固定した重さの多重ゼータ値が有理数体上張る線型空間の次元を下から評価することや，深さ 1 の多重ゼータ値(Riemann ゼータ値)が有理数体上生

成する代数に入らないような多重ゼータ値が存在するかといったAndreの問について，何も分かっていない．私は本論文において函数体におけるこれらの類似物に対してその独立性を示すことで，上記のような問題に対して一定の結果を得た．

$A=\mathbf{F}_q[\theta]$を位数qの有限体上の一変数多項式環，$K=\mathbf{F}_q(\theta)$をAの商体，$K_\infty=\mathbf{F}_q((\theta^{-1}))$をKの無限素点における完備化，$C_\infty$を$K_\infty$の代数閉包の完備化とし，pをこれらの標数とする．これらは，標数0における整数環$\mathbf{Z}$，有理数体$\mathbf{Q}$，実数体$\mathbf{R}$，複素数体$\mathbf{C}$の函数体における類似物を与えている．代数体と函数体の類似は古くから考えられており，多重ゼータ値及び多重ポリログに対しても同様である．Thakur は正の整数からなる組$\underline{n}=(n_1,\ldots,n_d)$に対して，正標数多重ゼータ値を

$$\zeta(\underline{n})=\sum\frac{1}{a_1^{n_1}\cdots a_d^{n_d}}\in K_\infty$$

によって定義した．ここで，$a_1,\ldots,a_d$はモニックなAの元で$\deg(a_1)>\cdots>\deg(a_d)>0$となるもの全体を走る．これは函数体における多重ゼータ値の類似物となっている．Changによって多重ポリログの類似物であるCarlitz多重ポリログ$\mathrm{Li}_{\underline{n}}(\underline{\alpha})$も同様に定義された．ここで，$\underline{\alpha}$はK上代数的な元の組で，適当な収束条件を満たすものである．標数 0 のときと同様に，正標数多重ゼータ値やCarlitz多重ポリログの値の間の関係式を全て決定せよという問題が考えられる．正標数においては標数0のときほど関係式の存在は知られていないが，独立性についてはいくつかのことが示される．私の結果は深さが2以上のものも含めた代数的独立性に関する結果である．

Chapter 2において，独立性に関して知られている結果を述べた後，私が示した結果及びそこから得られる系について論じている．私は，$q-1$で割れない正の整数の組$n_1,\ldots,n_d$に対する

$$\{\tilde{\pi}\}\cup\{\zeta(n_j,n_{j+1},\ldots,n_i)\mid 1\leqq j\leqq i\leqq d\} \qquad (1)$$

の形の集合の元に対して，いくつかの場合にその間の代数的関係式を全て決定した．ここで，$\tilde{\pi}$はCarlitz基本周期である．本論文において私は以下のような結果を示した．

定理 1. $d\leqq 3$で$n_1=n_2=n_d$のときに，集合(1)の元はK上代数的独立であるか，調和積公式と類似の関係式を満たす．さらに$2n$と$3n$が$q-1$で割れないならば全て代数的独立である．

定理 2. 任意の$i\neq j$に対してn_i/n_jはpの整数冪でないとする．このとき，集合(1)は$1+d(d+1)/2$個の元からなり，それらは全てK上代数的独立である．

定理 3. $n_1,\ldots,n_d$は相異なるとし，n_i/n_jがpの整数冪となる組$i\neq j$が高々一組存在するか，$d\leqq 3$とする．このとき，集合(1)の全ての元の間には，p冪に関する自明な関係式しか存在しない．

Carlitz多重ポリログの代数的点での値に対しても，上記の定理の類似が成立する．これらの代数的独立性に関する系として，本論文ではAndreの問に対する正標数における肯定的な解答を与えた．また，重さ2の正標数多重ゼータ値が張る線型空間の次元の決定や重さ3の正標数多重ゼータ値が張る線型空間の次元の下からの評価($p\neq 2,3$のときは次元の決定)もしている．

Chapter 3ではこれらの証明の鍵となるPapanikolasの理論及びAndersonとThakurによる結果を復習している．Papanikolasはtモチーフと呼ばれる函数体上の対象の周期が生成する体の超越次数が，tモチーフが生成する淡中圏の基本群の次元と等しいことを示した．一方 Anderson とThakurによって正標数多重ゼータ値やCarlitz多重ポリログはtモチーフの周期として実現される．従って超越性に関する問題が代数群の計算に帰着された．

Chapter 4において，上記の理論を用いて独立性に関する結果の証明を行っている．証明のポイントは，欲しい周期が全て現れるtモチーフをうまく分解し，帰納法によって次々に代数群及び超越次数を決定していくことである．