REPRESENTATIONS OF CLANS AND THE BASIC RELATIVE INVARIANTS

中島, 秀斗

https://doi.org/10.15017/1441049

出版情報：九州大学, 2013, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

氏　　名：中島　秀斗

論文題目：REPRESENTATIONS OF CLANS AND THE BASIC RELATIVE INVARIANTS
(クランの表現と等質開凸錐の基本相対不変式)

区　　分：甲

論 文 内 容 の 要 旨

Vinberg[3]により導入されたクランと呼ばれる非結合的代数は等質凸領域を研究する上で重要な代数である。その中で単位元を持つクランは等質錐と対応しており、その右乗法作用素の行列式の既約因子として対応する等質錐の基本相対不変式がすべて現れる。等質錐は簡約可能ではない概均質ベクトル空間の例を豊富に与えること、および基本相対不変式は概均質ベクトル空間の研究において重要な要素の一つであることが本研究の背景にある。

Vを単位元e_0を持つクランとし、対応する等質錐をΩとする。原始冪等元の完全直交系$c_1,\dots,c_r$を一つ固定すれば、これに付随して正規分解$V=\bigoplus_{j\le k}V_{kj}$が得られる。ここで$V_{kj}$は$c_1,\dots,c_r$の左および右乗法作用素に関する固有空間である。$V$の内積を$\langle\cdot\mid\cdot\rangle$とし、この内積を通して$V$に新しい積$\triangledown$を

$$\langle x \triangledown y \mid z\rangle = \langle y \mid x \vartriangle z\rangle \quad (x,y,z\in V).$$

により定める。すると$(V,\triangledown)$はクランとなり、これをクランVの双対クランと呼ぶ。

HをΩ上単純推移的に作用する分裂可解 Lie 群とする。Ω上の関数fがHに関して相対不変であるとは、Hの 1 次元表現$\chi_{\underline{\tau}}$ $(\underline{\tau}\in\mathbb{R}^r)$が存在して$f(h\cdot x)=\chi_{\underline{\tau}}(h)f(x)$ $(h\in H, x\in\Omega)$が成り立つことである。ここで$\underline{\tau}$は 1 次元表現$\chi_{\underline{\tau}}$の指数であり、横ベクトルで実現されているとする。このときある既約な相対不変多項式$\Delta_1(x),\dots,\Delta_r(x)$が存在して、任意の$H$-相対不変な多項式はこれらの冪積で表されることが知られている。さらに等質錐Ωは$\Omega=\{x\in V;\ \Delta_1(x)>0,\dots,\Delta_r(x)>0\}$と表される。この既約多項式$\Delta_1(x),\dots,\Delta_r(x)$を等質錐$\Omega$（あるいはクラン$V$)の基本相対不変式という。各$\Delta_j(x)$に対応する 1 次元表現を$\chi_{\underline{\sigma}_j}$ $(\underline{\sigma}_j=(\sigma_{j1},\dots,\sigma_{jr})\in\mathbb{Z}^r_{\ge 0})$としたとき、指数$\underline{\sigma}_j$を縦に並べて$r$次正方行列

$$\sigma_V := \begin{pmatrix}\underline{\sigma}_1\\ \vdots \\ \underline{\sigma}_r\end{pmatrix} = (\sigma_{jk})$$

を構成する。本稿ではこの行列σ_Vを等質錐Ω（あるいはクランV)の指数行列と呼ぶ。

Eを内積$\langle\cdot\mid\cdot\rangle_E$を持つ実ユークリッド空間とし、$\varphi$を双対クラン$(V,\triangledown)$の$E$上の自己共役表現とする。また$\varphi$に付随する対称双線型形式$Q\colon E\times E\to V$を

$$\langle Q(\xi,\eta)\mid x\rangle = \langle \varphi(x)\xi \mid \eta\rangle_E \quad (\xi,\eta\in E, x\in V)$$

により定義する。このとき直和ベクトル空間$V_E=E\oplus V$に積$\vartriangle$を次で定義する：

$$(\xi+x)\vartriangle(\eta+y) := \underline{\varphi}(x)\eta + (Q(\xi,\eta)+x\vartriangle y) \quad (\xi,\eta\in E, x,y\in V).$$

ただし$\underline{\varphi}(x)$は作用素$\varphi(x)$の下三角部分である。すると$(V_E,\vartriangle)$はクランとなる。ここで$\dim E>0$のとき、クランV_Eに単位元eを添加してクラン$V_E^0=\mathbb{R}e\oplus V_E$を構成する。$u:=e-e_0$とおくと$V_E^0=\mathbb{R}u\oplus V_E$であるので、今後この分解を用いる。さらにクラン$V_E^0$の元を$v=\lambda u+\xi+x$ $(\lambda\in\mathbb{R},\xi\in E, x\in V)$のように表す。このとき$V_E^0$の積は

$$(\lambda u+\xi+x)\vartriangle(\mu u+\eta+y)=(\lambda\mu)u+\left(\mu\xi+\tfrac{1}{2}\lambda\eta+\underline{\varphi}(x)\eta\right)+(Q(\xi,\eta)+x\vartriangle y)$$

となる。ただし$\lambda,\eta\in\mathbb{R},\xi,\eta\in E,x,y\in V$である。クラン$V$の右乗法作用素を$R_x$で表し、さらに$Q[\xi]\coloneqq Q(\xi,\xi)$ $(\xi\in E)$とおくと、クランV_E^0の右乗法作用素R_v^0の行列式は

$$\det R_v^0=\lambda^{1+\dim E-\dim V}\det R_{\lambda x-\frac{1}{2}Q[\xi]}$$

と表される。この式の右辺において既約因子を考察することにより次の定理を得る。

定理 A クランV_E^0の基本相対不変式$P_j(v)$ $(j=0,1,\dots,r)$は非負整数α_jを用いると次のようになる:

$$\begin{cases}P_0(v)=\lambda,\\ P_j(v)=\lambda^{-\alpha_j}\Delta_j\left(\lambda x-\frac{1}{2}Q[\xi]\right)\quad(j=1,\dots,r).\end{cases}$$

この定理を用いてクランの右乗法作用素R_xの行列式の因数分解$\det R_x=\Delta_1(x)^{n_1}\cdots\Delta_r(x)^{n_r}$ $(x\in V)$に現れる正整数$n_1,\dots,n_r$を決定する。ここで$m_j\coloneqq\sum_{k\geq j}\dim V_{kj}$とし、さらに$\underline{n}=(n_1,\dots,n_r)$, $\underline{m}=(m_1,\dots,m_r)$とおく。

定理 B Vの指数行列をσ_Vとすれば、$\underline{n}=\underline{m}\sigma_V^{-1}$となる。

$\boldsymbol{\alpha}={}^t(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$を決定するため、クランの表現に$\boldsymbol{\varepsilon}$-表現($\boldsymbol{\varepsilon}\in\{0,1\}^r$)というクラスを導入する。これは表現$\varphi$に付随する 2 次形式$Q[\xi]$の値域に関する情報を持つものである。Graczyk—Ishi[1]の結果を用いて、次の命題が証明できる。

命題 任意のクランの表現φに対して、ある$\boldsymbol{\varepsilon}(\varphi)\in\{0,1\}^r$が一意に存在して$\varphi$は$\boldsymbol{\varepsilon}(\varphi)$-表現となる。

これを用いて$\boldsymbol{\alpha}$が決定できる。Vの指数行列をσ_Vとする。

定理 C 表現(φ,E)をε-表現とすると、$\boldsymbol{\alpha}=\sigma_V(\mathbf{1}-\boldsymbol{\varepsilon})$となる。さらにクラン$V_E^0$の指数行列$\sigma^0$は、

$$\sigma^0=\begin{pmatrix}1&0\\ \sigma_V\varepsilon&\sigma_V\end{pmatrix}.$$

最後に指数行列σ_Vを決定する。これにより定理 A, B, C が完全なものとなる。Vの部分空間$V^{[k]}$と$E^{[k]}$ $(k=1,\dots,r-1)$を、$c_1,\dots,c_r$に関する正規分解$V=\bigoplus_{j\leq k}V_{kj}$を用いて

$$V^{[k]}=\bigoplus_{k<l\leq m\leq r}V_{ml},\qquad E^{[k]}=\bigoplus_{m>k}V_{mk}$$

により定義すると、$V^{[k]}$はクランVの部分クランとなる。また$E^{[k]}\triangledown V^{[k]}\subset E^{[k]}$となるので、$x\in V^{[k]},\xi\in E^{[k]}$に対して$\mathcal{R}^{[k]}(x)\xi\coloneqq\xi\triangledown x$とすることにより$V^{[k]}$の表現$(\mathcal{R}^{[k]},E^{[k]})$が定義できる。ここで$\boldsymbol{\varepsilon}^{[k]}=\boldsymbol{\varepsilon}(\mathcal{R}^{[k]})\in\{0,1\}^r$とおき、さらに$r$次正方行列$\mathcal{E}_k$を

$$\mathcal{E}_k\coloneqq\begin{pmatrix}I_{k-1}&0&0\\0&1&0\\0&\boldsymbol{\varepsilon}^{[k]}&I_{r-k}\end{pmatrix}\quad(k=1,\dots,r-1)$$

により定義する。

定理 D クランVの指数行列σ_Vは、$\sigma_V=\mathcal{E}_{r-1}\mathcal{E}_{r-2}\cdots\mathcal{E}_1$により求められる。

参考文献

[1] P. Graczyk and H. Ishi, *Riesz measures and Wishart laws associated to quadratic maps*, J. Math. Soc. Japan, **66** (2014), 317—348.

[2] H. Nakashima, *Basic relative invariants associated with the clans extended by represen-tations of a given clan*, (submitted).

[3] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340—403.