九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

A Study on Multiple Zeta Values Related to Periods of Elliptic Modular Forms

田坂，浩二

https://doi.org/10.15017/1441048

出版情報：九州大学，2013，博士（数理学），課程博士
バージョン：
権利関係：全文ファイル公表済

様式７

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文は，申請者が博士課程在学中に行ってきた，多重ゼータ値とモジュラー形式の周期に関する一連の研究結果を集成したものである．多重ゼータ値とは，有限個の自然数に対して定義されるある多重和で，リーマンゼータ関数の正整数点での値を一般化したものとなっている．古くは Euler に遡る研究史があるが，この 20 年，数学や物理学の様々な分野との関連もあって，非常に活発に研究されている．ここで言うモジュラー形式とは SL(2,Z)やその部分群に関する古典的な一変数モジュラー形式であるが，多重ゼータ値とモジュラー形式との関連については，Zagier による先駆的な発見や Goncharov の仕事ののち，Gangl-Kaneko-Zagier(2006)により，二重ゼータ値と，モジュラー群上の尖点形式に付随する周期多項式との関係が様々な角度から論じられた．この中の一つとして，「二重アイゼンシュタイン級数」を導入し，そのフーリエ展開を通じてモジュラー形式と二重ゼータ値を結びつけるという研究がなされている．

申請者はまずこの二重アイゼンシュタイン級数をレベル２の場合に拡張し，その場合の「二重シャッフル関係式」を導いた．二重アイゼンシュタイン級数を，うまいシャッフル関係式が満たされるようにレベル付きに一般化することは，定義級数が絶対収束しない場合の扱いが厄介なことから自明なことではない．これを丹念な計算と多くの計算機実験により正しく導いたことは評価できる．この拡張とシャッフル関係式の応用として，レベル２の二重ゼータ値（符号付きの二重 Euler-Zagier 和）の張る空間の次元とレベル２のモジュラー形式の次元との関係を導いた．さらに，この二重シャッフル関係式の著しい応用として，古典的なヤコビテータ級数のべき乗の明示公式に関する Chan-Chua 予想(2003)を解決した．この系として，自然数を平方数のある個数の和として書く方法の個数に関する公式が得られる．Kohnen らの専門家が肉薄しながら解決できなかったこの予想を意外な方法で解いた独創性は高く評価できる．以上の結果は既に一編の共著論文と一編の単著論文として学術雑誌に公表されている．

本論文の多重ゼータ値の理論に対するもう一つの大きな寄与は，最近 Brown により提唱された「純奇多重ゼータ値の次元予想」(2013)のレベル４の場合の解決である．Brown は，多重ゼータ値のなす代数の構造予想（Goncharov による）をもとに，インデックスの成分がすべて３以上の奇数であるような「純奇多重ゼータ値」を考え，重さが一定，深さが一定以下の純奇多重ゼータ値が張る有理数体上のベクトル空間を，より低い深さの純奇多重ゼータ値と，円周率の自乗（リーマンゼータの２での値）の倍数で割った空間の次元を，その母関数を与えることで予想した．この予想は，重さ，深さを固定したときの関係式の個数にやはり尖点形式の次元が関わってくることを示唆している．深さが２の場合の予想は上述の G-K-Z の仕事により，また深さが３の場合は Baumard-Schneps の仕事により解決されている（ここでは次元の上限が予想値で与えられることを示すことを以て解決と称している．次元がそれに等しいことを言うのは各値の独立性の問題となり，現在のところ手の届かない問題とみられている）．本論文では Brown の打ち立てたモチビック多重ゼータ値の理論とそのホップ代数構造に働く Ihara の作用を用いて，モジュラー形式の周期多項式との関係を明確にした．その核となる部分は，一般の深さの多重アイゼンシュタイン級数のフーリエ展開の特定部分を見ることで取り出せるある行列が，この Ihara 作用の特別な場合の係数にも丁度表れていることを発見し，それが Brown 予想解決の鍵となる行列であることを見抜いたことにある．それにより，線形代数的な議論と，シャッフル代数に関する古典的な結果を駆使し，関係式の次元を評価することに成功した．その議論は複雑ではあるものの，一般の場合もこのような組み合わせ的な議論により予想が解決できるのではないかとの期待をいだかせるものである．

申請者は他にも，他の研究者と共に多重ゼータ値に関する共著論文を二編著し既に公表されている．一編は特別な型の等号付き多重ゼータ値に関するもの，一編はレベル２の二重ゼータ値に関するものである．

このように，申請者は既に多重ゼータ値に関する多くの研究を行い公表済みであり，Brown 予想に関する結果は近く投稿予定である．これらの研究結果は整数論，とくに多重ゼータ値およびモジュラー形式の分野において価値あるすぐれた業績と認められる．よって本研究者は博士（数理学）の学位を授与される資格があるものと認める．