

Unitary transformations and multivariate special orthogonal polynomials

渋谷, 元樹

<https://doi.org/10.15017/1441047>

出版情報：九州大学, 2013, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：全文ファイル公表済

氏 名：渋川元樹

論文題目：Unitary transformations and multivariate special orthogonal polynomials
(ユニタリ変換と多変数特殊直交多項式)

区 分：甲

論 文 内 容 の 要 旨

本論文は、管状領域、あるいはその有界対称領域上の正則函数のなす Hilbert 空間や Shilov 境界上の Hardy 空間等の函数空間と、それらの間の Laplace 変換、Fourier 変換、Cayley 変換で与えられるユニタリ変換を用いて、多変数の特殊直交多項式の研究を行う。これにより、以下の二つの種類の新たな多変数直交多項式系を発見し、その基本的な性質を明らかにする。

1) 多変数 circular Jacobi 多項式 (Multivariate circular Jacobi 多項式、以下 MCJ 多項式と略記)

最も素朴な直交多項式系として単位円周上の測度に関するベキ函数が古くから知られているが、この 1-パラメータ変形にあたるものが circular Jacobi (CJ) 多項式である。L. Shen はこの CJ 多項式を Laguerre 多項式の逆 Fourier 変換の逆 Cayley 変換であることを指摘した (2001 年)。本論文では調和解析の手法を用い、Shen の議論の多変数化及び更なる 1-パラメータの変形を行い、MCJ 多項式を定義し、その直交性、ノルム、母函数、更に MCJ 多項式の Cayley 変換が満たす擬微分関係式の解明に成功した。この直交多項式系は次の三つの点で興味深い。

i : 球多項式の 2-パラメータ変形である点

球多項式のパラメータ変形としては、(ルートの) 重複度 d を連続に拡張した Jack 多項式、更にはその q, t -類似である Macdonald 多項式がよく知られている。一方申請者が定義した MCJ 多項式はこれらとは異なり、重複度 d はそのままにして、別の 2-パラメータで変形したタイプの一般化となっている。更に MCJ 多項式の重複度 d を連続なパラメータに拡張して定義し直すことも可能であり、このような観点からは申請者の直交多項式は Jack 多項式の 2-パラメータ変形を与えることになる。本論文ではこの一般化された MCJ 多項式が Jack 多項式とその直交性を真に含んだ拡張であることを示し、その直交性に関する予想も述べる。

ii : 擬微分関係式が成り立つ点

これまで擬微分関係式を満たす多変数直交多項式系は知られていなかったが、MCJ 多項式の Cayley 変換 (多変数 Laguerre 多項式の Fourier 逆変換) は多変数 Laguerre 多項式の満たす微分関係式を逆 Fourier 変換で intertwine した、Euler 作用素の Cayley 変換像の一般化にあたる 1 階の擬微分関係式を満たす。以上の事実と「多変数 Laguerre 多項式は可換な微分作用素族の同時固有函数である」という量子可積分系における結果とを併せて考えると、可換な擬微分作用素族の同時固有函数として MCJ 多項式が捉えられる可能性がある。これは可換な微分作用素族の同時固有函数である Jack 多項式の一般化に他ならず、量子可積分系の観点からも興味深い。

iii : circular Jacobi アンサンブルを重み関数に持つ点

MCJ 多項式の直交関係式の重み関数は具体的に得られ、それは P. Bourgade et.al により導入された (2009 年) circular Jacobi アンサンブルに一致する。このことから MCJ 多項式は Bourgade らにより構成されたランダム行列モデルへの応用が期待される。

2) 多変数 Meixner、Charlier、Krawtchouk 多項式

離散型の直交多項式系としてよく知られている Meixner、Charlier、Krawtchouk 多項式の変数化は Griffiths、Tratnik et.al によりなされている。この変数化は青本・Gelfand の超幾何関数で表示されるタイプの変数化であるが、申請者はそれとは本質的に異なる一般二項係数を用いた変数化を与え、その双対性、母関数、直交性、差分関係式、退化極限等の一変数の場合において知られている基本的な性質を導出した。その際の鍵となるのは、「多変数の Meixner 多項式の母関数の母関数が多変数 Laguerre 多項式の母関数に一致する」という結果である。この補題により、例えば

$$(\text{多変数 Laguerre 多項式の微分方程式}) = (\text{多変数 Meixner 多項式の差分方程式})$$

というように多変数 Laguerre 多項式に関する性質から多変数 Meixner 多項式の種々の性質を導出することが可能になる。このことは同時に、これまで一変数においてさえ知られていなかった連続型と離散型の直交多項式系の母関数を通じた対応を与える、という点でも興味深い。

本論文は 4 章と Appendix からなる。

第 1 章の序論は、研究の動機、目的、続く各章への概要を述べる。

第 2 章では第 3、4 章で必要となる対称錐上の解析と関数空間及びユニタリ変換に関する結果を述べる。これは単に既知の事実を整理するだけではなく、一般二項係数(shifted Jack 多項式)の正值性、order 評価、いくつかの K 不変関数の球 Taylor 展開、多変数 Laguerre 多項式と多変数 Meixner-Pollaczek 多項式の間のユニタリ変換の構成等についても併せて述べる。

第 3 章では、まず MCJ 多項式とそれに関連する関数空間とユニタリ変換を導入し、Shen の結果の変数化を主定理として述べる。更にそれを用い、MCJ 多項式の母関数、MCJ 多項式の Cayley 変換の擬微分方程式を導出する。加えて、それが一変数に退化する場合にどうなるかを述べ、結語として今後の課題、特に重複度 d についての拡張に関する予想を提出する。

第 4 章では多変数 Meixner、Charlier、Krawtchouk 多項式を定義し、双対性、退化極限を述べた後、鍵となる母関数の母関数についての補題を示し、その系として、母関数、直交性、差分関係式を順次導出する。結語に今後の課題として、MCJ と同様に重複度 d に関する拡張と退化二重アフィンヘッケ代数との関連について言及する。

Appendix は、本編とは独立の内容であるが、Meixner-Pollaczek 多項式を用いて、ある作用素順序問題に関する結果を述べる。