

## Graded Lie algebras and prehomogeneous vector spaces

佐々野, 詠淑

<https://doi.org/10.15017/1441046>

---

出版情報 : 九州大学, 2013, 博士 (数理学), 課程博士  
バージョン :  
権利関係 : 全文ファイル公表済

## 論文審査の結果の要旨

概均質ベクトル空間は、1970年ごろに佐藤幹夫がゼータ関数の一般化を行う一つの枠組みとして導入した概念であるが、数論への応用のみならず、代数群やリー環の構造論、次数付きリー環を経由した微分幾何などとのつながりが現在では認識されてきている。特に半単純リー代数の中の放物型部分リー環から作られる概均質ベクトル空間は、ルート系を使って構造論や不変式論を展開することができ、より詳細に、軌道分解やゼータ関数のガンマ因子に関する情報が得られることが知られている。一方で、一般の概均質ベクトル空間は、多彩な例を同時に含むため、ごく一般論（例えば、ゼータ関数の関数方程式など）を除く詳細な研究は、空間ごとの個別の卓越した技術のもとで行われてきており、それらを統合的に理解する枠組みは依然として未解明であった。

佐々野君はこの学位論文において、上記の構成（半単純リー環からその中の概均質ベクトル空間を作る手続き）の逆問題を考えた。すなわち、簡約型リー環とその完全可約な有限次元表現ならびにその上の不変な双一次形式が与えられたときに、これらのリー環と表現空間を同時に含むような次数付きリー環を作れるか、という問題を提唱し、これを肯定的に解決した。直感的に考えると、次数付きリー環の0次と1次の部分から全体を復旧するには情報不足であり、このようなアプローチを取った先行研究はなかったのだが、佐々野君は、不変双一次形式という簡易な条件を付加することでこの情報落ちを防ぐとともに、大きな次数付きリー環を具体的に構成することに成功した。これは特筆すべき着眼点である。構成は次数に関する2重の帰納法を含む込み入った計算に依るものであるが、上手な記号法を工夫するとともに証明に改良を重ねたものである。また、構成した次数付きベクトル空間がリー環になること（ヤコビ律など）も自明でないが、これも同様の方法で証明を与えている。

この構成が多彩な例を同時に含むことも興味深い。例えば、単純リー環の随伴表現から構成された次数付きリー環は、ループリー環であり、1次元の中心拡大をすると、ねじれの無いアフィンカツムーディーリー環となる。これらは数理物理で対称性の記述に頻繁に登場するリー環であるが、これらの有限次元の代数群の表現論や不変式論の枠組みとのつながりを示唆する結果となっている。また、放物型概均質ベクトル空間からこの構成を行うと元の半単純リー環を復元するが、逆に構成された次数付きリー環が有限次元となるための必要十分条件となることもこの学位論文で証明されている。すなわち、概均質ベクトル空間の放物型というクラスを構成法に依らずに特徴付けるという画期的な結果となっている。その他、例外型リー環の簡易な表現からの構成、不変双一次形式の取り替えによる次数付きリー環の変化、対称対から構成された次数付きリー環の同定などを応用として行っている。

以上のように、佐々野詠淑氏は、リー環の構成の研究において、手法、結果ともオリジナリティーの高い顕著な研究成果を挙げ、それらは概均質ベクトル空間の研究において価値ある業績であると認められる。よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。