Graded Lie algebras and prehomogeneous vector spaces

佐々野, 詠淑

https://doi.org/10.15017/1441046

出版情報：九州大学, 2013, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

氏　　名：佐々野　詠淑

論文題目：Graded Lie algebras and prehomogeneous vector spaces
（次数付き Lie 代数と概均質ベクトル空間）
区　　分：甲

論　文　内　容　の　要　旨

複素数体上で定義された連結な有限次元代数群 G が有限次元ベクトル空間 V に作用し，その中に Zariski 位相で稠密な軌道が存在するとき，この群と表現の組を概均質ベクトル空間(prehomogeneous vector space, abbrev. PV)と呼ぶ．特に G が簡約可能であるとき，これを簡約可能概均質ベクトル空間とよび，さらにその中には放物型概均質ベクトル空間(PV of parabolic type)と呼ばれるクラスがある．これは H.Rubenthaler によって定義，分類された空間で，次数付き有限次元半単純 Lie 代数

$$\oplus_{n\in\mathbb{Z}} \quad d_n$$

に対し，d_0 の d_1 への adjoint 表現から得ることができる．逆の言い方をすれば，半単純 Lie 代数に埋め込むことのできる簡約可能 Lie 代数とその表現の組が与えられたとすると，そこから概均質ベクトル空間が得られ，そうして得られた空間を放物型概均質ベクトル空間と呼ぶ．これらの空間はルート系や Dynkin 図形などの半単純 Lie 代数の知識が応用できるため，非常に研究がしやすい．

さて，逆に概均質性などの条件は仮定せず，任意の簡約可能 Lie 代数及びその完全可約表現が与えられたとき，それらを埋め込むことができるような次数付き Lie 代数は存在するであろうか．本研究ではこの問いに対する考察を行い，肯定的な結果を得た．すなわち，本論文の主結果は以下の定理である．

定理　有限次元簡約可能 Lie 代数$\mathfrak{g}$，その有限次元完全可約表現(ρ, V)，及びその Lie 代数上の非退化対称不変二次形式 B_0 をとる．表現 ρ は忠実であり，V は$\mathfrak{g}$が 0-表現で作用するような非自明な部分空間は持たないと仮定してよい．このとき，同じく非退化対称不変二次形式 B を持つ次数付き Lie 代数

$$L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)=\oplus_{n\in\mathbb{Z}} \quad V_n$$

で、以下の条件:

- 部分 Lie 代数 V_0 とその V_1 への adjoint 表現が, Lie 代数$\mathfrak{g}$とその表現(ρ, V)に同型である,
- 二次形式 B の $V_0\times V_0$ への制限が B_0 に等しい,
- $[V_1, V_i]=V_{i+1}$, $[V_{-1}, V_{-i}]=V_{-i-1}$ $(i\geq 0)$,
- $[V_1, V_{-1}]=V_0$,
- B の $V_i\times V_{-i}$ への制限は非退化である.

を満たすものが同型をのぞいて唯一つ存在する. これを四つ組$(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$に付随する Lie 代数と呼ぶ.

本論文では，この定理を証明するために，まず第一章で$\mathfrak{g}$-加群の列 V_n $(n=0,\pm1,\cdots)$を構成する．第二章でこれら V_n たちの直和 $L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$に括弧積が定義され，それが Lie 代数の公理を満たすことを証明する．次に，第三章では，こうして得られた Lie 代数 $L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$上に非退化対称

不変二次形式を定義し，それがこの Lie 代数を特徴付けることを調べる．こうして上の定理が証明される．また，ループ代数や有限次元半単純 Lie 代数などの既知の Lie 代数が上記の方法で構成されることを示す．最後に第四章で概均質ベクトル空間に対する考察を行う．特に簡約可能代数群とその完全可約表現が与えられたとき，その Lie 代数と微分表現，及び非退化対称不変二次形式を使って概均質性の条件を記述する．また, Lie 代数の理論を用いて概均質ベクトル空間の裏返し変換についての別証明を与える．