

Monodromies of splitting families for degenerations of Riemann surfaces

奥田, 喬之

<https://doi.org/10.15017/1441045>

出版情報 : 九州大学, 2013, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 : 全文ファイル公表済

氏 名：奥田喬之

論文題目：Monodromies of splitting families for degenerations of Riemann surfaces
(リーマン面の退化に対する分裂族のモノドロミーについて)

区 分：甲

論 文 内 容 の 要 旨

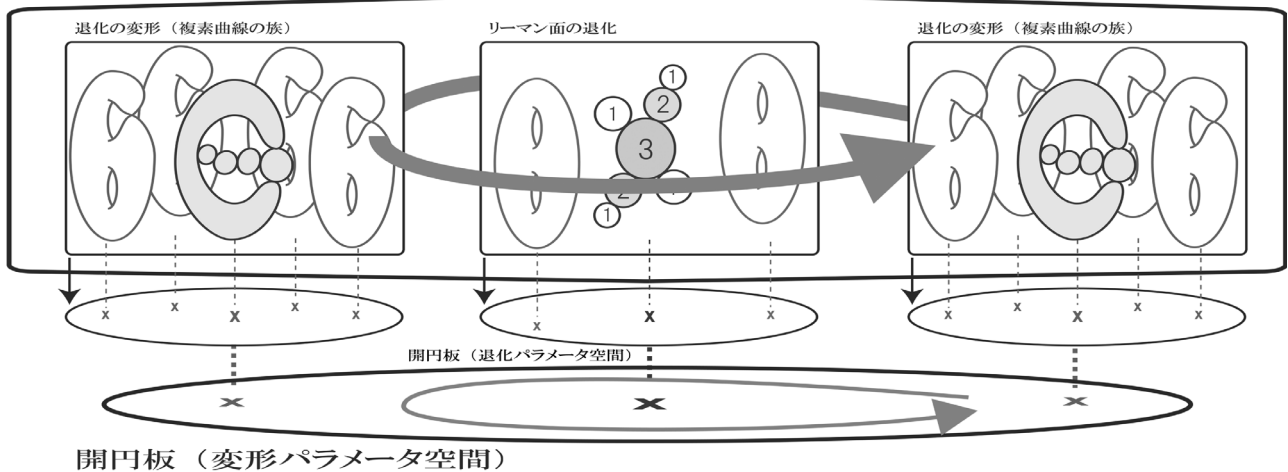
リーマン面の退化とは、開円板上の複素曲線の複素1パラメータ族であって、原点上にのみ特異点を含む複素曲線（特異ファイバー）を唯一つ許容し、その他は滑らかな複素曲線からなるものである。これは、小平による楕円曲後盛んに研究されてきた、特異点論、代数幾何、低次元トポロジー、複素解析が交錯する境界上に位置する対象である。一般種数のリーマン面の退化の位相的分類に関しては、松本・Montesinosによって、種数2以上のリーマン面の極小な退化の位相同値類と、向き付けられた実閉曲面の写像類群における負型擬周期的写像類の共役類とが位相モノドロミーを通して一対一に対応することが知られている。ここで、位相モノドロミーとは、退化パラメータ空間の基点上の一般ファイバーをリーマン面の下位空間である向き付けられた実閉曲面とみなし、その写像類であって退化パラメータ空間から原点を除いた穴あき円板の基本群の作用から誘導されるものである。つまり位相モノドロミーは、一般ファイバーが特異ファイバーの周りを一周して元の位置に戻ってきたときにどう変化しているかを表している。

一方、こうしたリーマン面の退化を考察する一つの方針として、原子ファイバーと呼ばれる、複素曲線族の変形のもとで安定な特異ファイバーを分類するというものがある。開円板上の“複素曲線族の複素1パラメータ族”であって、原点上の複素曲線族が与えられたリーマン面の退化と一致するものをリーマン面の退化に対する変形族と呼び（つまり変形族自体は複素曲線の族としては退化方向と変形方向との複素2パラメータ族となっている）、さらに原点以外の点に対応する複素曲線族が複数の特異ファイバーを持つようなものを分裂族と呼ぶ。こうした分裂族を持たない（それ以上分裂できない）特異ファイバーを原子ファイバーと呼ぶのである。

本論文の一つ目の目標は、リーマン面の退化の位相的分類で有効であった位相モノドロミーの類似として、リーマン面の退化に対する“分裂族の位相モノドロミー”を導入することである。これは、分裂族の位相同値類の研究やリーマン面の複素2パラメータ退化族の位相的分類の研究に大きな役割を果たすと期待される。

まず、変形パラメータ空間の基点上の一般の複素曲線族（つまり特異ファイバーを複数持つ複素曲線族）を一つとり、そのファイバーを保つ写像類群を定義する。次に、変形パラメータ空間内にその基点を通り原点の周りを反時計回りに一周する単純閉曲線を取り、その上のベクトル場を、単純閉曲線上の円板束（開輪環体）と複素曲面束（全空間内の実5次元多様体）とに持ち上げる。このとき、特異値は特異値へ、及び特異ファイバーは特異ファイバーへ流すようなフローを取ることによって、一般複素曲線族の自己同相写像対が得られる。これに対応する写像類を分裂族の位相モノドロミーとして定義するのである。さらに、その全空間の自己同相写像を特異ファイバーの和集合へ制限すると、いくつかの特異ファイバーの組ごとに巡回置換として作用しており、そうした各組へさらに制限して得られる自己同相写像の組をモノドロミー組と定義する。

複素3次元多様体



二つ目の目標は、特に“はがし変形族”と呼ばれる分裂族に対するモノドロミー組について考察することである。はがし変形族とは、高村によって構築されたリーマン面の退化の変形理論に基づいた構成法により得られる分裂族である。与えられたリーマン面の退化に対して、その特異ファイバーが **simple crust** と呼ばれるある条件を満たす部分因子を含むならば、それに対応するはがし変形族が存在することが知られており、この変形の下で、元々の特異ファイバーはその一部分がはがし取られるようにしてより痩せ細った（重複度の低い）特異ファイバーへと変形する。変形後のこの特異ファイバーを主ファイバーと呼び、そのうちはがれて新たに現れた既約成分を剥離成分、それ以外の既約成分を安定成分と呼ぶ。また、この変形によって主ファイバーの他に現れる特異ファイバーを付随ファイバーと呼ぶ。

本論文では、**tame simple crust** に対応するはがし変形族（特異ファイバーのリーマン面鎖を切らない変形族）のモノドロミー組に対し、次の結果を得た。

- (1) 輪環体内の特異値集合のなす **closed braid** の結び目成分のうち、主ファイバーに対応するものは自明な結び目、付随ファイバーに対応するものはトーラス結び目である。
- (2) 主ファイバーのモノドロミー写像の安定成分への制限は、恒等写像とアイソトピックである。
- (3) 主ファイバーのモノドロミー写像の剥離成分への制限は、各剥離成分を巡回置換し、その有限冪を各剥離成分に制限すると負型擬周期写像とアイソトピックになる。

特に(3)から、一般の分裂族の位相モノドロミー（モノドロミー組）に対しても松本・Montesinosの定理の類似が成り立つことが期待される。

(1) は、はがし変形族の特異値集合の具体的な表示から容易に得られる。(2)(3) は以下のようにして示される。変形族における各複素曲線族は変形パラメータを固定することによって得られる。同様にして、退化パラメータを固定することにより複素曲面から変形パラメータ空間への写像が定義されるが、この複素曲面は必ずしも滑らかな複素曲面へ制限することによって、安定成分を一般ファイバーに持つ自明な退化や、剥離成分（に有限個穴をあけたもの）を一般ファイバーに持ち **tame simple crust** を **modify** して得られる因子（に有限個穴をあけたもの）を特異ファイバーに持つ退化を構成することができる。これらの位相モノドロミーがモノドロミー写像の各々の成分への制限に対応しており、あとは松本・Montesinosの定理により主張が示される。

またこの研究成果の応用として、次の注目すべき例が得られている。即ち、一つのリーマン面の退化に対する二つの分裂族であって、一見同じ分裂型である（分裂して現れる特異ファイバー達の位相型が両者で一致する）ものの、分裂族としては異なる位相モノドロミーを持つものが存在する。