

## New sufficient conditions for recovery in compressed sensing

井上, 寛

<https://doi.org/10.15017/1441043>

---

出版情報 : 九州大学, 2013, 博士 (機能数理学), 課程博士  
バージョン :  
権利関係 : 全文ファイル公表済

## 論文審査の結果の要旨

本論文が研究テーマとして扱っているのは圧縮センシング (Compressed Sensing, CS) である。圧縮センシングは、ほとんどの成分が 0 であるスパースなベクトルの線形変換、例えば信号データを圧縮したものが観測されたとき、元のベクトルを復元・推定するための手法であり、適当な成分を 0 と推定するためにベクトルの L1 ノルムを利用するところが古典的な統計手法と異なる。Candes and Tao (2008) は、その線形変換が RIP (Restricted Isometry Property) と呼ばれる条件を満たしていれば、スパースな原ベクトルと復元されたベクトルの差はノイズの大きさの定数倍で抑えられることを示した。以降ここでは簡単のため、圧縮センシングによって復元されたベクトルを CS 解、CS 解に対して得られる上述の誤差評価に関する結果を CS 解の基本性質と呼ぶことにする。圧縮センシングは主に画像復元・信号復元の方法として工学の分野で大きな注目を浴び、Candes and Tao (2008) は 2008 年の IEEE の論文賞を受賞している。この機械学習・統計科学におけるホットトピックに対し、本論文は「CS 解の基本性質のための十分条件の緩和」「weak RIP のもとでの CS 解の基本性質の立証」「weak RIP に対するある十分条件の導出」を主結果として与えている。

「CS 解の基本性質のための十分条件の緩和」は *British Journal of Mathematics & Computer Science* に 2014 年に申請者が発表した内容である。まず、*restrictedly invertible* という RIP より弱い条件を定義し、そのもとで CS 解の基本性質を導いている。ベクトルの次元が高いとき、線形変換が RIP を満たすかどうかは実は確率を伴った形でしか記述されておらず、圧縮センシングによる結果は「CS 解はある確率で基本性質を有する」という表現で記述されるのが通常である。この条件緩和により、その確率として既存の値より大きなものを与えられたことになり、よって圧縮センシングの理論保証を強めることができたといえる。また、導かれた基本性質に現れる定数は、既存のものとは異なるものであり、場合によっては既存の定数を改良することが示されている。定数の改良はこの分野ではそれほど重要視されていないが、導出の際に用いられるテクニックには既存技法の組み合わせでは得られない新しいものがある。それは異なる問題設定においても適用可能であり、テクニックそのものに価値がある。

「weak RIP のもとでの CS 解の基本性質の立証」は *Journal of Mathematics for Industry* に 2013 年に申請者が発表した内容である。weak RIP は Candes and Plan (2010) が導入した RIP を弱めた条件であり、そこでは CS 解と非常によく似た LASSO 解と呼ばれる推定ベクトルに対して基本性質が示されている。本内容では、この weak RIP という条件のもとで CS 解に対する基本性質が示されており、上述の一つ目の結果と同様、圧縮センシングの理論保証の強化に貢献している。LASSO 解と CS 解はデータが値として与えられたときは同一視できるものであるが、データを確率変数とみたときは同一視できない。つまり CS 解の誤差評価は LASSO 解の誤差評価と異なるものになる。圧縮センシングの文脈で LASSO 解の基本性質を導いている Candes and Plan (2010) に対し、既存研究からの流れを考えると本内容の方がより忠実に圧縮センシングの誤差評価を行っているといえる。

「weak RIP に対するある十分条件の導出」は *British Journal of Mathematics &*

Computer Science に 2014 年に受理された内容である。スパースなベクトルのどの成分が 0 になっているかがわかっているとき、つまりスパース性の位置に関する情報があるときの weak RIP に対し、それを満たす線形変換の例を与えやすくなるような十分条件が得られている。ベクトルのどこがスパースかわかっているのであれば L1 ノルムを利用して適当な成分を 0 と推定する圧縮センシングを用いる必要はないわけだが、この結果の応用上の価値は今後高まっていくと期待される。また、今後 RIP に代わる基本条件となりうる重要な概念である weak RIP に対し、その性質・特徴を捉えて解明していくことは重要であり、その意味で本結果は価値を有する。

上記三つの主結果以外には「RIPless theory for compressed sensing」というタイトルで投稿中の内容があり、本論文においては副結果としてまとめられている。いずれの結果もほぼ独力で導かれており、実際に掲載・受理・投稿された論文はすべて単著である。圧縮センシングは指導教員が専門とする古典的な統計学とは異なるコミュニティで発展しており、問題を見つけるところから申請者が行っているといつてよい。その他特記すべきこととしては、博士 2 年時に行われた富士通研究所でのインターンシップにおける成果が挙げられる。ある非線形回帰問題に対して圧縮センシングの亜種といえる手法を適用し、富士通研究所から高い評価を受けている。これについては、数学分野と産業界を結びつける繋ぎ役としての役割を期待される機能数理学博士としての資質を、申請者が有することも意味する。

以上より、本論文の結果は、機械学習・統計科学の分野、特に圧縮センシングという復元・推定の方法論において価値ある業績である。よって申請者を博士（機能数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。