New sufficient conditions for recovery in compressed sensing

井上, 寛

https://doi.org/10.15017/1441043

出版情報：九州大学, 2013, 博士（機能数理学）, 課程博士
バージョン：

氏　　名：井上　寛

論文題目：New sufficient conditions for recovery in compressed sensing
（圧縮センシングに関する復元のための新しい十分条件に関する研究）

区　　分：甲

論　文　内　容　の　要　旨

近年，計算機技術の高度な発展と利用環境の飛躍的な向上により，専門的にも汎用的にも有用なモデリング手法が提案されている．特に，統計学，機械学習，パターン認識や信号処理の分野で，疎表現に注目した情報処理の方法論が提案されている．それらの手法の研究の中で，生命・脳科学，地球・惑星科学と個別差のある具体的な対象の解明を目指す研究領域からも高い関心が寄せられている．その手法の１つとして compressed sensing；圧縮センシング(Candes, 2006; Donoho, 2006)がある．Compressed sensing (CS)は，圧縮された信号データをできるだけ少ない情報で，できるだけ原信号データの情報を失うことなく復元する手法であり，デジタルカメラや核磁気共鳴画像法(magnetic resonance imaging; MRI)などのような画像解析の分野に応用されており，その有効性が報告されている．CS のモデルは$y = Ax + z$ ($y \in R^m$: 圧縮データ，A: $m \times n$ 行列($m \ll n$)，$x \in R^n$: 原信号，$z \in R^m$: 誤差項)であり，CS 解x^* を求める最適化問題は「$\min||x||_1$ subject to $||z||_2 = ||y - Ax||_2 \le \varepsilon$」である．

CS を用いる際，圧縮行列A に課せられる条件 restricted isometry property; RIP という考え方が非常に重要になる．ここで，A がオーダーs の RIP に従うとは，すべてのs-スパースベクトルに対して$(1-\delta)||x||_2^2 \le ||Ax||_2^2 \le (1+\delta)||x||_2^2$ を満たすある定数δ $(0 < \delta < 1)$ が存在することである．(s-スパースベクトルとは，s 個以下の非ゼロ成分からなるベクトルであり，上記の条件を満たす最小のδ を restricted isometry constant といい，δ_s と書くこととする)．この考え方をもとに多くの研究者が CS 解の理論保証を行っており，$||x - x^*||_2 \le C_0||x - x_s||_1 + C_1\varepsilon$（ここで，$C_0$，$C_1$は定数，$x_s$ はxから絶対値の大きい順にs 個取り，その他を0 としたベクトル）を示している．しかし，圧縮行列A が RIP を満たすかどうかの確認には大変な計算が必要であり，現実にそのような圧縮行列A の構成は難しいと言われている．ここで，Candes and Plan(2010)は RIP の条件を緩めた weak RIP を提案している．

本論文では，RIP の条件の緩和を考え，緩めた条件のもとで CS 解の理論保証ができるかどうかを調べ，4 つの結果を得た．

1 つ目の結果は，圧縮行列A の列ベクトルの中から任意にs個取ったベクトルが一次独立であると仮定する．これだけでは圧縮行列A はオーダーs の RIP を満足しない．ここで，s-restricted norm; r_s を定義し，圧縮行列のリスケールを考える．その時，リスケールされた圧縮行列$\tilde{A} := A/r_s$ は RIP を満たす．リスケールする手法では，リスケールされた圧縮行列$\tilde{A} := A/r_s$ をもとに CS 解の理論保証を満たすための十分条件$\tilde{\delta_s} < 0.472$ または$\widetilde{\delta_{2s}} < 0.661$ とそれに対する CS 解の誤差評価を導出している．また，Cai and Zhang (2013)の結果を適用し，十分条件$\tilde{\delta_s} < 0.5$ または$\widetilde{\delta_{2s}} < 0.828$ とそれ

に対する CS 解の誤差評価を得ることができる．最初に書いた方の十分条件は Cai and Zhang (2013)の結果に適用した場合の十分条件に負けているが，$\tilde{\delta}$ の小さい場合，より精密な誤差評価を得ることができる．

2 つ目の結果は，weak RIP のもとで CS 解の理論保証を行っており，理論保証を満たすための十分条件$\delta_{T_0,r} < 1/1 + \sqrt{2s/[r/2]}$ とそれに対しての CS 解の誤差評価を導出している．また，この結果は RIP を満たす場合の Candes（2008)の結果と同様のものとなっている．既存結果として Candes and Plan (2010)は RIP の条件を緩めた weak RIP のもとで LASSO 解（Tibshirani, 1996)の誤差評価を行っている．ここで，LASSO は，2 乗和誤差関数に係数パラメータに関する絶対値の和のl_1 罰則を課す手法である．

3 つ目の結果では，どのような条件で圧縮行列が weak RIP を満たすかを調べた．具体的には，T_0を$\{1,2,\cdots,n\}$ の部分集合とし，$|T_0| = s$ とする．このT_0に対して，$0 < {}^{\exists}\delta < 1;\ (1-\delta)||x||_2^2 \leq ||A_{T_0}x||_2^2 \leq (1+\delta)||x||_2^2,\ \mathrm{supp}\ x \subset T_0$ を仮定し，これを満たすδ の最小値を$\delta(T_0)$ とする．T_0^c に対して，$A_{T_0^c}$ がオーダーr の RIP に従うとする．この restricted isometry constants を$\delta_r(T_0^c)$ とする．また，T_0 とT_0^c に対しての相関関係を表す値を$\mu_{T_0,r}$ とする．そして圧縮行列Aを特徴づける 3 つの値 $\delta(T_0)$，$\delta_r(T_0^c)$，$\mu_{T_0,r}$を用い，$\theta_{T_0,r} := \max(\delta(T_0),\ \delta_r(T_0^c),\ \mu_{T_0,r})$ とおく．このとき$\theta_{T_0,r} < 1/2$ ならば，圧縮行列A は weak RIP を満たすことを示すことができる．また，理論保証を満たすための十分条件として$2\theta_{T_0,r} + \sqrt{5s/2r}\theta_{T_0,r} < 1$ を得ることができ，そのもとで CS 解の誤差評価を導出している．ここで，weak RIP を満たす最も簡単な例として，(i) $\{a_i; i \in T_0\}$ が互いに正規直交，(ii) $\{a_i;\ i \in T_0^c\}$ から任意に取ったr 個取ったベクトルが一次独立，(iii) $\{a_i; i \in T_0\}$ と$\{a_i;\ i \in T_0^c\}$ は直交，という 3 つの仮定を満たす行列は容易に作ることができる．この時，$\delta(T_0) = 0$，$\mu_{T_0,r} = 0$ となることから，$\theta_{T_0,r} = \delta_r(T_0^c)$ となることがわかる．ここで，(ii) を満たす$A_{T_0^c}$ は RIP を満たすとは言えないが，1 つ目の結果を用い，リスケールすることにより RIP を満たすようにする．よって，$\delta_r(T_0^c)$のみで CS 解を評価することができる．上記で挙げた例は最も簡単な例だが，weak RIP を満たす圧縮行列を構成する場合，$\theta_{T_0,r}$ を考えることにより多くの weak RIP を満たす行列を構成できることを示唆している．ただし，通常T_0 に関しては未知であるので，実データ解析での実用性にはまだ欠けており，今後の課題となっている．

4 つ目の結果では，RIP や weak RIP を仮定することなく，CS 解の理論保証を満たすための十分条件と CS 解の誤差評価を導出している．