

## New sufficient conditions for recovery in compressed sensing

井上, 寛

<https://doi.org/10.15017/1441043>

---

出版情報：九州大学, 2013, 博士（機能数理学）, 課程博士  
バージョン：  
権利関係：全文ファイル公表済

氏 名：井上 寛

論文題目：New sufficient conditions for recovery in compressed sensing  
(圧縮センシングに関する復元のための新しい十分条件に関する研究)

区 分：甲

## 論 文 内 容 の 要 旨

近年、計算機技術の高度な発展と利用環境の飛躍的な向上により、専門的にも汎用的にも有用なモデリング手法が提案されている。特に、統計学、機械学習、パターン認識や信号処理の分野で、疎表現に注目した情報処理の方法論が提案されている。それらの手法の研究の中で、生命・脳科学、地球・惑星科学と個別差のある具体的な対象の解明を目指す研究領域からも高い関心が寄せられている。その手法の1つとして compressed sensing ; 圧縮センシング(Candes, 2006; Donoho, 2006)がある。Compressed sensing (CS)は、圧縮された信号データをできるだけ少ない情報で、できるだけ原信号データの情報を失うことなく復元する手法であり、デジタルカメラや核磁気共鳴画像法(magnetic resonance imaging; MRI)などのような画像解析の分野に応用されており、その有効性が報告されている。CSのモデルは $y = Ax + z$  ( $y \in R^m$ : 圧縮データ,  $A: m \times n$  行列( $m \ll n$ ),  $x \in R^n$ : 原信号,  $z \in R^m$ : 誤差項)であり、CS解 $x^*$ を求める最適化問題は「 $\min \|x\|_1$  subject to  $\|z\|_2 = \|y - Ax\|_2 \leq \varepsilon$ 」である。

CSを用いる際、圧縮行列 $A$ に課せられる条件 restricted isometry property; RIP という考え方が非常に重要になる。ここで、 $A$ がオーダー $s$ のRIPに従うとは、すべての $s$ -スパースベクトルに対して $(1 - \delta)\|x\|_2^2 \leq \|Ax\|_2^2 \leq (1 + \delta)\|x\|_2^2$ を満たすある定数 $\delta$  ( $0 < \delta < 1$ )が存在することである。 $(s$ -スパースベクトルとは、 $s$ 個以下の非ゼロ成分からなるベクトルであり、上記の条件を満たす最小の $\delta$ を restricted isometry constant といい、 $\delta_s$ と書くこととする)。この考え方をもとに多くの研究者がCS解の理論保証を行っており、 $\|x - x^*\|_2 \leq C_0 \|x - x_s\|_1 + C_1 \varepsilon$  (ここで、 $C_0, C_1$ は定数、 $x_s$ は $x$ から絶対値の大きい順に $s$ 個取り、その他を0としたベクトル)を示している。しかし、圧縮行列 $A$ がRIPを満たすかどうかの確認には大変な計算が必要であり、現実にそのような圧縮行列 $A$ の構成は難しいと言われている。ここで、Candes and Plan(2010)はRIPの条件を緩めた weak RIPを提案している。

本論文では、RIPの条件の緩和を考え、緩めた条件のもとでCS解の理論保証ができるかどうかを調べ、4つの結果を得た。

1つ目の結果は、圧縮行列 $A$ の列ベクトルの中から任意に $s$ 個取ったベクトルが一次独立であると仮定する。これだけでは圧縮行列 $A$ はオーダー $s$ のRIPを満足しない。ここで、 $s$ -restricted norm;  $r_s$ を定義し、圧縮行列のリスケールを考える。その時、リスケールされた圧縮行列 $\tilde{A} := A/r_s$ はRIPを満たす。リスケールする手法では、リスケールされた圧縮行列 $\tilde{A} := A/r_s$ をもとにCS解の理論保証を満たすための十分条件 $\tilde{\delta}_s < 0.472$  または $\tilde{\delta}_{2s} < 0.661$  とそれに対するCS解の誤差評価を導出している。また、Cai and Zhang (2013)の結果を適用し、十分条件 $\tilde{\delta}_s < 0.5$  または $\tilde{\delta}_{2s} < 0.828$  とそれ

に対する CS 解の誤差評価を得ることができる。最初に書いた方の十分条件は Cai and Zhang (2013)の結果に適用した場合の十分条件に負けているが、 $\delta$  の小さい場合、より精密な誤差評価を得ることができる。

2つ目の結果は、weak RIP のもとで CS 解の理論保証を行っており、理論保証を満たすための十分条件  $\delta_{T_0,r} < 1/1 + \sqrt{2s/[r/2]}$  とそれに対する CS 解の誤差評価を導出している。また、この結果は RIP を満たす場合の Candes (2008)の結果と同様のもとなっている。既存結果として Candes and Plan (2010)は RIP の条件を緩めた weak RIP のもとで LASSO 解 (Tibshirani, 1996)の誤差評価を行っている。ここで、LASSO は、2乗和誤差関数に係数パラメータに関する絶対値の和の  $l_1$  罰則を課す手法である。

3つ目の結果では、どのような条件で圧縮行列が weak RIP を満たすかを調べた。具体的には、 $T_0$  を  $\{1,2,\dots,n\}$  の部分集合とし、 $|T_0|=s$  とする。この  $T_0$  に対して、 $0 < \delta < 1$ ;  $(1-\delta)\|x\|_2^2 \leq \|A_{T_0}x\|_2^2 \leq (1+\delta)\|x\|_2^2$ ,  $\text{supp } x \subset T_0$  を仮定し、これを満たす  $\delta$  の最小値を  $\delta(T_0)$  とする。 $T_0^c$  に対して、 $A_{T_0^c}$  がオーダー  $r$  の RIP に従うとする。この restricted isometry constants を  $\delta_r(T_0^c)$  とする。また、 $T_0$  と  $T_0^c$  に対しての相関関係を表す値を  $\mu_{T_0,r}$  とする。そして圧縮行列  $A$  を特徴づける 3つの値  $\delta(T_0)$ ,  $\delta_r(T_0^c)$ ,  $\mu_{T_0,r}$  を用い、 $\theta_{T_0,r} := \max(\delta(T_0), \delta_r(T_0^c), \mu_{T_0,r})$  とおく。このとき  $\theta_{T_0,r} < 1/2$  ならば、圧縮行列  $A$  は weak RIP を満たすことを示すことができる。また、理論保証を満たすための十分条件として  $2\theta_{T_0,r} + \sqrt{5s/2r}\theta_{T_0,r} < 1$  を得ることができ、そのもとで CS 解の誤差評価を導出している。ここで、weak RIP を満たす最も簡単な例として、(i)  $\{a_i; i \in T_0\}$  が互いに正規直交、(ii)  $\{a_i; i \in T_0^c\}$  から任意に取った  $r$  個取ったベクトルが一次独立、(iii)  $\{a_i; i \in T_0\}$  と  $\{a_i; i \in T_0^c\}$  は直交、という 3つの仮定を満たす行列は容易に作ることができる。この時、 $\delta(T_0) = 0$ ,  $\mu_{T_0,r} = 0$  となることから、 $\theta_{T_0,r} = \delta_r(T_0^c)$  となることがわかる。ここで、(ii) を満たす  $A_{T_0^c}$  は RIP を満たすとは言えないが、1つ目の結果を用い、リスケールすることにより RIP を満たすようにする。よって、 $\delta_r(T_0^c)$  のみで CS 解を評価することができる。上記で挙げた例は最も簡単な例だが、weak RIP を満たす圧縮行列を構成する場合、 $\theta_{T_0,r}$  を考えることにより多くの weak RIP を満たす行列を構成できることを示唆している。ただし、通常  $T_0$  に関しては未知であるので、実データ解析での実用性にはまだ欠けており、今後の課題となっている。

4つ目の結果では、RIP や weak RIP を仮定することなく、CS 解の理論保証を満たすための十分条件と CS 解の誤差評価を導出している。