q-determinantの最小化

照本, 直敏
九州大学数理学府 : 修士

https://hdl.handle.net/2324/1434353

出版情報：COE Lecture Note. 48, pp.85-92, 2013-03-28. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
バージョン：
権利関係：

q-determinantの最小化

九州大学　数理学府修士課程1年
照本直敏
2013年1月26日　組合せ数学セミナー

定義(q-determinant)

$q \in \mathbb{R},\ A = (a_{ij})$: n次正方行列に対し，次のqの多項式を考える

$$q\text{-}\det A := \sum_{\sigma \in S_n} q^{\iota(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

ただし，$\iota(\sigma) := \#\{1 \leq i < j \leq n; \sigma(i) > \sigma(j)\}$
転倒数 (inversion number) という

- $q = -1$のとき　$q\text{-}detA = detA$
- $q = 0$のとき　$q\text{-}detA = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$
- $q = 1$のとき　$q\text{-}detA = perA = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$

例(n=3)

- $\iota(\sigma)=\#\{1 \le i < j \le 3; \sigma(i) > \sigma(j)\}$

σ	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
$\iota(\sigma)$	0	1	3	1	2	2

したがって，

$$
\begin{aligned}
q\text{-}\det A &= \sum_{\sigma \in S_3} q^{\iota(\sigma)} \prod_{i=1}^{3} a_{i\sigma(i)} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + q a_{12}a_{21}a_{33} + q^3 a_{13}a_{22}a_{31} \\
&\quad + q a_{11}a_{23}a_{32} + q^2 a_{12}a_{23}a_{31} + q^2 a_{13}a_{21}a_{32} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + q(a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}) \\
&\quad + q^2(a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) + q^3 a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}
$$

問題設定

q-detは次の性質をもっている．

① Bozejko & Speicher (1991)
$-1 \le q \le 1$ のとき，Aが半正定値なら $q\text{-}\det A \ge 0$

<u>研究の目的</u>

$q \in \mathbb{R}$ に対して，

$\lambda_n(q) := \min\{q\text{-}\det A \mid A: n$次半正定値，$A_{ii} = 1\}$

を求めたい．

研究の結果

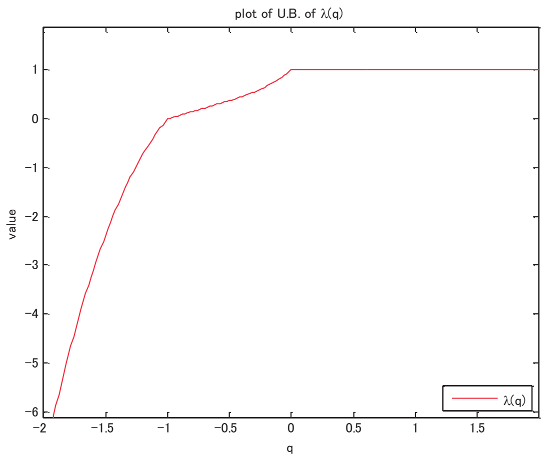
結果

$$\lambda_3(q) \le \begin{cases} \dfrac{1}{(1+q)(1+q+q^2)} & 0 \le q \\ \dfrac{3}{4}(1+q) & -\dfrac{1}{2} \le q \le 0 \\ 1+q^3 & -1 \le q \le -\dfrac{1}{2} \\ & q \le -1 \end{cases}$$

研究の結果

予想

$\lambda_n(q)$は前頁の関係が等号で成立することが予想される．
また，グラフから連続性及び単調性が期待できる．



研究の手法

- $\lambda_n(q)$ をq 毎に求めたい．
  ⇒ 最小化問題は難しい（非凸のため）
- 最適化手法を使って，求めたい $\lambda_n(q)$の下界を与えるような最適化関数 $\mu_n(q)$ を構成し計算する．
- $\mu_n(q) \leq \lambda_n(q)$ の gap が 0 あるいは小さくなるような最適化問題を作りたい．
  ⇒ 半正定値計画緩和（SDP緩和）

SDP緩和

SDP

$$\min_{y} \left\{ \mathrm{b}^T \mathrm{y} \mid \mathrm{C} + \sum_{j=1}^{m} A_j\, y_j \ : N\text{次半正定値} \right\}$$

ただし，$b, y \in \mathbb{R}^m$，　C, A_j: N次実対称行列

- SDPは凸性を有している
  ⇒比較的容易に解けるうえ，ソフトウェアも充実している．
- $\lambda_n(q)$ からSDPを作る．（SDP緩和）
- この手法を用いると　“（SDPの最適値）$\leq \lambda_n(q)$”が保証される

SDP緩和の例(n=2,r=2)

- $A_2[x] = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$, $q\text{-}\det A_2[x] = 1 + qx^2$, $M_1[x] = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix}$

$$\lambda_2(q) = \{1 + qx^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \geq O\} = \{1 + qx^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \geq O\}$$

$$= \{1 + qx^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & x & x & x^2 \\ x & 1 & x^2 & x \\ x & x^2 & x^2 & x^3 \\ x^2 & x & x^3 & x^2 \end{pmatrix} \geq O\}$$

$$\leftarrow \begin{cases} x \to y_1 \\ x^2 \to y_2 \\ x^3 \to y_3 \end{cases}$$

$$\geq \{1 + qy_2 \mid \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_1 & y_2 \\ y_1 & 1 & y_2 & y_1 \\ y_1 & y_2 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_1 & y_3 & y_2 \end{pmatrix} \geq O\} \ (= \mu_{2,2}(q)) \leftarrow \text{SDP}$$

たとえば，本来 $x^2 = x \cdot x \ (y_2 = {y_1}^2)$ であるが，
半正定値性条件 $y_2 \geq {y_1}^2$ に制約が緩和されている．

SDPのつくり方 I

- $u_{r-1}[\mathrm{x}] \coloneqq (1, x_1, x_2, x_3, {x_1}^2, x_1x_2, \ldots, {x_3}^{r-1})^T$
- $M_{r-1}[\mathrm{x}] \coloneqq u_{r-1}[\mathrm{x}]u_{r-1}[\mathrm{x}]^T$ (rank 1 行列)

<u>性質</u> $A_n[\mathrm{x}]$: 半正定値 $\Longleftrightarrow$ $M_{r-1}[\mathrm{x}] \otimes A_n[\mathrm{x}]$: 半正定値

$$\min \{q\text{-}\det A \mid M_{r-1}[\mathrm{x}] \otimes A_n[\mathrm{x}]: \text{半正定値}\}$$

は $\lambda_n(q) = \min\{q\text{-}\det A \mid A: n\text{次半正定値}\}$ と等価．

SDPのつくり方 II

- $\lambda_n(q) = \min\{q\text{-}detA_n[\mathrm{x}] \mid M_{r-1}[\mathrm{x}] \otimes A_n[\mathrm{x}]$: 半正定値 $\}$
  は，x に関する多項式の最小化問題である．
  （制約条件は行列の各要素が x の多項式）

ここで，$y_\alpha := \mathrm{x}^\alpha$　とおくと，
$\min\{(y_\alpha$の線形関数$)\mid y_\alpha$に関する半正定値条件$\}$ $(\le \lambda_n(q))$
⇒ SDPになっている

y_αの決め方から，たとえば
$y_{22} = y_{20}y_{02}(x_1{}^2x_2{}^2 = x_1{}^2 \cdot x_2{}^2)$は成立しなくてもよい
⇒　条件が緩くなっている
⇒　$\lambda_n(q)$の下界値 が得られる．

SDP緩和の注意

- r を大きくすると良い下界値が得られる．すなわち，

$$\mu_{n,r}(q) \le \mu_{n,r+1}(q) \le \lambda_n(q) \qquad ({}^\forall r\,,{}^\forall q)$$

  ⇒ できるだけ大きい r でSDPを作って解きたい．

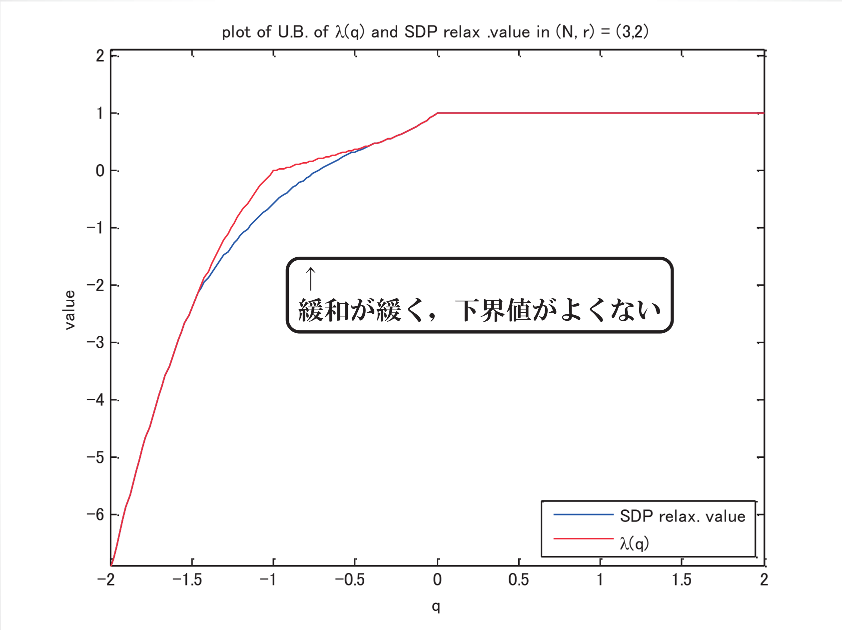
- しかし，r が大きいとSDPがスパコンでも解けない大規模になる．

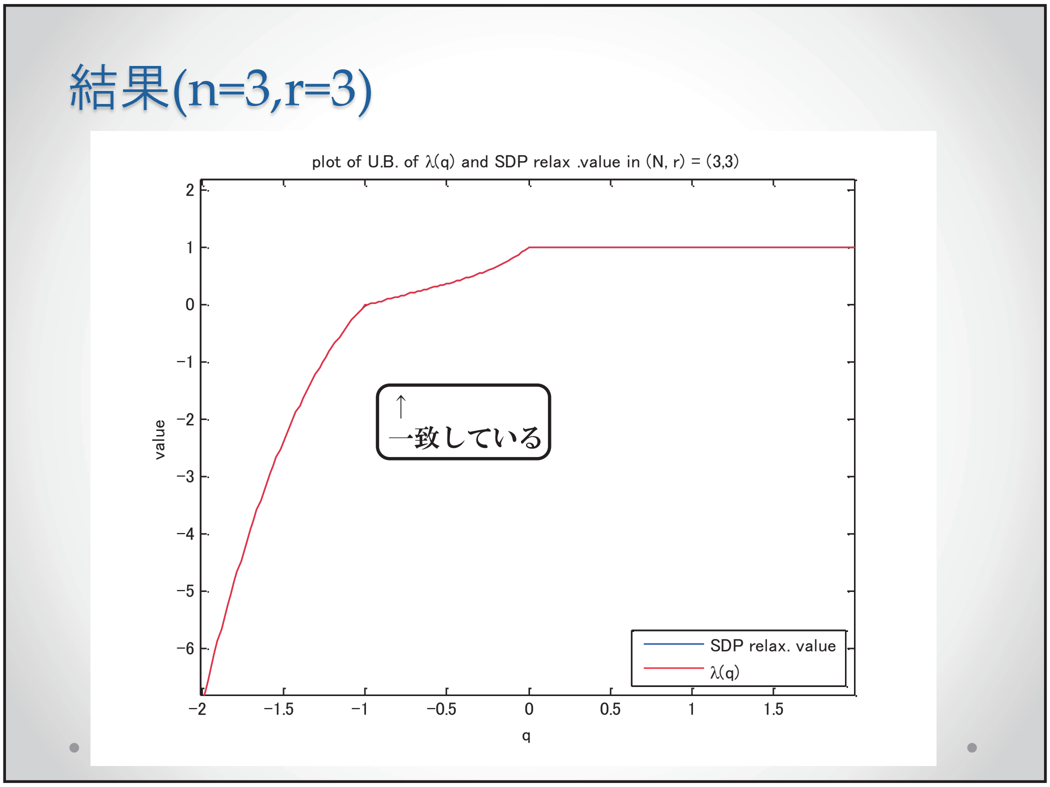
- 実用上は r = 2 , 3 で充分よい下界値が得られる．

プログラムの概要

- 入力　n：行列$A_n[x]$のサイズ
  　　　r：relaxOrder（u_{r-1}の次数）
- 出力　$-2 \le q \le 2$における $\mu_{n,r}(q)$ のグラフ

結果(n=3,r=2)




結果(n=3,r=3)
plot of U.B. of λ(q) and SDP relax .value in (N, r) = (3,3)
value
q
↑
一致している
SDP relax. value
λ(q)