最小消去多項式候補を用いた行列の一般固有空間の構造の計算法について

小原, 功任
金沢大学理工

田島, 慎一
筑波大学数理物質系

出版情報：COE Lecture Note. 49, pp.113-118, 2013-08-09. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

セッション７
Session 7

線形代数，代数方程式
Linear algebra and algebraic equations

最小消去多項式候補を用いた行列の一般固有空間の構造の計算法について
On determining the structure of the invariant space of matrices via pseudo-annihilating polynomials.

小原功任 KATSUYOSHI OHARA 金沢大学・理工*

田島慎一 SHINICHI TAJIMA 筑波大学・数理物質†

Abstract

The theory of the invariant space and Jordan canonical form of square matrices is well-known in linear algebra. However, the famous method for computing Jordan canonical forms is not efficient in computer algebra systems. In recent studies, we showed that fast algorithms in computer linear algebra can be given via minimal annihilating polynomials. In this paper, new method is developed for determining "the structure of the invariant space" via minimal and pseudo-annihilating polynomials.

1 はじめに

体 $K=\mathbf{Q}$ 上の n 次正方行列 A を考えよう．いま，行列 A のある固有値 λ に注目する．λ の定義多項式 $f(x)$ は行列 A の特性多項式 $\chi_A(x)$ の既約因子となっている．体 K を代数拡大して，A をジョルダン標準形で表したとすれば，固有値 λ に対応するジョルダン細胞が，

$$J_{k_1}(\lambda) \text{ が } n_1 \text{ 個}, J_{k_2}(\lambda) \text{ が } n_2 \text{ 個}, \cdots, J_{k_m}(\lambda) \text{ が } n_m \text{ 個}, \quad (k_1>k_2>\cdots>k_m\geq 1)$$

と現れるはずである ($J_k(\lambda)$ は固有値 λ に関する，大きさ k のジョルダン細胞を表す)．われわれが知りたい情報はジョルダン細胞の大きさと個数の列 $(k_1,n_1),\cdots,(k_m,n_m)$ である．これを本稿では "一般固有空間の構造" と呼ぶことにする．本研究の目的は，行列 A の一般固有空間の構造を具体的に決定するためのアルゴリズムを与えることである．

よく知られているように，線形代数学では，行列の相似変形によってジョルダン標準形 (またはジョルダン細胞) が得ることできる．しかしながら，相似変形によってジョルダン細胞を得るのは，計算量的には効率がよいとは言えない．本研究では，変形理論によらずに一般固有空間の構造を決定することを論じる．

2 最小消去多項式とその候補

正方行列 A の最小多項式 $\pi_A(x)$ は，どのような列ベクトル $\boldsymbol{u}\in K^n$ に対しても，$\pi_A(A)\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$ を満たす．逆に，ある列ベクトル $\boldsymbol{u}\in K^n$ が与えられたとき，$h(A)\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$ となる次数最小のモニック多項式

*ohara@air.s.kanazawa-u.ac.jp

†tajima@math.tsukuba.ac.jp

$h(x) \in K[x]$ をベクトル $\boldsymbol{u}$ に関する A の最小消去多項式と呼び，$\pi_{A,\boldsymbol{u}}(x)$ で表わす．$\pi_{A,\boldsymbol{u}}(x)$ は A の最小多項式 $\pi_A(x)$ を割り切る．また，すべての基本ベクトルに関する最小消去多項式の最小公倍多項式は最小多項式と一致する．基本ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ に関する最小消去多項式は固有ベクトル計算やスペクトル分解計算に威力を発揮する ([3], [5], [6]).

いま，行ベクトル ${}^t\boldsymbol{v} \in K^n$ をランダムに選び，${}^t\boldsymbol{v}h(A)\boldsymbol{u} = 0$ かつ $h(x) \,|\, \chi_A(x)$ を満たす次数最小のモニック多項式 $h(x) \in K[x]$ 最小消去多項式候補と呼び，$\tilde{\pi}_{A,\boldsymbol{u}}(x)$ で表すことにする．最小消去多項式候補の探索とは，すなわち最小消去多項式の確率的計算アルゴリズムである．定義から分かるように，最小消去多項式を計算するには，$\pi_{A,\boldsymbol{u}}(A)\boldsymbol{u}$ が零ベクトルに等しいことを確認する必要がある．一方，最小消去多項式候補の探索では，${}^t\boldsymbol{v}\tilde{\pi}_{A,\boldsymbol{u}}(A)\boldsymbol{u}$ の値について調べるが，これはスカラー値であるので，特に行列の次数が大きい場合には計算量の観点からは有利になる．また，${}^t\boldsymbol{v}$ が乱数ベクトルであるので，ほとんどの場合，最小消去多項式候補は最小消去多項式に一致する．本稿では，最小消去多項式候補および最小消去多項式の計算アルゴリズムについて概説する．

まず，行列 A の特性多項式の既約分解が $\chi_A(x) = f_1(x)^{m_1}\cdots f_q(x)^{m_q}$, $(m_i \in \mathbf{N})$ で与えられているとしよう．最小消去多項式は特性多項式を割りきるので，$\pi_{A,\boldsymbol{u}}(x)$ は必ず，

$$\pi_{A,\boldsymbol{u}}(x) = f_1(x)^{\ell_1}\cdots f_q(x)^{\ell_q}, \quad (0 \le \ell_i \le m_i)$$

の形になる．したがって，最小消去多項式候補も同じく，

$$\tilde{\pi}_{A,\boldsymbol{u}}(x) = f_1(x)^{\ell'_1}\cdots f_q(x)^{\ell'_q}, \quad (0 \le \ell'_i \le m_i)$$

の形を仮定してよい．最小消去多項式候補の指数 $\ell'_1, \cdots, \ell'_q$ を次の手順で決定しよう．

アルゴリズム **1** (最小消去多項式候補)**.**
入力: 行列 A, 特性多項式 $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^m f_i(x)^{m_i}$
出力: 最小消去多項式候補 $\tilde{\pi}_{A,\boldsymbol{u}}(x)$

1. 行ベクトル ${}^t\boldsymbol{v} \in K^n$ をランダムに選ぶ．
2. for $i = 1, \cdots, q$, do
   $\chi_i(x) \leftarrow \chi(x)/f_i(x)^{m_i}, \quad {}^t\boldsymbol{v}_i \leftarrow {}^t\boldsymbol{v}\chi_i(A).$
3. for $i = 1, \cdots, q$, do
$$\ell'_i \leftarrow \begin{cases} \min\{k \in \mathbf{N} \mid {}^t\boldsymbol{v}_i f_i(A)^k \boldsymbol{u} = 0\}, & ({}^t\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{u} \neq 0) \\ 0. & ({}^t\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{u} = 0) \end{cases}$$
4. $\tilde{\pi}_{A,\boldsymbol{u}}(x) \leftarrow \prod_i f_i(x)^{\ell'_i}.$

ステップ 2 では，すべての ${}^t\boldsymbol{v}_1, \cdots, {}^t\boldsymbol{v}_q$ を求めるには，行列多項式乗算 ${}^t\boldsymbol{w} \mapsto {}^t\boldsymbol{w}f_i(A)^{m_i}$ が q^2 回必要であるように思えるが，２分探索の方法を用いれば，およそ $q\log_2 q$ 回で実行可能である (行列多項式乗算の高速算法については，[7] 参照)．さらに，${}^t\boldsymbol{v}_k$ は一度計算しておけば，どの基本ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ に関する最小消去多項式候補 $\tilde{\pi}_{A,\boldsymbol{e}_j}(x)$ の計算でも共通に利用できることにも注意する．

さて，アルゴリズム 1 で定まる最小消去多項式候補 $\tilde{\pi}_{A,u}(x)$ は次の性質を持つ．

補題 1. 各既約因子の指数について，$\ell'_i \le \ell_i \le m_i$ が成り立つ．また，$\boldsymbol{u}' = \tilde{\pi}_{A,\boldsymbol{u}}(A)\boldsymbol{u}$ について，$\pi_{A,\boldsymbol{u}}(x) = \tilde{\pi}_{A,\boldsymbol{u}}(x)\pi_{A,\boldsymbol{u}'}(x)$ を満たす．

上の補題から，最小消去多項式候補の指数は，最小消去多項式の指数 ℓ_i の下からの評価を与えていることが分かる．しかも ${}^t\boldsymbol{v}$ が乱数ベクトルであることに注意すると，ほぼ確率 1 で $\ell_i' = \ell_i$ となる．したがって，この評価は非常に効率的である．

しかしながら，一般には最小消去多項式候補は最小消去多項式と異なる可能性がある．そのため候補ではなく真の最小消去多項式が必要な場合には比較・検証し，異なる場合には最小消去多項式を決定しなければならない．その方法を述べよう．

まず $\boldsymbol{u}' = \tilde{\pi}_{A,\boldsymbol{u}}(A)\boldsymbol{u}$ を求める．$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{0}$ ならば，$\tilde{\pi}_{A,\boldsymbol{u}}(x) = \pi_{A,\boldsymbol{u}}(x)$ であることが分かる．一方，$\boldsymbol{u}' \neq \boldsymbol{0}$ の場合は，上の補題から $\pi_{A,\boldsymbol{u}}(x) = \pi_{A,\boldsymbol{u}'}(x)\tilde{\pi}_{A,\boldsymbol{u}}(x)$ となるので，$\boldsymbol{u}'$ に関する最小消去多項式 $\pi_{A,\boldsymbol{u}'}(x)$ を求めればよい．ここで，$\pi_{A,\boldsymbol{u}'}(x)$ の各指数 $\ell_i - \ell_i'$ は $m_i - \ell_i'$ で上から抑えられている．このことに注意して，$\boldsymbol{u}'$ についてアルゴリズム 1 を適用することで，u' に関する最小消去多項式候補 $\tilde{\pi}_{A,\boldsymbol{u}'}$ を計算することができる．これを順次繰り返して最小消去多項式が得られる．

3　一般固有空間の構造の決定法 (最小消去多項式による場合)

いま，λ を行列 A のある固有値，$f(x)$ を λ の定義多項式とする．前述したように，固有値 λ に対応するジョルダン細胞のサイズと個数の列

$$J_{k_1}(\lambda) \text{ が } n_1 \text{ 個}, J_{k_2}(\lambda) \text{ が } n_2 \text{ 個}, \cdots, J_{k_m}(\lambda) \text{ が } n_m \text{ 個}, \quad (k_1 > k_2 > \cdots > k_m \geq 1)$$

が知りたいものである．k_1 については，最小多項式 $\pi_A(x)$ を既約分解したときに現れる $f(x)$ の指数と一致することが容易に分かる．では，n_1 はどのようにすれば知ることができるだろうか．そのためにジョルダン細胞と最小消去多項式の関係を考えよう．

いま，ある列ベクトル $\boldsymbol{u} \in K^n$ に関して最小消去多項式が $\pi_{A,\boldsymbol{u}}(x) = f(x)^\ell g(x)$ と表されたとする．このとき $\boldsymbol{p} = g(A)\boldsymbol{u} \in K^n$ は，

$$f(A)^\ell \boldsymbol{p} = f(A)^\ell g(A)\boldsymbol{u} = \pi_{A,\boldsymbol{u}}(A)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

を満たすことから，$\boldsymbol{p}$ の最小消去多項式は $\pi_{A,\boldsymbol{p}}(x) = f(x)^\ell$ である．また

$$\Psi(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \in K[x,y]$$

と置くと，$f(A) = (A - \lambda E)\Psi(A, \lambda E)$ なので，$\boldsymbol{v} = \Psi(A,\lambda E)^\ell \boldsymbol{p} \in K(\lambda)^n$ について，$f(A)^\ell \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ と $(A - \lambda E)^\ell \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ が同値であることが分かる．しかも $\pi_{A,\boldsymbol{p}}(x)$ の最小性より，$(A - \lambda E)^{\ell-1}\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ である．すなわち，

$$(A - \lambda E)^\ell \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{かつ} \quad (A - \lambda E)^k \boldsymbol{v} \neq 0 \ \ (0 \leq k < \ell)$$

となるので，$\boldsymbol{v}$ はサイズ ℓ のジョルダン細胞に属することが分かる．

すべての基本ベクトル $\boldsymbol{e}_j$　$(1 \leq j \leq n)$ について，最小消去多項式が分かっているとし，$\pi_{A,\boldsymbol{e}_j}(x) = f(x)^{\ell_j} g_j(x)$ と表すこととする．また，$f(x)$ に関する指数の最大値を $\ell = \max(\ell_1, \cdots, \ell_n)$ とする．

われわれがまず知りたいのはサイズ $k_1 = \ell$ のジョルダン細胞の個数 n_1 である．そこで，最小消去多項式の $f(x)$ に関する指数がちょうど k となる基本ベクトルの添字の集合 $J_k = \{j \mid \ell_j = k\}$ を考える．$\boldsymbol{p}_j = g_j(A)\boldsymbol{e}_j$ および $\boldsymbol{v}_j = \Psi(A,\lambda E)^{\ell_j}\boldsymbol{p}_j$, と置こう．ベクトル $\boldsymbol{p}_j$ $(j \in J_\ell)$ の最小消去多項式はすべて $f(x)^\ell$ である．また，$\Psi(x,y)$ の定義から

$$(A - \lambda E)^{\ell-1}\boldsymbol{v}_j = \Psi(A,\lambda E) f(A)^{\ell-1}\boldsymbol{p}_j$$

が成り立つことが分かる．したがって，$\Psi(A, \lambda E)$ を左からかけるという線形写像によって，

$$\Psi(A, \lambda E) : \mathrm{span}\{f(A)^{\ell-1}\boldsymbol{p}_j \mid j \in J_\ell\} \to \mathrm{span}\{(A - \lambda E)^{\ell-1}\boldsymbol{v}_j \mid j \in J_\ell\}$$

は全射である．ここで $\mathrm{span}\, S$ で，集合 S の生成する K-ベクトル空間を表す．$\mathrm{span}\{f(A)^{\ell-1}\boldsymbol{p}_j \mid j \in J_\ell\}$ の次元 r_ℓ は容易に計算できて，

$$r_\ell = \dim_K \mathrm{span}\{f(A)^{\ell-1}\boldsymbol{p}_j \mid j \in J_\ell\} = \mathrm{rank}([\, f(A)^{\ell-1}\boldsymbol{p}_j\,]_{j\in J_\ell}) = \mathrm{rank}(f(A)^{\ell-1}[\,\boldsymbol{p}_j\,]_{j\in J_\ell}).$$

ここで，$[\,\boldsymbol{p}_j\,]_{j\in J_\ell}$ は列ベクトル $\boldsymbol{p}_j$ たちを並べた行列を表す．$f(x)$ の共役な根を区別しないことに注意すれば，

$$r_\ell = (\text{サイズ } \ell \text{ のジョルダン細胞の個数}) \times \deg f(x)$$

であることが分かる．

次に，サイズ $\ell - 1$ のジョルダン細胞の個数について調べたい．$|J_\ell| \times n$ 行列 $[\, f(A)^{\ell-1}\boldsymbol{p}_j\,]_{j\in J_\ell}$ のランク r_ℓ が，$r_\ell < |J_\ell|$ であるときには，一次結合 $\boldsymbol{p} = \sum_{j\in J_\ell} a_j \boldsymbol{p}_j$ でかつ最小消去多項式が $f(x)^{\ell'}$ $(\ell' < \ell)$ なるベクトルが存在する．したがって，サイズの小さいジョルダン細胞の個数を求めるときには，このようなベクトルも考慮しなくてはならない．このことに注意して調べていこう．

$r_\ell = \mathrm{rank}([\, f(A)^{\ell-1}\boldsymbol{p}_j\,]_{j\in J_\ell})$ であったので，ベクトルの集合 $\{f(A)^{\ell-1}\boldsymbol{p}_j \mid j \in J_\ell\}$ には $|J_\ell| - r_\ell$ 個の一次従属関係式がある．つまり，ある定数 $c_{kj} \in K$ によって

$$\sum_{j\in J_\ell} c_{kj} f(A)^{\ell-1}\boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{0}, \qquad 0 \le k < |J_\ell| - r_\ell$$

と表せ，しかも c_{kj} は行列 $[\, f(A)^{\ell-1}\boldsymbol{p}_j\,]_{j\in J_\ell}$ の掃き出しによって，ランク計算と同時に得られる．このとき，ベクトル $\boldsymbol{w}_k = \sum_{j\in J} c_{kj}\boldsymbol{p}_j$ の最小消去多項式は $f(x)^{\ell-1}$ である．まとめると，集合 $U = \{\boldsymbol{p}_j \mid j \in J_{\ell-1}\} \cup \{\boldsymbol{w}_k \mid 0 \le k < |J_\ell| - r_\ell\}$ に属するベクトルはすべて最小消去多項式 $f(x)^{\ell-1}$ をもつ．

よって $\boldsymbol{u} \in U$ について，$\boldsymbol{v} = \Psi(A, \lambda E)^{\ell-1}\boldsymbol{u}$ と置くと，前述したように，$f(A)^{\ell-1}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ と $(A-\lambda E)^{\ell-1}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ と同値である．このとき

$$(A - \lambda E)^{\ell-2}\boldsymbol{v} = \Psi(A, \lambda E) f(A)^{\ell-2}\boldsymbol{u}$$

が成り立つ．以下，サイズ $\ell - 1$ のときも同じ議論ができて，全射

$$\Psi(A, \lambda E) : \mathrm{span}\{f(A)^{\ell-2}\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in U\} \to \mathrm{span}\{(A - \lambda E)^{\ell-2}\boldsymbol{v} \mid (A - \lambda E)^{\ell-1}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\}$$

が得られる．$r_{\ell-1} = \mathrm{rank}(f(A)^{\ell-2} \cdot [\,\boldsymbol{u}\,]_{\boldsymbol{u}\in U})$ としよう．

$(A - \lambda E)^{\ell-1}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ ならば $(A - \lambda E)^{\ell}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であることに注意すると，

$$r_{\ell-1} - r_\ell = (\text{サイズ } \ell - 1 \text{ のジョルダン細胞の個数}) \times \deg f(x)$$

である．

よって次のアルゴリズムが得られる．

アルゴリズム **2** (ある固有値に関する一般固有空間の構造)**.**
入力: 行列 A, 特性多項式 $\chi_A(x)$, 固有値の定義多項式 $f(x)$
出力: ジョルダン細胞列 S_f

1. $\{\pi_{A,\boldsymbol{e}_1}(x), \cdots, \pi_{A,\boldsymbol{e}_n}(x)\} \leftarrow$ 最小消去多項式

2. for $j = 1, \cdots, n$, do
   $\ell_j \leftarrow (\pi_{A,\boldsymbol{e}_j}(x)$ の $f(x)$ に関する指数), $g_j(x) \leftarrow \pi_{A,\boldsymbol{e}_j}(x)/f(x)^{\ell_j}$, $\boldsymbol{p}_j \leftarrow g_j(A)\boldsymbol{e}_j$

3. $\ell \leftarrow \max\{\ell_1, \cdots, \ell_n\}$,
   for $k = 0, 1, \cdots, \ell$, do
   $J_k \leftarrow \{j \mid \ell_j = k\}$

4. $W_{\ell+1} \leftarrow \emptyset$, $r_{\ell+1} \leftarrow 0$,
   for $k = \ell, \ell-1, \cdots, 1$, do
   $U \leftarrow \{\boldsymbol{p}_j \mid j \in J_k\} \cup W_{k+1}$,
   $P \leftarrow (\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{u} \in U}$: 行列,
   $r_k \leftarrow \mathrm{rank}(f(A)^{k-1}P)$,
   $W_k \leftarrow \{\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w} = \sum_{\boldsymbol{u} \in U} c_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0},\ f(A)^{k-1}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}\}$,
   $n_k \leftarrow (r_k - r_{k+1})/\deg f(x)$.

5. $S_f \leftarrow \{(k, n_k) \mid n_k \neq 0\}$.

なお，ステップ 4 では，ベクトルに $f(A)^i$ をかける計算が何度も行われているように見えるが，W_k の元が $\boldsymbol{p}_j$ たちの一次結合であることに注意すると，各 $\boldsymbol{p}_j$ に対し，$f(A)\boldsymbol{p}_j, \cdots, f(A)^{\ell_j-1}\boldsymbol{p}_j$ を一度だけ計算して記憶しておくことで，計算量を抑えることができる．

例 **1.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & -25 & -10 & -11 & -2 \end{pmatrix}$$

ここで $f = x^2 + x + 5$ とすると，特性多項式・最小多項式は

$$\chi_A(x) = f^3, \quad \pi_A(x) = f^2$$

また，基本ベクトルに対する最小消去多項式は

$$\pi_{A,\boldsymbol{e}_1}(x) = f^2, \quad \pi_{A,\boldsymbol{e}_2}(x) = f, \quad \pi_{A,\boldsymbol{e}_3}(x) = \pi_{A,\boldsymbol{e}_4}(x) = \pi_{A,\boldsymbol{e}_5}(x) = \pi_{A,\boldsymbol{e}_6}(x) = f^2$$

最小消去多項式はわかったので，アルゴリズム 2 に基づいて計算してみると，$r_2 = 2$, $r_1 = 4$, $\deg(x^2 + x + 5) = 2$ となる．よって，サイズ 2 のジョルダン細胞は $r_2/2 = 1$ 個，サイズ 1 のジョルダン細胞は $(r_1 - r_2)/2 = 1$ 個，あることがわかる．

4 一般固有空間の構造の決定法 (最小消去多項式候補による場合)

ここでは，最小消去多項式を用いるかわりに，最小消去多項式候補を利用すること考える．前述したように最小消去多項式候補から最小消去多項式を構成するためには，$\pi_{A,\boldsymbol{u}}(A)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ であるかの検証が不可欠となる．そこで，その検証にあたる手続きを一般固有空間の構造の決定とあわせて行うことで計算量の削減を試みる．

前節と同じように着目した固有値 λ の定義多項式を $f(x)$ とする．まず，アルゴリズム 1 により，すべての基本ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ に対して，最小消去多項式候補 $\tilde{\pi}_{A,\boldsymbol{e}_j}(x) = f(x)^{\ell'_j} g'_j(x)$ を求める．$f(x)$ に関する指数が k と一致する基本ベクトルの添字の集合を $J'_k = \{j \mid \ell'_j = k\}$ と置く．$\boldsymbol{p}'_j = g'_j(A)\boldsymbol{e}_j$ が $f(A)^{\ell'_j}\boldsymbol{p}'_j = \boldsymbol{0}$ を満たせば，$\tilde{\pi}_{A,\boldsymbol{e}_j}(x) = \pi_{A,\boldsymbol{e}_j}(x)$ であることになるが，この段階では分からない．最小消去多項式候補の指数は，最小消去多項式の指数の下限を与えているので，$J'_k \subset J_k \cup J_{k+1} \cup \cdots \cup J_m$ の関係にある．前節のアルゴリズム 2 を見ると，正しい J_k と $\boldsymbol{p}_j$ を与えないと計算できない．したがって $\{J'_k\}, \{\boldsymbol{p}'_j\}$ から $\{J_k\}$, $\{\boldsymbol{p}_j\}$ を構成することが問題になる．

まず，$k = 0$ のときについて考える．$j \in J'_0$ に対し，$\boldsymbol{p}'_j = \boldsymbol{0}$ ならば，最小消去多項式候補は最小消去多項式に一致するので，$j \in J_0$ であることが分かる．また，$\boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{p}'_j$ とする． しかしながら，$\boldsymbol{p}'_j \neq \boldsymbol{0}$ であったとしても，$f(x)$ 以外の因子の推定が誤っていることもあり得るので，$j \notin J'_0$ とは言えない．そこで，$\boldsymbol{p}'_j \neq \boldsymbol{0}$ のときには次のように考える．特性多項式 $\chi_A(x) = f(x)^m G(x)$ に着目して，$c_j(x) = G(x)/g_j(x)$ としよう．$\boldsymbol{p}_j = c_j(A)\boldsymbol{p}'_j$ とする．$c_j(A)\boldsymbol{p}'_j = G(A)\boldsymbol{e}_j$ は $f(A)$ 以外の全ての因子について左からかけたものであるから，もし，$\boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{0}$ ならば，$g_j(x)$ の推定が誤っていたことになり，$j \in J_0$ である．$c_j(A)\boldsymbol{p}'_j \neq \boldsymbol{0}$ のときは，$f(x)$ の指数の推定が誤っているので，$f(A)^s\boldsymbol{p}_j$ $(s = 1, 2, \cdots)$ を順に求め，$f(A)^s\boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{0}$ となる最小の s を探索する．このとき $j \in J_s$ である．

同様に $k > 0$ の場合を考える．$j \in J'_k$ に対し，$\boldsymbol{u}'_j = f(A)^{k-1}\boldsymbol{p}'_j, f(A)\boldsymbol{u}'_j$ をそれぞれ求める．$f(A)\boldsymbol{u}'_j = \boldsymbol{0}$ のときは，$\tilde{\pi}_{A,\boldsymbol{e}_j}(x) = \pi_{A,\boldsymbol{e}_j}(x)$ であるので，$j \in J_k, \boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{p}'_j$ としてよい．$f(A)\boldsymbol{u}'_j \neq \boldsymbol{0}$ のときは，$k = 0$ のときと同様に，特性多項式から $c_j(x)$ を定め，$\boldsymbol{p}_j = c_j(A)\boldsymbol{p}'_j, \boldsymbol{u}_j = c_j(A)\boldsymbol{u}'_j$ とする．$f(A)\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{0}$ ならば，$f(x)$ の指数の推定は正しいので，$j \in J_k$ である．$f(A)\boldsymbol{u}_j \neq \boldsymbol{0}$ ならば，$f(A)^s(f(A)\boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{0}$ となる最小の s を求めれば，$j \in J_{k+s}$ となることが分かる．

以上より真の J_k と $\boldsymbol{p}_j$ が探索できたので，アルゴリズム 2 のステップ 4,5 を適用することで，一般固有空間の構造を求めることができる．また，この節で述べた J_k の探索アルゴリズムは明らかに各 j について並列化可能である．

参 考 文 献

[1] K. Ohara and S. Tajima: Spectral Decomposition and Eigenvectors of Matrices by Residue Calculus, Proceedings of the Joint Conference of ASCM 2009 and MACIS 2009, COE Lecture Note **22**, Kyushu University, 137–140.

[2] 田島慎一, 奈良洸平, 小原功任: 行列の最小多項式計算について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1814**(2012), 1–8.

[3] 照井章, 田島慎一: 行列の最小消去多項式候補を利用した固有ベクトル計算, 京都大学数理解析研究所講究録 **1815**(2012), 13–20.

[4] 小原功任・田島慎一: レゾルベントを用いた行列のスペクトル分解と固有ベクトル計算, 日本数学会 2009 年度秋季総合分科会, 函数論分科会講演アブストラクト.

[5] 小原功任, 田島慎一: 最小消去多項式を用いた行列スペクトル分解計算の並列化, 京都大学数理解析研究所講究録 **1815**(2012), 21–28.

[6] 小原功任, 田島慎一: 最小消去多項式を用いた行列スペクトル分解の並列算法, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会, 函数論分科会講演アブストラクト.

[7] 小原功任, 田島慎一: 行列の最小消去多項式とその候補の計算法, 日本数学会 2013 年度年会, 代数学分科会講演アブストラクト.