Gröbner bases of Lauricella’s hypergeometric equations and its applications

Nakayama, Hiromasa
Department of Mathematics, Graduate school of Science, Kobe University

出版情報：COE Lecture Note. 49, pp.7-13, 2013-08-09. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

Gröbner bases of Lauricella's hypergeometric equations and its applications

中山 洋将

Nakayama Hiromasa

神戸大学大学院理学研究科/ JST CREST

Department of Mathematics, Graduate school of Science, Kobe University * †

Abstract

We derive Gröbner bases of Lauricella's hypergeometric differential equations. By using these Gröbner bases, we determine the characteristic variety and the singular locus of Lauricella's F_B and a Pfaffian system of Lauricella's F_D.

1 Introduction

Lauricella 超幾何級数 F_A, F_B, F_C, F_D は

$$F_A(a, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_m; x_1, \dots, x_m) = \sum_{n_1,\dots,n_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \frac{(a)_{n_1+\cdots+n_m}(b_1)_{n_1}\cdots(b_m)_{n_m}}{(c_1)_{n_1}\cdots(c_m)_{n_m}(1)_{n_1}\cdots(1)_{n_m}} x_1^{n_1}\cdots x_m^{n_m},$$

$$F_B(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m, c; x_1, \dots, x_m) = \sum_{n_1,\dots,n_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \frac{(a_1)_{n_1}\cdots(a_m)_{n_m}(b_1)_{n_1}\cdots(b_m)_{n_m}}{(c)_{n_1+\cdots+n_m}(1)_{n_1}\cdots(1)_{n_m}} x_1^{n_1}\cdots x_m^{n_m},$$

$$F_C(a, b, c_1, \dots, c_m; x_1, \dots, x_m) = \sum_{n_1,\dots,n_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \frac{(a)_{n_1+\cdots+n_m}(b)_{n_1+\cdots+n_m}}{(c_1)_{n_1}\cdots(c_m)_{n_m}(1)_{n_1}\cdots(1)_{n_m}} x_1^{n_1}\cdots x_m^{n_m},$$

$$F_D(a, b_1, \dots, b_m, c; x_1, \dots, x_m) = \sum_{n_1,\dots,n_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \frac{(a)_{n_1+\cdots+n_m}(b_1)_{n_1}\cdots(b_m)_{n_m}}{(c)_{n_1+\cdots+n_m}(1)_{n_1}\cdots(1)_{n_m}} x_1^{n_1}\cdots x_m^{n_m},$$

と定義される. ここで, a, b, c, a_i, b_i, c_i $(i = 1, \dots, m)$ は複素パラメータであり, $c, c_i \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ を満たすとする. これら F_A, F_B, F_C, F_D が満たす微分方程式系として, 次のものがそれぞれ知られている.

$$\ell_i^A \cdot F_A = 0, \quad \ell_i^A = \theta_i(\theta_i + c_i - 1) - x_i(\theta_1 + \cdots + \theta_m + a)(\theta_i + b_i) \qquad (i = 1, \dots, m).$$
$$\ell_i^B \cdot F_B = 0, \quad \ell_i^B = \theta_i(\theta_1 + \cdots + \theta_m + c - 1) - x_i(\theta_i + a_i)(\theta_i + b_i) \qquad (i = 1, \dots, m).$$
$$\ell_i^C \cdot F_C = 0, \quad \ell_i^C = \theta_i(\theta_i + c_i - 1) - x_i(\theta_1 + \cdots + \theta_m + a)(\theta_1 + \cdots + \theta_m + b) \qquad (i = 1, \dots, m).$$

*nakayama@math.kobe-u.ac.jp

†本研究は科研費 (課題番号:24740064) および JST CREST "数学と諸分野の協働によるブレークスルーの探索" の助成を受けたものである。

$$\ell_i^D \cdot F_D = 0 \quad (i = 1, \ldots, m),$$
$$\ell_i^D = x_i(1-x_i)\partial_i^2 + (1-x_i) \sum_{k \neq i, 1 \leq k \leq m} x_k \partial_i \partial_k + (c - (a + b_i + 1)x_i)\partial_i - b_i \sum_{k \neq i, 1 \leq k \leq m} x_j \partial_j - ab_i.$$
$$\ell_{ij}^D \cdot F_D = 0, \quad \ell_{ij}^D = (x_i - x_j)\partial_i \partial_j - b_j \partial_i + b_i \partial_j \quad (1 \leq i < j \leq m).$$

ここで, $\cdot$ は微分作用素を関数に作用させることを表す記号, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ は x_i についての微分作用素, $\theta_i = x_i \partial_i$ は x_i についての Euler 作用素である.

上で定義した微分作用素の生成する D イデアル

$$I_A(m) = D\{\ell_i^A \mid i = 1, \ldots, m\},\ I_B(m) = D\{\ell_i^B \mid i = 1, \ldots, m\},\ I_C(m) = D\{\ell_i^C \mid i = 1, \ldots, m\}$$

と $\widehat{\mathcal{D}}$ イデアル

$$\widehat{I_A}(m) = \widehat{\mathcal{D}}\{\ell_i^A \mid i = 1, \ldots, m\}, \quad \widehat{I_C}(m) = \widehat{\mathcal{D}}\{\ell_i^C \mid i = 1, \ldots, m\}.$$

と R イデアル

$$I_D(m) = R\{\ell_i^D, \ell_{jk}^D \mid i = 1, \ldots, m,\ 1 \leq j < k \leq m\}.$$

を考える. ここで $D = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]\langle \partial_1, \ldots, \partial_m \rangle$ は多項式係数微分作用素環, $\widehat{\mathcal{D}} = \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_m]]\langle \partial_1, \ldots, \partial_m \rangle$ は形式べき級数を係数に持つ微分作用素環, $R = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_m)\langle \partial_1, \ldots, \partial_m \rangle$ は有理関数係数微分作用素環である. この各イデアルについて, ある単項式順序, 項順序について, グレブナー基底がわかる. 得られたグレブナー基底を使うと, F_A, F_B, F_C の各微分方程式系の特異点集合や, F_D の Pfaff 系を計算することができる. ここでは F_B の特異点集合と F_D の Pfaff 系の計算について述べる.

2 Lauricella 超幾何微分方程式系についてのグレブナー基底

まず F_B の微分方程式系に対応する D イデアル $I_B(m)$ について, グレブナー基底を導く.

定理 1 ($I_B(m)$ のグレブナー基底)
D 上の項順序 $<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}$ を次のように定義する. ここで, ξ_i は ∂_i に対応する可換な変数とする.

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} \xi_1^{\beta_1} \cdots \xi_m^{\beta_m} <_{(\mathbf{0},\mathbf{1})} x_1^{\alpha'_1} \cdots x_m^{\alpha'_m} \xi_1^{\beta'_1} \cdots \xi_m^{\beta'_m}$$

を下のいづれかが成り立つ時と定義する.

1. $\beta_1 + \cdots + \beta_m < \beta'_1 + \cdots + \beta'_m$
2. $\beta_1 + \cdots + \beta_m = \beta'_1 + \cdots + \beta'_m$ かつ $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m < \alpha'_1 + \cdots + \alpha'_m$
3. $\beta_1 + \cdots + \beta_m = \beta'_1 + \cdots + \beta'_m$ かつ $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = \alpha'_1 + \cdots + \alpha'_m$ かつ $x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} \xi_1^{\beta_1} \cdots \xi_m^{\beta_m} <' x_1^{\alpha'_1} \cdots x_m^{\alpha'_m} \xi_1^{\beta'_1} \cdots \xi_m^{\beta'_m}$. ここで $<'$ はあらかじめ設定した適当な項順序, 例えば辞書式順序などである.

この時, D イデアル $I_B(m)$ の $<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}$ についてのグレブナー基底は, $\{\ell_1^B, \ldots, \ell_m^B\}$ である.

これを示すには, Buchberger の判定法を用いて, 各ペアの S 式について 0 に簡約できることを示す必要がある. これを簡単に言うため, 次の補題を用いる. この補題は多項式環ではよく知られた補題の微分作用素環版である.

補題 2 (Buchberger の省ける S 式の判定法 (微分作用素環版))
微分作用素 $P, Q \in D$, D 上の項順序を $<$ とする. 先頭項 $\mathrm{in}_<(P), \mathrm{in}_<(Q)$ が互いに素の時, P と Q の S 式 $S_<(P,Q)$ は交換子 $-[P,Q]$ まで簡約できる.

証明　簡単のため P, Q の先頭項の係数を 1 と仮定しておく. 先頭項 $\mathrm{in}_<(P), \mathrm{in}_<(Q)$ が互いに素より,

$$\begin{aligned} S_<(P,Q) &= (Q - \mathrm{rest}_<(Q))P - (P - \mathrm{rest}_<(P))Q \\ &= -\mathrm{rest}_<(Q)P + \mathrm{rest}_<(P)Q + QP - PQ \\ &= -\mathrm{rest}_<(Q)P + \mathrm{rest}_<(P)Q - [P,Q] \end{aligned}$$

ここで, $\mathrm{rest}_<(P)$ は P の先頭項以外の部分を表す. よって, S 式 $S_<(P,Q)$ は P, Q を使い簡約すれば, $-[P,Q]$ まで簡約できる. ∎

証明 (定理 1 の証明) 元 ℓ_i^B, ℓ_j^B $(1 \le i < j \le m)$ について, S 式が 0 に簡約できることを示せばよい. 先頭項は $\mathrm{in}_{<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}}(\ell_i^B) = x_i^3\xi_i^2, \mathrm{in}_{<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}}(\ell_j^B) = x_j^3\xi_j^2$ で, 互いに素であるから補題 2 を使うことができる. 交換子を計算すると,

$$\begin{aligned} [\ell_i^B, \ell_j^B] &= \ell_i^B\ell_j^B - \ell_j^B\ell_i^B \\ &= x_i(\theta_i + a_i)(\theta_i + b_i)\theta_j - x_j(\theta_j + a_j)(\theta_j + b_j)\theta_i \\ &\xrightarrow[\ell_i^B, \ell_j^B]{*} \theta_i(\theta_1 + \cdots + \theta_m + c - 1)\theta_j - \theta_j(\theta_1 + \cdots + \theta_m + c - 1)\theta_i = 0 \end{aligned}$$

ここで, $\xrightarrow[\ell_i^B, \ell_j^B]{*}$ は, ℓ_i^B, ℓ_j^B を使って簡約することを表す記号である. 交換子は 0 に簡約できるので, 補題 2 より, S 式 $S_{<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}}(\ell_i^B, \ell_j^B)$ は 0 に簡約できる. Buchberger の判定法より, $\{\ell_1^B, \ldots, \ell_m^B\}$ は $<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}$ についてグレブナー基底である. ∎

次に $\widehat{\mathcal{D}}$ イデアル $\widehat{I_A}(m)$ について, グレブナー基底を導く.

定理 3 ($\widehat{I_A}(m)$ のグレブナー基底)
$\widehat{\mathcal{D}}$ 上の単項式順序 $<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}{}'$ を次のように定義する.

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}\xi_1^{\beta_1} \cdots \xi_m^{\beta_m} <_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}{}' x_1^{\alpha'_1} \cdots x_m^{\alpha'_m}\xi_1^{\beta'_1} \cdots \xi_m^{\beta'_m}$$

を下のいづれかが成り立つ時と定義する.

1. $\beta_1 + \cdots + \beta_m < \beta'_1 + \cdots + \beta'_m$
2. $\beta_1 + \cdots + \beta_m = \beta'_1 + \cdots + \beta'_m$ かつ $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m > \alpha'_1 + \cdots + \alpha'_m$
3. $\beta_1 + \cdots + \beta_m = \beta'_1 + \cdots + \beta'_m$ かつ $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = \alpha'_1 + \cdots + \alpha'_m$ かつ $x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}\xi_1^{\beta_1} \cdots \xi_m^{\beta_m} <' x_1^{\alpha'_1} \cdots x_m^{\alpha'_m}\xi_1^{\beta'_1} \cdots \xi_m^{\beta'_m}$. ここで $<'$ はあらかじめ設定した適当な項順序, 例えば辞書式順序などである.

$\widehat{\mathcal{D}}$ イデアル $\widehat{I_A}(m)$ の $<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}{}'$ についてのグレブナー基底は, $\{\ell_1^A, \ldots, \ell_m^A\}$ である.

証明　このような単項式順序 $<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}{}'$ であっても, 補題 2 と同様のことが成り立つ. このことを使い, 定理を証明する. 元 ℓ_i^A, ℓ_j^A $(1 \le i < j \le m)$ について, S 式が 0 に簡約できることを示せばよい. 先頭項は $\mathrm{in}_{<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}{}'}(\ell_i^A) = x_i^2\xi_i^2, \mathrm{in}_{<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}{}'}(\ell_j^A) = x_j^2\xi_j^2$ で, 互いに素であるから補題 2 の類似を使うことができる. 交換子を計算すれば $[\ell_i^A, \ell_j^A] = 0$ となる. よって, S 式 $S_{<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}{}'}(\ell_i^A, \ell_j^A)$ は 0 に簡約できる. $\widehat{\mathcal{D}}$ の $<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}{}'$ についての Buchberger の判定法 ([2], [7]) より, $\{\ell_1^A, \ldots, \ell_m^A\}$ はグレブナー基底である. ∎

$\widehat{\mathcal{D}}$ イデアル $\widehat{I_C}(m)$ の場合も, $\widehat{I_A}(m)$ と同様の手順でグレブナー基底がわかる.

定理 4 ($\widehat{I_C}(m)$ **のグレブナー基底)**
$\widehat{\mathcal{D}}$ イデアル $\widehat{I_C}(m)$ の $<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}{}'$ についてのグレブナー基底は, $\{\ell_1^C, \ldots, \ell_m^C\}$ である.

注意 1
D イデアル $I_A(m), I_C(m)$, また F_D の満たす微分方程式系に対応する D イデアルについて, 項順序 $<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}$ に関するグレブナー基底は複雑であり, どうなるかはわかっていない.

R イデアル $I_D(m)$ についてのグレブナー基底は次のようになる.

定理 5 ($I_D(m)$ **のグレブナー基底)**
R イデアル $I_D(m)$ の全次数辞書式順序 $<$ $(\partial_1 > \partial_2 > \cdots > \partial_m)$ についてのグレブナー基底は,

$$\{p_i^D, \ell_{jk}^D \mid i = 1, \ldots, m,\ 1 \le j < k \le m\}$$

である. ここで,

$$p_i^D = x_i(1-x_i)\partial_i^2 + \left(c - (a+b_i+1)x_i + (1-x_i)\sum_{k\neq i, 1\le k\le m}\frac{b_k x_k}{x_i - x_k}\right)\partial_i - b_i \sum_{k\neq i, 1\le k\le m}\frac{x_k(1-x_k)}{x_i-x_k}\partial_k - ab_i$$

であり, この元は ℓ_i^D から $\partial_i\partial_k$ $(i \neq k)$ を ℓ_{ik}^D $(i\neq k)$ で簡約して得られる元である.

証明　Buchberger の判定法を用いて示す. すなわち, 各 S 式 $S_<(p_i^D, p_j^D), S_<(p_i^D, \ell_{jk}^D), S_<(\ell_{ij}^D, \ell_{kl}^D)$ が 0 に簡約されることを具体的に計算して示す. 単純計算であるが, 計算は非常に煩雑なものになる. 計算の詳細は省略する. ∎

3 Lauricella 超幾何関数 F_B の特異点集合の計算

[4] では, Lauricella 超幾何関数 F_C について特異点集合を計算している. その計算に倣い, 今得られたグレブナー基底を使って F_B の特異点集合を計算する. 定理 1 より, $I_B(m)$ の $<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}$ についてのグレブナー基底は $\{\ell_1^B, \ldots, \ell_m^B\}$ であった. ここで, 重みベクトル $(\mathbf{0},\mathbf{1}) = (0,\ldots,0,1,\ldots,1) \in \mathbb{Z}^{2m}$ とおく. すなわち, x_i の重みを 0, ξ_i の重みを 1 とおいたものである. 微分作用素 $P = \sum_{\alpha,\beta\in(\mathbb{Z}_{\ge 0})^m} c_{\alpha,\beta}x^\alpha\partial^\beta \in D$ について, $(\mathbf{0},\mathbf{1})$ イニシャルフォームとは, 全表象 $P(x,\xi) = \sum_{\alpha,\beta\in(\mathbb{Z}_{\ge 0})^m} c_{\alpha,\beta}x^\alpha\xi^\beta \in \mathbb{C}[x,\xi]$ の項で $(\mathbf{0},\mathbf{1})$ 重みについて最大のものたちの和

$$\mathrm{in}_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}(P) = \sum_{(\mathbf{0},\mathbf{1})\cdot(\alpha,\beta)\ \text{が}\ P(x,\xi)\ \text{中で最大}} c_{\alpha,\beta}x^\alpha\xi^\beta$$

である. D イデアル I について, $(\mathbf{0},\mathbf{1})$ イニシャルフォームイデアルとは,

$$\mathrm{in}_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}(I) = \langle \mathrm{in}_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}(P) \mid P \in I\rangle$$

なる $\mathbb{C}[x,\xi]$ のイデアルである. グレブナー基底の一般論から, $(\mathbf{0},\mathbf{1})$ イニシャルフォームイデアル $\mathrm{in}_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}(I_B(m))$ の生成元として, $\mathrm{in}_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}(\ell_1^B), \ldots, \mathrm{in}_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}(\ell_m^B)$ が得られる. ここで, ℓ_i^B の $(\mathbf{0},\mathbf{1})$ イニシャルフォームは,

$$\mathrm{in}_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}(\ell_i^B) = x_i\xi_i\left(x_i(1-x_i)\xi_i + \sum_{1\le j\le m, j\neq i} x_j\xi_j\right)$$

である. これを L_i^B とおいておく. これより次のことがわかる.

命題 6 ($I_B(m)$ の特性多様体)
D イデアル $I_B(m)$ の特性多様体は $\mathrm{Ch}(I_B(m)) = \mathbf{V}(L_1^B, \ldots, L_m^B)$ である．

D イデアル $I_B(m)$ について特異点集合とは，

$$\mathrm{Sing}(I_B(m)) = \pi(\mathrm{Ch}(I_B(m)) \setminus \{\xi_1 = \cdots = \xi_m = 0\})$$

であった．ここで，$\pi : \mathbb{C}^{2m} \ni (x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{C}^m$ なる射影である．今，特性多様体 $\mathrm{Ch}(I_B(m)) = \mathbf{V}(L_1^B, \ldots, L_m^B)$ と具体的に分かっている．

$$L_1^B = 0, \ldots, L_m^B = 0$$

すなわち，

$$x_i\xi_i = 0 \ \text{ or } \ x_i(1 - x_i)\xi_i + \sum_{1 \le k \le m, k \ne i} x_k\xi_k = 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

の解 $(x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ で $(\xi_1, \ldots, \xi_m) \ne (0, \ldots, 0)$ なるものを計算し，それを x 座標だけに射影したものが特異点集合になる．上の式 (1) を $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ を使ってまとめて書けば，

$$x_i(1 - \varepsilon_i x_i)\xi_i + \sum_{1 \le k \le m, k \ne i} \varepsilon_i x_k \xi_k = 0 \quad (i = 1, \ldots, m, \varepsilon_i \in \{0, 1\}) \tag{2}$$

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \in \{0, 1\}^m$ を一つ固定する．上の式 (2) を行列表示すれば，

$$\begin{pmatrix} x_1(1 - \varepsilon_1 x_1) & \varepsilon_1 x_2 & \cdots & \varepsilon_1 x_m \\ \varepsilon_2 x_1 & x_2(1 - \varepsilon_2 x_2) & \cdots & \varepsilon_2 x_m \\ \vdots & & & \vdots \\ \varepsilon_m x_1 & \varepsilon_m x_2 & \cdots & x_m(1 - \varepsilon_m x_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

上の行列を A_ε とおく．式 (2) が $(\xi_1, \ldots, \xi_m) \ne (0, \ldots, 0)$ なる解を持つための必要十分条件は，$\det(A_\varepsilon) = 0$ である．これは ε を固定した時なので，ε を $\{0, 1\}^m$ 全体を動かせば，特異点集合の定義方程式が出てくる．$\prod_{\varepsilon \in \{0,1\}^m} \det(A_\varepsilon)$ を計算すれば，

$$\begin{aligned} \prod_{\varepsilon \in \{0,1\}^m} \det(A_\varepsilon) = & x_1^{2^m} \cdots x_m^{2^m} \prod_{1 \le i_1 \le m} (1 - x_{i_1}) \prod_{1 \le i_1 < i_2 \le m} (x_{i_1} x_{i_2} - x_{i_1} - x_{i_2}) \cdots \\ & (-1)^{m-1}(-x_1 x_2 \cdots x_m + x_2 \cdots x_m + \cdots + x_1 \cdots x_{m-1}) \end{aligned}$$

となる．

定理 7 (F_B の特異点集合)
F_B の特異点集合は，

$$\begin{aligned} \mathrm{Sing}(I_B(m)) = & \mathbf{V}(x_1 \cdots x_m \prod_{1 \le i_1 \le m} (1 - x_{i_1}) \prod_{1 \le i_1 < i_2 \le m} (x_{i_1} x_{i_2} - x_{i_1} - x_{i_2}) \cdots \\ & (x_1 x_2 \cdots x_m - x_2 \cdots x_m - \cdots - x_1 \cdots x_{m-1})) \end{aligned}$$

で与えられる．

4 Lauricella 超幾何関数 F_D の Pfaff 系の計算

R イデアルが 0 次元イデアルであり, そのグレブナー基底がわかっている時, グレブナー基底を使って, その微分方程式系の Pfaff 系を計算することが可能である ([1]). 定理 5 より, R イデアル $I_D(m)$ は 0 次元イデアル (standard monomial は $1, \partial_1, \ldots, \partial_m$) であり, グレブナー基底がわかっているので, このグレブナー基底から Pfaff 系を計算することができる. 一般に m 変数の場合にわかるが, 簡単のため $m = 2$ 変数の例を示す.

例 1 (**$I_D(2)$ の Pfaff 系**)
定理 5 より, R イデアル $I_D(2)$ のグレブナー基底 G は,

$$\begin{aligned} p_1^D &= x_1(1-x_1)\partial_1^2 + \left(c - (a+b_1+1)x_1 + (1-x_1)\frac{b_2x_2}{x_1-x_2}\right)\partial_1 - b_1\frac{x_2(1-x_2)}{x_1-x_2}\partial_2 - ab_1 \\ p_2^D &= x_2(1-x_2)\partial_2^2 + \left(c - (a+b_2+1)x_2 - (1-x_2)\frac{b_1x_1}{x_1-x_2}\right)\partial_2 + b_2\frac{x_1(1-x_1)}{x_1-x_2}\partial_1 - ab_2 \\ \ell_{12}^D &= (x_1-x_2)\partial_1\partial_2 - b_2\partial_1 + b_1\partial_2 \end{aligned}$$

である. 各先頭項は,

$$\mathrm{in}_<(p_1^D) = \xi_1^2, \quad \mathrm{in}_<(p_2^D) = \xi_2^2, \quad \mathrm{in}_<(\ell_{12}^D) = \xi_1\xi_2$$

であり, $R/I_D(2)$ の *standard monomial* は $1, \partial_1, \partial_2$ となる. このことから, *Pfaff* 系は

$$\partial_k \begin{pmatrix} F_D \\ \partial_1 \cdot F_D \\ \partial_2 \cdot F_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k & a_{13}^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k & a_{23}^k \\ a_{31}^k & a_{32}^k & a_{33}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_D \\ \partial_1 \cdot F_D \\ \partial_2 \cdot F_D \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2)$$

のような形になることがわかる. ここで $a_{ij}^k \in \mathbb{C}(x_1, x_2)$ は有理関数である. 1 行目は自明な関係式であり, 2, 3 行目はそれぞれ $\partial_k\partial_1, \partial_k\partial_2$ をグレブナー基底 G で割った余りから導かれる. こうして得られる *Pfaff* 系は次のようになる.

$$\partial_1 \begin{pmatrix} F_D \\ \partial_1 \cdot F_D \\ \partial_2 \cdot F_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{ab_1}{x_1(1-x_1)} & -\frac{b_2(1-x_1)x_2+(x_1-x_2)(c-(a+b_1+1)x_1)}{x_1(1-x_1)(x_1-x_2)} & \frac{b_1x_2(1-x_2)}{x_1(1-x_1)(x_1-x_2)} \\ 0 & \frac{b_2}{x_1-x_2} & -\frac{b_1}{x_1-x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_D \\ \partial_1 \cdot F_D \\ \partial_2 \cdot F_D \end{pmatrix}$$

$$\partial_2 \begin{pmatrix} F_D \\ \partial_1 \cdot F_D \\ \partial_2 \cdot F_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b_2}{x_1-x_2} & -\frac{b_1}{x_1-x_2} \\ \frac{ab_2}{x_2(1-x_2)} & -\frac{b_2x_1(1-x_1)}{x_2(1-x_2)(x_1-x_2)} & -\frac{-b_1(1-x_2)x_1+(x_1-x_2)(c-(a+b_2+1)x_2)}{x_2(1-x_2)(x_1-x_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_D \\ \partial_1 \cdot F_D \\ \partial_2 \cdot F_D \end{pmatrix}$$

参　考　文　献

[1] JST CREST 日比チーム, グレブナー道場, 共立出版, (2011)

[2] F. Castro, Calculs effectifs pour les idéaux d’opérateurs différentiels, Travaux en Cours 24, (1987), 1 - 19

[3] T. Koyama, H. Nakayama, K. Nishiyama, N. Takayama, The Holonomic Rank of the Fisher-Bingham System of Differential Equations, `arXiv:1205.6144`

[4] R. Hattori, N. Takayama, The singular locus of Lauricella’s F_C, Journal of Mathematical Society of Japan (to appear), `arXiv:1110.6675`

[5] K. Matsumoto, Appell and Lauricella Hypergeometric Functions, preprint.

[6] H. Nakayama, Gröbner basis and singular locus of Lauricella's hypergeometric equations, Kyushu Journal of Mathematics (to appear), `arXiv:1303.1674`

[7] 大阿久俊則, グレブナ基底と線型偏微分方程式系 (計算代数解析入門), 上智大学数学講究録, No. 38, (1994)

[8] T. Oaku, T. Shimoyama, A Gröbner Basis Method for Modules over Rings of Differential Operators, Journal of Symbolic Computation 18 (1994), 223–248.

[9] T. Oaku, Computation of the characteristic variety and the singular locus of a system of differential equations with polynomial coefficients, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics 11 (1994), no. 3, 485–497

[10] M. Saito, B. Sturmfels, N. Takayama, *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations*, Springer, 2000