

Polynomial Hamiltonians for Quantum Painlevé Equations

上野, 祐一
神戸大学大学院理学研究科

<https://doi.org/10.15017/14305>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 20ME-S7 (33), 2009-02. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン：

権利関係：



応用力学研究所研究集会報告 No.20ME-S7
「非線形波動の数理と物理」(研究代表者 矢嶋 徹)
共催 九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.20ME-S7
Mathematics and Physics in Nonlinear Waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2008

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 33 (pp. 195-200)

Polynomial Hamiltonians for Quantum Painlevé Equations

上野 祐一 (UENO Yuichi)

(Received January 28, 2009)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
February, 2009

概 要 最近, 対称性の観点から Painlevé 方程式の量子化が H. Nagoya によって提案された. これらの量子 Painlevé 方程式は (非可換な) 多項式ハミルトニアン H_J のハミルトニアン系でかける. ここでは, ある正則性による量子 Painlevé 方程式の特徴付けを行う. つまり, Painlevé 方程式のハミルトニアン系がまた多項式ハミルトニアン系に移るような正準変換を導入し, ハミルトニアンがこの正則性によってただ一つに特徴付けられることを示す.

1 Introduction

Painlevé 方程式 P_J ($J = \text{I}, \dots, \text{VI}$) は動く特異点を持たない 2 階の非線形常微分方程式である. K. Okamoto は Painlevé 方程式のハミルトニアン構造を明らかにし, ベックルント変換群として作用するアフィン・ワイル群対称性を持つことを示した. 最近の論文 [4, 5] において, H. Nagoya はアフィン・ワイル群対称性を持つ Painlevé 方程式 $P_{\text{II}}, P_{\text{III}}, P_{\text{IV}}, P_{\text{V}}, P_{\text{VI}}$ の量子化があることを示した. 不確定特異点を持つ KZ 方程式との関係についても, M. Jimbo, H. Nagoya and J. Sun [1] によって議論され, P_{I} についてもそこで考えられている. この報告では, ある種の正則性によって量子 Painlevé 方程式のまた別の構築と特徴付けについて示す. この結果は (簡単な部分の) 高野理論 [10, 8, 2, 3] の量子版と見なすことができる. 量子 Painlevé 方程式は次の量子ハミルトニアン系で与えられる:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{1}{h}[f, H_J] + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (J=\text{II}, \text{IV}), \\ t \frac{df}{dt} &= \frac{1}{h}[f, H_J] + t \frac{\partial f}{\partial t} \quad (J=\text{III}, \text{V}), \\ t(t-1) \frac{df}{dt} &= \frac{1}{h}[f, H_J] + t(t-1) \frac{\partial f}{\partial t} \quad (J=\text{VI}), \end{aligned} \quad (1.1)$$

ここで, $[,]$ は $[A, B] := AB - BA$ で定義される交換子である. ハミルトニアン H_J はある正則性を満たすように決定される. 結果として得られるハミルトニアンは次である:

$$\begin{aligned} H_{\text{II}}(q, p, t) &= \frac{1}{2}p^2 - (q^2 + \frac{t}{2})p - bq \\ &\quad (a + b + 2h = 1), \\ H_{\text{III}}(q, p, t) &= q^2p^2 - q^2p + (a + b)qp - bq + tp \\ &\quad (a + b + c + 2h = 1), \\ H_{\text{IV}}(q, p, t) &= tqp - qp^2 - q^2p + ap - bq \\ &\quad (a + b + c + h = 1), \\ H_{\text{V}}(q, p, t) &= q^2p^2 + tq^2p - qp^2 - tqp - (a + c)qp + ap + btq \\ &\quad (a + b + c + d = 1), \\ H_{\text{VI}}(q, p, t) &= q^3p^2 - (1 + t)q^2p^2 - (a + b + c)q^2p + tqp^2 \\ &\quad + (b + c + (a + b)t)qp - d(a + b + c + d - h)q - btp \\ &\quad (e = -a - b - c - 2d + 2h), \end{aligned} \quad (1.2)$$

ここで, q, p は $[q, p] = h$ ($h \in \mathbb{C}$) を満たす正準変数で, a, b, c, d, e はパラメータである. この報告の内容は次の通り. §2 では, ハミルトニアン (1.2) によって与えられる系に対する高野座標の量子版を与える. それは, 系の多項式構造を保つような双正準変換である. 変換されたハミルトニアン *explicit forms* は §3 で与えられる. §4 では, 系 (1.2) が §2, 3 における正則性の条件のもとでただ 1 つに決まることを示す. これがこの本報告の主要結果である. §5 では, 我々の結果と H. Nagoya の結果との一貫性について示す. それは正則性から決められた量子 Painlevé 方程式がアフィン・ワイル群対称性を持つということである. 以下では, スペースの都合上主に P_{II} の場合だけ示す. 他の場合は, 論文 [11] を参照下さい.

2 正準座標

§1 で述べたように, 古典 Painlevé 系のある特徴付けは高野と彼の共同研究者たちの仕事により知られている [10, 8, 2, 3]. これらの仕事において, 彼らは方程式の特異点のブローアップにより, ある有理対称変換を構築した. これらの変換の下で, Painlevé 系は正則ハミルトニアン系に変換される. さらに彼らはこれの反対, つまり, Painlevé 系が対称変換の下で, 正則性によりただ 1 つに特徴付けられるということを示した. 我々の量子 Painlevé 系 (1.2) に対するアプローチは, 上の理論の量子類似にあたる.

量子論においては, 非可換なオペレーターの順序付けによるあいまいさが存在し, 例えば, 古典ハミルトニアンにおいて, このあいまいさを調整する方法は分からない. これを調整するための 1 つの自然な方法が H. Nagoya によって提案された [4, 5]. 彼は, そのあいまいさを調整するために導かれた原理のように Painlevé 系のアフィン・ワイル群対称性を用いた. この報告では, 正則性に基づいた量子 Painlevé 系に対する別のアプローチを試みる. そのために, 高野等の導入した有理正準変換を自然に量子化したものを考え, これらの変換に対して正則に変換されるような量子ハミルトニアン系を探す. もちろん, 正準変換の量子化にもあいまいさの問題はあるが, 変数の単純な順序交換を考えるだけであればその効果はパラメータの読み替えに吸収することができるので, ここでは変数 p が変数 q より右にくるように指定する. すなわち, 我々が出発点とする正準変換は次のものである. これらの変換式は, 古典の場合の変換式 [10, 8, 2, 3] と見かけ上, 同一のものであるが, ここでは変数 q, p と $\{x_j, y_j\}$ は $[q, p] = h$ と $[x_j, y_j] = h$ を満たす量子正準座標である. ハミルトニアン H を特徴付けるためにはこれらの変換が必要十分である (see Theorem 4.1).

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{x_0}, \quad p = -bx_0 - x_0^2 y_0, & x_0 &= \frac{1}{q}, \quad y_0 = -bq - q^2 p, \\ q &= \frac{1}{x_1}, \quad p = t + \frac{2}{x_1^2} - ax_1 - x_1^2 y_1, & x_1 &= \frac{1}{q}, \quad y_1 = 2q^4 - q^2 p + tq^2 - aq. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Proposition 2.1 (正則性) 系 (1.2) は変換 (2.1) の下で, 多項式ハミルトニアン系に変換される.

この命題の証明は次のセクションで与える. そこでは, それぞれのチャートにおける変換されたハミルトニアンを陽に与える.

3 他のチャートにおけるハミルトニアン

この章では, 命題 2.1 の証明を行う. 証明は explicit な計算で与えられる. ここで, H_i の式において, x, y を x_i, y_i の代わりに用いる.

P_{II} の系は次のように書ける .

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = p - q^2 - \frac{t}{2}, \\ \frac{dp}{dt} = 2qp + b. \end{cases} \quad (3.1)$$

(2.1) の最初の方程式で与えられる新しい座標を用いて , これを変換する. $q = \frac{1}{x}$ であるので ,

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} \frac{1}{x}. \quad (3.2)$$

を得る . (3.1) と (3.2) より,

$$\frac{dx}{dt} = x^4 y + (b-h)x^3 + \frac{t}{2}x^2 + 1. \quad (3.3)$$

を得る . 同様にして, $p = -bx - x^2 y$ であるので ,

$$\frac{dp}{dt} = -b \frac{dx}{dt} - (x \frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dt} x) y - x^2 \frac{dy}{dt}. \quad (3.4)$$

を得る . (3.1) と合わせると ,

$$\frac{dy}{dt} = 3(h-b)x^2 y - b(b-h)x - \frac{t}{2}b - 2x^3 y^2 - txy. \quad (3.5)$$

となる . つまり , (x, y) 変数に変換された系がまた次の多項式ハミルトニアンを持ったハミルトニアン系で書けることが証明された:

$$H = \frac{1}{2}x^4 y^2 - (h-b)x^3 y + \frac{1}{2}b(b-h)x^2 + \frac{t}{2}x^2 y + \frac{t}{2}bx + y. \quad (3.6)$$

同様に , 式 (2.1) の 2 番目の変換の下で得られるハミルトニアンは以下ようになる .

$$H = \frac{1}{2}x^4 y^2 + (a-h)x^3 y + \frac{1}{2}a(a-h)x^2 - \frac{1}{2}tx^2 y - \frac{1}{2}atx - y. \quad (3.7)$$

4 高野理論による H_I の特徴付け

この章では, 正則性の条件からハミルトニアン H_I がどのように決められたかを示す. 結果として, 式 (1.2) のハミルトニアン H_I がただ 1 つに決まることが分かる . これは高野理論 [10, 8, 2, 3] の量子類似にあたる.

Theorem 4.1 正準変換 (2.1) の下で , 正則性を持つ多項式ハミルトニアンはただ 1 つに決まる.

Proof. はじめに , 適当に次数を決めた場合について考える. 例えば次数 4 の場合, 次のようにパラメータをつけたハミルトニアンを考える .

$$\begin{aligned} H = & k_1 q^4 p^4 + k_2 q^4 p^3 + k_3 q^4 p^2 + k_4 q^4 p + k_5 q^4 + k_6 q^3 p^4 + k_7 q^3 p^3 + k_8 q^3 p^2 \\ & + k_9 q^3 p + k_{10} q^3 + k_{11} q^2 p^4 + k_{12} q^2 p^3 + k_{13} q^2 p^2 + k_{14} q^2 p + k_{15} q^2 + k_{16} q p^4 \\ & + k_{17} q p^3 + k_{18} q p^2 + k_{19} q p + k_{20} q + k_{21} p^4 + k_{22} p^3 + k_{23} p^2 + k_{24} p. \end{aligned} \quad (4.1)$$

この H によって決められる変数 p, q に関する微分方程式を用いることにより, §3 と同様の方法により, 式 (2.1) の最初の変換の下で, 変換された変数 x, y に関する微分方程式を計算することが

できる．そうすると， x^{-5} 次までの極があることが分かる．同様に，式 (2.1) の 2 番目の変換に対しては x^{-13} 次までの極があることが分かる．これらの 2 つの変換により生じる極を消す条件より，式 (4.1) の任意パラメータをただ 1 つに決めることができる．

実際にこれらの条件（未知係数 k_1, \dots, k_{24} ）を解くと，次の結果を得る．

$$\begin{cases} k_{14} = -\frac{1}{2(a+b+2h)}, \\ k_{20} = -\frac{b}{a+b+2h}, \\ k_{23} = \frac{1}{2(a+b+2h)}, \\ k_{24} = -\frac{1}{2(a+b+2h)}, \\ k_i = 0 \quad (\text{otherwise}). \end{cases} \quad (4.2)$$

これは，要求される正則性を持ったハミルトニアン系が次のようにただ 1 つに決まることを示している：

$$H_{\text{II}} = -\frac{tp + 2bq - p^2 + 2q^2p}{2(a+b+2h)}. \quad (4.3)$$

パラメータを $a+b+2h=1$ と規格化することにより，式 (1.2) を得る．

上の計算において，技術上の理由のため，多項式ハミルトニアンをの次数を固定した．しかしながら，ただ 1 つであるということは次数を上げてても変わらない．そのことは，次の考察により分かる：作り方から，未定係数 \vec{k} に対する方程式は線型非同次方程式

$$A(h)\vec{k} = \vec{c} \quad (4.4)$$

であり，ここで係数 A は h について多項式であり，方程式 (1.1) の右辺の 2 番目の項からくる非同次項 \vec{c} は h に依存しない．この方程式の解は，極限 $h \rightarrow 0$ とすることにより高野理論（古典版）における類似問題の解に帰着される．一般のパラメータ h に対して解 (4.4) の唯一性を示すためには， $\det(A(h))$ が恒等的にゼロでないことを示す必要があるが，最後の条件は古典の結果 $\det(A(0)) \neq 0$ から従う．（証明終わり）

5 アフィン・ワイル群対称性

この章では，量子 Painlevé 方程式の我々のハミルトニアン (1.2) と H. Nagoya によって提案されたハミルトニアンとの比較を行う．これにより，下の命題 5.1 に述べているように，我々の系は H. Nagoya の系とパラメータの読み替え及び，正準変数のスケール変換により等しいことが分かる．これがこの章の主結果である．このことは正則性条件により決められた我々の系がそれぞれ， $P_{\text{II}}, P_{\text{III}}, P_{\text{IV}}, P_V, P_{\text{VI}}$ に対して $A_1^{(1)}, C_2^{(1)}, A_2^{(1)}, A_3^{(1)}, D_4^{(1)}$ 型のアフィン・ワイル群対称性を持つことが分かる．¹

H. Nagoya [4, 5] によって与えられたハミルトニアン \hat{H}_{II} を思い出そう (see also [1]).

$$\hat{H}_{\text{II}} = -qpq + \frac{1}{2}p^2 - \frac{t}{2}p - 2\alpha_1q \quad (5.1)$$

ここで， $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$.

¹正則性を保つ変換とアフィン・ワイル群のベックルト変換との関係は古典の場合，[6] で議論されているがここではこれは考えない．

Proposition 5.1 次で与えられる変数 p, q と \hat{p}, \hat{q} の変換

$$\begin{cases} p = -2\hat{p}, & q = \hat{q} \quad (\text{for } P_{II}) \\ p = \hat{p}, & q = \hat{q} \quad (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (5.2)$$

と, 次で与えられるパラメータの読み替え

$$\alpha_1 = \frac{b-h}{2} \quad (5.3)$$

により, ハミルトニアン (1.2) と Nagoya のハミルトニアン (5.1) は一致する.

命題 5.1 は正則性から定義した我々の系がアフィン・ワイル群対称性を持つことを示している. 便利のため, Nagoya のハミルトニアンの記号で対称性の変換を書き下しておく.

| | α_0 | α_1 | q | p |
|-------|------------------------|------------------------|---|---|
| s_0 | $-\alpha_0$ | $\alpha_1 + 2\alpha_0$ | $q + \frac{\alpha_0}{-p-q^2-\frac{1}{2}}$ | $p - q \frac{\alpha_0}{-p-q^2-\frac{1}{2}} - \frac{\alpha_0}{-p-q^2-\frac{1}{2}} q - \frac{\alpha_0^2}{(-\frac{1}{2}-p-q^2)^2}$ |
| s_1 | $\alpha_0 + 2\alpha_1$ | $-\alpha_1$ | $q - \frac{\alpha_1}{p}$ | p |

6 結論

この報告では, 正則性による量子 Painlevé 方程式の構築と特徴付けを行った. これは量子 Painlevé 方程式に期待される”量子 Painlevé 性”の研究に対する最初のステップと見ることができるであろう.

得られた結果の拡張の方向としては, Painlevé 方程式の自然な多変数化である Garnier 系が考えられる. Garnier 系の量子化については, 結果はまだ何も知られていないが, 初期値空間を与える正準座標が M. Suzuki によって分かっている [9] ので, これを手がかりに量子 Garnier 系を構築することは同様に可能であろうと考えられる. また最近, Y. Sasano が Takano 理論を拡張し, 正則性を持ったハミルトニアン系として新しい方程式 (Sasano 系) を発見した [7]. 特に, $D_n^{(1)}$ 型の対称性を持つ方程式のシリーズは, Painlevé V, VI 方程式の拡張と考えられている. Sasano の結果の量子類似も興味深い将来の課題である.

謝辞

貴重なご助言と励ましをして下さった山田泰彦先生, そして議論に付き合っ下さった名古屋創さんに心から感謝致します.

参考文献

- [1] Jimbo, M., Nagoya, H., Sun, J.: Remarks on confluent KZ equation for sl_2 and Quantum Painlevé Equations, J. Phys. A: Math. Theor., **41** (2008), 175205.
- [2] Matano, T., Matsumiya, A., Takano, K.: On some Hamiltonian structures of Painlevé systems II, J. Math. Soc. Japan, **51** (1999), 766-843.
- [3] Matsumiya, A.: On some Hamiltonian structures of Painlevé systems III, Kumamoto J. Math., **10** (1997), 45-73.

- [4] Nagoya, H.: Quantum Painlevé systems of type $A_l^{(1)}$, Int. J. Math., **15**(10) (2004), 1007-1031.
- [5] Nagoya, H.: *Quantum Painlevé systems*, abstract for the meeting of the Mathematical Society of Japan (Saitama Univ., 2007), in Japanese.
- [6] Noumi, M., Takano, K., Yamada, Y.: Bäcklund transformations and the manifolds of Painlevé systems, Funkcial. Ekvac., **45** (2002), 237-258.
- [7] Sasano, Y.: Higher order Painlevé equations of type $D_l^{(1)}$, RIMS Kokyuroku **1473** (2006), 143-163.
- [8] Shioda, T., Takano, K.: On some Hamiltonian structures of Painlevé systems I, Funkcial. Ekvac., **40** (1997), 271-291.
- [9] Suzuki, M.: Space of initial conditions of Garnier system and its degenerate systems in two variables, J. Math. Soc. Japan., **58** (2006), 1079-1117.
- [10] Takano, K.: Defining manifolds for Painlevé equations, in *Toward the exact WKB analysis of differential equations, linear and nonlinear* (Eds. C. J. Howls, T. Kawai and Y. Takei), 261-269, Kyoto Univ. Press, Kyoto, 2000.
- [11] Ueno, Y.: Polynomial Hamiltonians for Quantum Painlevé Equations, Int. J. Math., to appear.