

複雑ネットワーク上におけるRandom Walk と Preferential Walk のダイナミクス

野村, 宗広
東京大学工学研究科

西成, 活裕
東京大学工学研究科、科学技術振興機構さきがけ

<https://doi.org/10.15017/14298>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 20ME-S7 (26), 2009-02. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン：

権利関係：



応用力学研究所研究集会報告 No.20ME-S7
「非線形波動の数理と物理」(研究代表者 矢嶋 徹)
共催 九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.20ME-S7
Mathematics and Physics in Nonlinear Waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2008

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 26 (pp. 155-160)

複雑ネットワーク上における Random Walk と Preferential Walk のダイナミクス

野村 宗広 (NOMURA Munehiro),
西成 活裕 (NISHINARI Katsuhiko)

(Received February 4, 2009)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
February, 2009

複雑ネットワーク上における Random Walk と Preferential Walk のダイナミクス

東京大学 工学部 航空宇宙工学科

野村宗広、西成 活裕

概要

複雑ネットワークとは単純化したネットワークモデルではなく実在するネットワークにみられるような複雑な構造を持つモデルという意味で複雑という。複雑ネットワーク上の Random Walk と Preferential Walk の CA モデルによるシミュレーションを行い、幾何学的性質と動的性質の関係を明らかにした。またその理論解析を行いシミュレーション結果によい一致をえることができた。具体的には幾何学的性質としてクラスター係数と次数分布に焦点を当て、動的性質として流量と自由行程に注目した。これにより高いクラスター性が流量の増加に寄与することを明らかにし、スケールフリーネットワーク上の Random Walk、Preferential Walk における粒子の自由行程分布にスケールフリー性が現れることを示した。

1 研究背景と目的

我々はネットワークの中を生きているが我々はネットワークのことをあまり知らない。

ネットワークに関する研究は昔から行われていたがそれは主として数学家によって抽象的なモデルとして扱われる程度であった。その後も単純なモデルでの物理現象の解析は行われてはきたが、現実的の複雑なネットワーク上の解析はモデルの不在により行われてこなかった。しかし近年、A.-L.Barabasi や D.Watts により現実社会に存在する複雑ネットワークの確率モデルがそれぞれに提案された。これにより近年複雑ネットワークに関する研究が盛んに行われているが、ネットワーク自体の形成、成長に関するものがほとんどであり、ネットワーク上を飛行機が運動するというようなモデルはあまり考えられてこなかった。

そこで本研究ではネットワークの幾何学的性質がネットワーク上を運動する飛行機の運動にもたらす影響に注目し、両者の関係を CA を用いたコンピュータシミュレーションにより明らかにした。また注目したノードの隣接先ノード次数を平均化することで理論解析を行った。

2 ネットワークモデル

本研究では WS モデル、BA モデルという二つのネットワークモデルを用いてシミュレーションを行った。WS モデルとは高いクラスター性を持つネットワークモデルであり、BA モデルとは次数分布がべき則に従う、いわゆるスケールフリーネットワークのモデルである。

2.1 WS モデル条件

ノード数 $N = 1000$ 、初期格子次数 $k_0 = 10$ である格子グラフに対し rewiring ratio、 p_r を $0 \leq p_r \leq 1$ の 0.1 刻みに設定することで図のようなクラスター係数を持つスモールワールドネットワークを形成した。

2.2 BA モデル条件

ノード数 $N = 1000$ とし、 $t = 0$ において $m_0 = 3, 5, 10$ である完全グラフ K_{m_0} を構成し時刻が 1 進むごとに次数 $k_0 = 1$ を持つノードを 1 つずつ追加する。その追加されたノードは確率 $\Phi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_{j=1}^{t+m_0-1} k_j}$ で選択したノードに隣接する。

3 Random Walk と Preferential Walk

本研究では、ネットワーク上を運動する粒子は Random Walk、Preferential Walk をそれぞれするものとした。Random Walk ではその名のとおり現在いるノード

から次にホップするノードを選ぶ確率が一様であり各飛行機は隣接するノードの中からホップ先のノードをランダムに選ぶ。また Preferential Walk では各飛行機は指向性を持っており、大きな次数を持つノードを目指して運動する。現在いるノードからホップ先のノードを選ぶ確率が隣接するノードの次数の α 乗に比例する。前者は運動方向が構造に依存しない事象、例えばブラウン運動を、後者は運動方向が構造に依り、次数の大きなノードに対して指向性を持つ運動、例えば飛行機の運航をあらわすと考える。つまりノード i から j へのホップ確率を Π_i^j とすると、Random Walk では $\Pi_i^j = \frac{1}{k_i}$ となり Preferential Walk では $\Pi_i^j = \frac{A_{ij}k_j^\alpha}{\sum_h A_{ih}k_h^\alpha}$ となる。

4 ダイナミクス性質

本研究ではネットワーク上のダイナミクスにみる性質として以下の二つを用いた。

4.1 流量

本研究ではシミュレーションに CA を用い1つのセルには1つの飛行機が占有するのである飛行機が進もうとしてもホップ先が埋まっていれば動くことはできない。もしくはホップ先が埋まっていなかったとしてもほかに複数の飛行機がホップしてきたら1つのみが進むことができる。このような中、単位時間あたりに運動することができた飛行機数のネットワーク全体に対する和を流量 Q と定義した。

4.2 自由行程

ある時刻 t にある飛行機をみてみたときにその飛行機が時刻 t 時点まで止まることなく連続して運動してきた行程数をその飛行機の時刻 t での自由行程 (free path) f_p と定義した。この自由行程とは連続して運動してきた行程数であるので一度止まるとその時点で0となり、またそこからの自由に動けた行程数が自由行程となる。また Random Walk、Preferential Walk をする飛行機の中には連続して何ステップも進むものもあれば、1ステップで動かなくなるものもある。よって、その各飛行機の自由行程に関する密度分布を自由行程分布と定義した。

5 シミュレーションと理論解析

5.1 シミュレーション

時刻 $t = 0$ においてネットワーク上のノードに粒子をランダムにセットした。セットする粒子数 S を

$0 \leq S \leq 1000$ において間隔 $\Delta S = 10$ で動かし十分な時間経過後 (800step から 1000step) に観測を開始し平均をとった。なおこのネットワーク生成から観測までの過程を5回行った。

5.1.1 クラスター係数と流量

Random Walk と Preferential Walk における $p_r = 1$ のランダムグラフの場合と $p_r = 0.1$ のスモールワールドネットワークの基本図は図1となった。

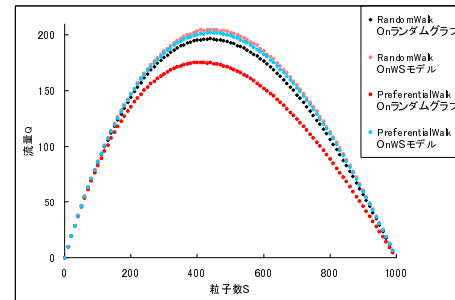


図1 ρ vs. Q

図1よりクラスター性が高いほど最大流量は大きいという傾向が見られる。さらに Preferential Walk をする場合、クラスター性が低いほど最大流量をとる最適密度 ρ_{opt} が低下する傾向も見られる。そこで Random Walk と Preferential Walk における最大流量とクラスター係数の関係は図2となることが分かった。

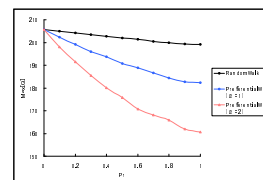


図2 p_r vs. $\max[Q]$

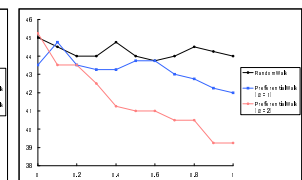


図3 p_r vs. ρ_{opt}

またその最適密度 ρ_{opt} とクラスター係数の関係は図3となることが分かった。

5.1.2 考察1

図2より最大流量がクラスター係数に対して単調減少であることからクラスター性は最大流量の増加に影響を与えることが示された。またそのクラスター性の影響は Preference が強いほどより顕著であるといえる。ここでこの単調減少関数が線形であると仮定して $\max[Q] = -ap_r + ba > 0$ とすることで、式??から

$$\max[Q] = a \left(\frac{2(2k-1)}{3(k-1)} C \right)^{\frac{1}{3}} + b - a \quad (1)$$

と導いた。ここでクラスター係数と最大流量の増加量に注目すると

$$d(\max[Q]) = \frac{2(2k-1)a}{9(k-1)} \left(\frac{2(2k-1)}{3(k-1)} C \right)^{-\frac{2}{3}} \quad (2)$$

であるのでクラスター性の最大流量への寄与は増加分という点からみるとクラスター係数が小さいネットワークにこそあるといえる。つまりランダムグラフのようにクラスター係数の小さいグラフのほうが少しのクラスター性の増加によってより多くの流量改善幅を得ることができる。

5.1.3 次数分布と流量

次数分布がべき則に従うスケールフリーネットワークとひとえにいてもべき則のべき数の違いなどによりさまざまなものがある。さらにネットワークは決定論的ではなく確率論的に生成したので一つ一つ幾何学的性質は異なる。そこでこのシミュレーション2ではスケールフリーネットワーク上の Random Walk による流量について幾何学的性質とどのように関係があるのかを以下の性質について解析した。

- 次数分布のべき数
- 最大次数:ネットワーク上のノードのうち最大の次数
- $p(1)$:次数が1であるノードの存在確率密度

Random Walk においてべき数と最大流量の関係は図4のようになった。これから次数分布のべき数と最大流量とは相関が薄いことが分かる。

次に Random Walk において最大次数と最大流量の関係は図5のようになった。最大次数に関係なく最大流量が分布していることが分かる。この一部に関して基本図でみると図6のようになる。ネットワーク上の最大次数の大小関係は $MaxDegree50 < MaxDegree100 < MaxDegree150 < MaxDegree200 < MaxDegree250 < MaxDegree300$ であるが最大流量の大小関係は $MaxDegree50 > MaxDegree250 > MaxDegree100 > MaxDegree150 > MaxDegree200 > MaxDegree300$ となっている。よって最大次数と流量には相関が薄いことが分かる。

Random Walk において $p(1)$ と最大流量の関係は図7のようになった。 $p(1)$ に関して最大流量分布は単調減少となっている。また $p(1)$ に対して最大流量が一对一に対応している。これより最大流量は $p(1)$ と強い相関があることが分かった。

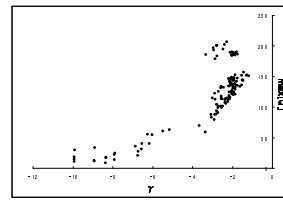


図4 γ vs. $\max[Q]$

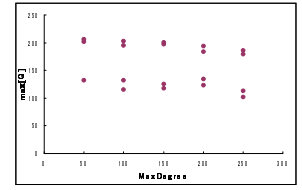


図5 $MaxDegree$ vs. $\max[Q]$

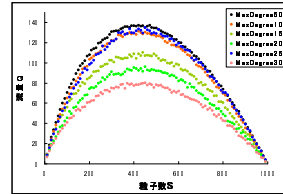


図6 $MaxDegree$ vs. $\max[Q]$

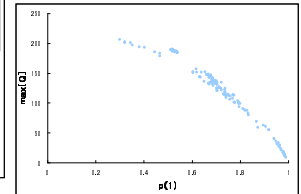


図7 $P(1)$ vs. $\max[Q]$

5.1.4 考察2

ネットワークのべき数、最大次数と最大流量の間には優位な相関は見られず、 $p(1)$ と最大流量の間には一対一の相関がみられた。このことからスケールフリーネットワーク上をランダムに運動する何らかの群がある場合、その群の最大流量はネットワークの幾何学的性質 $p(1)$ に従って一意に決まるといえることができる。裏を返せば、ランダムに運動する限りにおいてはその群の流量はハブの次数には依らないということである。つまり巨大なハブがネットワーク上に存在していても $p(1)$ が小さければ最大流量は大きくなり、逆にハブが小さくても $p(1)$ が大きければ最大流量は小さくなるということがいえる。

5.1.5 次数分布と自由行程分布

第3章で述べたように Walk する各粒子は進行方向一つ前に粒子がいる場合進むことができないという排他性を持ったセル上を動く。そこで妨害されことなく連続して運動したステップ数を分子運動に模して自由行程 (free path) fp と呼ぶ。この自由行程を単位時間あたりの分布を求め平均したものを求めた。

5.1.6 BA モデル

Random Walk において自由行程分布を求めると図8のようになった。また Preferential Walk において自由行程分布を求めると図9のようになった。

5.1.7 ランダムグラフ

Random Walk において自由行程分布を求めると図10のようになった。

Preferential Walk において自由行程分布を求めると

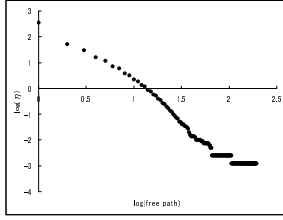


図 8 BA モデル上の RandomWalk による自由行程分布

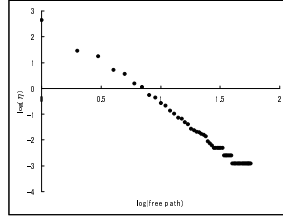


図 9 BA モデル上の PreferentialWalk による自由行程分布

図 11 のようになった。

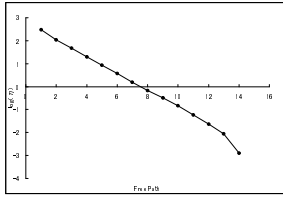


図 10 ランダムグラフ上の RandomWalk による自由行程分布

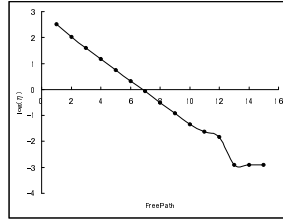


図 11 ランダムグラフ上の PreferentialWalk による自由行程分布

5.1.8 考察

図 10 より RandomWalk の自由行程分布は指数分布 $P(fp) \propto \exp(-\alpha fp)$ になることがわかる。図 11 より PreferentialWalk の自由行程分布は $P(fp) \propto \exp(-\alpha fp)$ となることがわかる。ここでランダムグラフが三次元空間に対応し RandomWalk がブラウン運動に対応すると考えるとランダムグラフ上の RandomWalk は 3 次元実空間上の分子のブラウン運動に対応していると考えられるとする。こう考えるとランダムグラフ上での自由行程分布が指数分布にのっていることは自然な結果であると考えられる。

しかし BA モデル上では、図 8、図 9 よりともに自由行程分布は $P(fp) \propto fp^{-\beta}$ となっていることがわかる。この結果は先ほどのブラウン運動の例では説明することはできず、非常に不思議なものである。このようにスケールフリーなネットワーク上のダイナミクス、しかも RandomWalk や PreferentialWalk のような単純な運動によって生まれる自由行程分布がスケールフリーのべき則に従うということは非常に興味深い結果だといえる。

5.2 理論解析

各ノードには排他性があり一つのノードには一つの粒子しか入れないので同時に x 個の粒子が入ろうとしても $x-1$ 個の粒子ははいることはできない。この移動できなかった $x-1$ 個分が流量の低下分となる。そこで定常状態を考えてあるノード i に x 個の粒子が入ろうとする確率を a_x^i としてノード i に粒子が入っている確率を b^i とすると、ノード i における流量低下分 Δq_i は

$$\begin{aligned} \Delta q_i &= -(1-b^i) \sum_{x=1}^{\Theta} a_x^i (x-1) + b^i \sum_{x=0}^{\Theta} a_x^i x \\ &= - \sum_{x=1}^{\Theta} a_x^i x + (1-b^i) \sum_{x=1}^{\Theta} a_x^i \end{aligned} \quad (3)$$

となる。ここで Θ とは定常状態でノード i に隣接するノードにいる総粒子数である。よって流量 Q は、

$$Q = \rho N - \sum_{i=1}^N \Delta q_i \quad (4)$$

のように表される。

5.2.1 クラスター係数と流量

まず $p_r = 0$ である格子グラフについて考えると、各ノードの次数は $k = 10$ で等しく、境界を無視するとどのノードからみても構造が対象である。よって a_x^i 、 Θ 、 b^i は i によらず

$$\begin{aligned} a_x &= {}_{\Theta}C_x \left(\frac{1}{k}\right)^x \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{\Theta-x} \\ \Theta &= bk \\ b &= \rho \end{aligned} \quad (5)$$

となる。これより流量は

$$Q = (\rho - \Delta q)N \quad (6)$$

となった。図 12 よりシミュレーションの結果と一致していることが分かる。

次に $p_r = 1$ であるランダムグラフの場合について考える。ランダムグラフの次数分布は図??よりポアソン分布になる。ここで少し荒い近似を用いてノード i に隣接するノードの次数を等しく $k = 10$ として考える。よって a_x^i 、 Θ は

$$\begin{aligned} a_x &= {}_{\Theta}C_x \left(\frac{1}{\langle k \rangle}\right)^x \left(1 - \frac{1}{\langle k \rangle}\right)^{\Theta-x} \\ \Theta &= \rho k_i \end{aligned} \quad (7)$$

となる。 b_i について考えると前述のように隣接するノードの次数は同じと考えるので、ノード i が粒子に

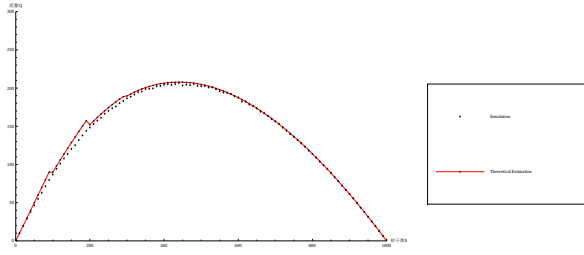


図 12 格子グラフ上の RandomWalk による流量の理論解析値とシミュレーション結果の比較

よって占有される確率はノード i の次数に比例する。
よって離散時間のマスター方程式より

$$b_{t+1}^i = \rho b_t^i + \frac{\rho k_i}{\langle k \rangle} (1 - b_t^i) \quad (8)$$

と書くことができる。定常状態を考えると、 $b_{t+1}^i = b_t^i$ であるから

$$b^i = \frac{1}{1 - \rho + \frac{\rho k_i}{\langle k \rangle}} \quad (9)$$

と求まるから式 3、式 4 より Q はそれぞれ

$$Q = (\rho - \sum_{k_i} P(k_i) \Delta q_{k_i}) N \quad (10)$$

となった。これも図 13 よりシミュレーション結果に一致した。

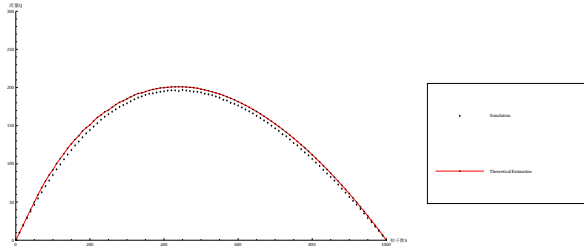


図 13 ランダムグラフ上の RandomWalk による流量の理論解析値とシミュレーション結果の比較

5.2.2 次数分布と自由行程分布

シミュレーションによって自由行程分布に関して興味深い結果を得ることができた。その結果について理論的な側面からもアプローチしてみる。そこであるノードが時刻 t において自由行程 x である確率を p_t^x とおく ($\sum_{x=0}^{\infty} p_t^x = 1$)。すると連続時間のマスター方程式から

$$\begin{aligned} \frac{dp_t^{x+1}}{dt} &= (1 - \tau(x, t)) p_t^x - p_t^{x+1} (x \geq 0) \\ \frac{dp_t^0}{dt} &= \sum_{x=1}^{\infty} \tau(x, t) p_t^x - (1 - \tau(x, t)) p_t^0 \end{aligned} \quad (11)$$

となる。式中の $\tau(x, t)$ は単位時間当たりの粒子一つの衝突する確率である。

5.2.3 ランダムグラフ

ランダムグラフ上の RandomWalk の場合、各粒子はランダムなネットワークの上を Random に動くから衝突確率 $\tau(x, t)$ は粒子のいる場所、時間に依らない。よって式 11 は、

$$\begin{aligned} \frac{dp_t^{x+1}}{dt} &= (1 - \tau) p_t^x - p_t^{x+1} (x \geq 0) \\ \frac{dp_t^0}{dt} &= \sum_{x=1}^{\infty} \tau p_t^x - (1 - \tau) p_t^0 \end{aligned} \quad (12)$$

となる。

ここであるノード i での衝突確率 τ_i を考えると

$$\tau_i = (1 - b_i) \left\{ \sum_{j=1}^{\rho(k_i-1)} \frac{\rho(k_i-1) C_j}{x+1} \left(\frac{1}{\langle k \rangle} \right)^x \left(1 - \frac{1}{\langle k \rangle} \right)^{\rho(k_i-1)-x} \right\} + b_i \quad (13)$$

のように求められた。式中の b_i は式 13、式 8 よりあるノード i の衝突確率、占有確率が分かったのでネットワーク全体での平均衝突確率はポワソン分布より以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_i \\ &= \sum_{k_i=1}^{\infty} P(k_i) \tau_i \end{aligned} \quad (14)$$

以上の関係式を用いて 式 12 の定常状態を考えることにより p^x は

$$\begin{aligned} p^{x+1} &= (1 - \tau) p^x (x \geq 0) \\ p^0 &= \frac{\sum_{x=1}^{\infty} \tau p^x}{1 - \tau} \end{aligned} \quad (15)$$

となる。これを解くとランダムグラフ上の RandomWalk における自由行程分布は

$$p^x = (1 - \tau)^x p^0 (x \geq 0) \quad (16)$$

と求めることができた。式 16 の両辺の対数をとると

$$\log p^x = x \log(1 - \tau) + \log p^0 \quad (17)$$

となるので指数の底が傾きとして現れる。これをシミュレーション結果と比較すると図 14 のようになり一致した。

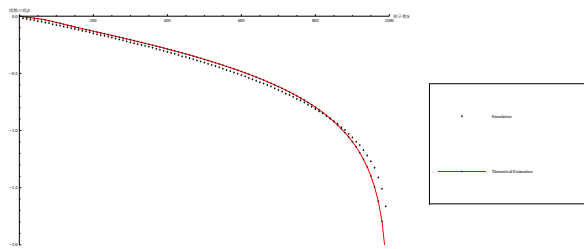


図 14 ランダムグラフ上の RandomWalk による自由行程分布に対する理論解析値とシミュレーション結果との比較

6 結論

本研究では複雑ネットワーク上の RandomWalk、PreferentialWalk のシミュレーション及び理論解析を行った。これによりダイナミクスの性質とネットワークの幾何学的性質の関係について主に以下のことを明らかにした。

- WS モデルにおける検討により、クラスター性が流量の増加に影響をもたらすことを明らかにした。
- スケールフリーネットワーク上の RandomWalk において次数が $k = 1$ であるノードの密度に流量が従うことを明らかにした。
- スケールフリーネットワーク上の RandomWalk、PreferentialWalk による自由行程分布はスケールフリー性を持つことを発見した。

直近の課題としてはシミュレーション結果に対する理論解析をさらに深めることがある。また将来的な課題としては今回のような抽象的なモデルではなく現実 に則したモデルにおいて幾何的性質と動的性質に関する評価を行うことがあると認識している。

参考文献

- [1] Albert, R., and Barabasi, A.-L. :”Statistical mechanics of complex networks”, Reviews of Modern Physics **74**, pp. 47-97 (2002)
- [2] D. Watts, S. Strogatz:”Collective dynamics of ‘small-world’ networks”, Nature **393**, 440 (1998)
- [3] M.E.J. Newman:”The structure and function of complex networks”, SIAM Rev. **45**, 167 (2003)
- [4] 増田直紀 今野紀雄 複雑ネットワークの科学 産業図書 (2005)