

三角型Ruijsenaars-Schneider 模型の先進Green 関数

有川, 晃弘
筑波大学大学院数理物質研究科物理

<https://doi.org/10.15017/14288>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 20ME-S7 (16), 2009-02. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン：

権利関係：



応用力学研究所研究集会報告 No.20ME-S7
「非線形波動の数理と物理」 (研究代表者 矢嶋 徹)
共催 九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.20ME-S7
Mathematics and Physics in Nonlinear Waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2008

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 16 (pp. 103-108)

三角型 Ruijsenaars-Schneider 模型の 先進 Green 関数

有川 晃弘 (ARIKAWA Mitsuhiro)

(Received February 2, 2009)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
February, 2009

三角型 Ruijsenaars-Schneider 模型の先進 Green 関数

筑波大学大学院数理物質研究科物理 有川晃弘 (ARIKAWA Mitsuhiro)

概 要 Macdonald 多項式の性質を用いて三角型 Ruijsenaars-Schneider 模型の先進 Green 関数の導出を行う。他の模型の相関関数との関連についても議論する。

1 はじめに

本研究では三角型 Ruijsenaars-Schneider 模型の先進 Green 関数の導出について述べる。Ruijsenaars-Schneider 模型 [1] とは以下のハミルトニアンで与えられる量子多体系である。

$$\mathcal{H}_{RS} = \frac{c^2}{2} (\mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_-) \quad (1.1)$$

ここで $\mathcal{H}_\pm$ は以下で与えられる。

$$\mathcal{H}_\pm = \sum_{j=1}^N \prod_{k \neq j} \left(\frac{\sin(x_j - x_k \mp i\beta/c)}{\sin(x_j - x_k)} \right)^{1/2} \exp \left[\mp \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \left(\frac{\sin(x_j - x_k \pm i\beta/c)}{\sin(x_j - x_k)} \right)^{1/2} \quad (1.2)$$

ここで β, c は定数。 $q = e^{-2/c}$, $t = q^\beta$, $z_j = e^{2ix_j}$ とすると基底状態の波動関数は Δ を以下のように定義したとき

$$\Delta = \prod_{j \neq k} \prod_{n > 0} \frac{1 - q^n z_j / z_k}{1 - q^n t z_j / z_k} \quad (1.3)$$

$\Delta^{1/2}$ で表される。さらに正の定数 c は”光速度”のようにみなすことが可能であり $c \rightarrow \infty$ の極限では

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (\mathcal{H}_{RS} - Nc^2) = \mathcal{H}_S \quad (1.4)$$

$$\mathcal{H}_S = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 + \sum_{j < k} \frac{\beta(\beta-1)}{\sin^2(x_j - x_k)} \quad (1.5)$$

となって長さ π の周期境界条件を課した r^{-2} 型の相互作用をもつ、Sutherland 模型 [2] に帰着する。基底状態は $\Delta^{1/2} \rightarrow \prod_{j \neq k} \sin^{\beta/2}(x_j - x_k)$ となる。 r^{-2} 型の相互作用をもつ可解系の中では Haldane-Shastry 模型 [3, 4] とよばれる $S = 1/2$ スピン格子系

$$\mathcal{H}_{HS} = \sum_{i < j} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j, \quad (1.6)$$

ここで $J_{ij} = (\frac{\pi}{L})^2 / \sin^2 \frac{\pi(i-j)}{L}$ (L は系の長さ) がある。三角型 Ruijsenaars-Schneider 模型ではこれまでに絶対零度での動的密度相関関数 $\langle 0 | \rho(x, t) \rho(0, 0) | 0 \rangle$ (ここで $|0\rangle$ は基底状態を表す), 遅延 Green 関数 $\langle 0 | \psi^\dagger(x, t) \psi(0, 0) | 0 \rangle$ が既に求められている [5]。一方”非相対論的”模型である Sutherland 模型については上記の動的相関関に加え [6, 7]、先進 Green 関数 $\langle 0 | \psi(x, t) \psi^\dagger(0, 0) | 0 \rangle$ が求められている [8]。Sutherland 模型 ($\beta = 2$) の固有状態を用いて Haldane-Shastry 模型の第 1 Brillouin 領域の固有

状態を表せるので Haldane-Shastry 模型の相関関数の表式を (一部であるが) 導出することが可能である [9, 10]。以下の形で表される Weierstrass $\wp$ 関数 ($\omega_1 = L, \omega_2 = i\kappa, \kappa$ は実数)

$$\wp(x) \equiv \frac{1}{x^2} + \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \left[\frac{1}{(x - m\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right]$$

は極限として一つは

$$\wp(x)|_{\kappa \rightarrow \infty} = \frac{\pi^2}{L^2} \left(\frac{1}{\sin^2(\pi x/L)} - \frac{1}{3} \right). \quad (1.7)$$

となるため、Haldane-Shastry 模型は $J_{ij} \rightarrow J \times \wp(i-j)$ とした Inozemtsev 模型 [11] に一般化される。他方、別の極限として

$$\left(\frac{\kappa^2}{4\pi^2} \exp \frac{2\pi}{\kappa} \right) \left[\wp(x) - \frac{\pi^2}{3\kappa^2} \right] \Big|_{\kappa \rightarrow 0} = \delta_{1x} + \delta_{L-1,x}, \quad (1.8)$$

という関係式を満たすことから Inozemtsev 模型は最近接相互作用をもつ Heisenberg 模型とも関係する。ホール自由度がある場合について r^{-2} 型の相互作用のもつ可解系 [12] の動的相関関数の解析形が求められている [13, 14, 15]。故に r^{-2} 型の相互作用をもつ可解系の相関関数の理解は最近接相互作用をもつ可解模型の相関関数の理解にも役立つと考えられる。

2 本論

まず Ruijsenaars-Schneider 模型の固有状態は Macdonald 対称多項式 [16] を用いて表される。この多項式を導入するため、いくつかの数学的な準備を行う。

分割数は非増加の非負の整数の列

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots) \quad (2.1)$$

を用いて表される ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq \dots \geq 0$)。 $|\lambda|$ を以下で定義する。

$$|\lambda| = \sum_i \lambda_i \quad (2.2)$$

半順序 $\lambda \prec \mu$ は $|\lambda| = |\mu|, \lambda \neq \mu$ かつ任意の k について $\lambda_1 + \dots + \lambda_k < \mu_1 + \dots + \mu_k$ が成り立つ 2 項関係である。

τ_j を以下で定義する。

$$\tau_j f(\dots, x_j, \dots) = f(\dots, qx_j, \dots) \quad (2.3)$$

このとき、式 (1.2) で導入した $\mathcal{H}_{\pm}$ は相似変換により

$$\Delta^{-1/2} \mathcal{H}_{\pm} \Delta^{1/2} = t^{\mp \frac{N-1}{2}} \sum_{j=1}^N \prod_{k \neq j} \frac{t^{\pm} z_j - z_k}{z_j - z_k} \tau_j^{\pm 1} \quad (2.4)$$

と表せ Macdonald 演算子 [16] に他ならない。つまり Ruijsenaars-Schneider 模型の固有状態は Macdonald 多項式 $P_{\lambda}(z, q, t)$ を用いて $P_{\lambda}(z, q, t) \times \Delta^{1/2}$ で表せる。 $q = t$ の場合、Macdonald 多項式は Schur 多項式に帰着し、 $t = q^{\beta}, q \rightarrow 1$ では Jack 多項式に帰着する。Macdonald 多項式は

$$P_{\lambda} = m_{\lambda} + \sum_{\mu \prec \lambda} a_{\lambda\mu} m_{\mu} \quad (2.5)$$

の形で表される。ここで m_λ は $\prod_j z_j^{\lambda_j}$ の対称和である。例えば、3 変数でかつ $|\lambda| = 3$ の場合、

$$\begin{aligned} m_{(3)} &= z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 \\ m_{(21)} &= z_1^2(z_2 + z_3) + z_2^2(z_3 + z_1) + z_3^2(z_1 + z_2) \\ m_{(111)} &= z_1 z_2 z_3 \end{aligned}$$

である。このとき Macdonald 多項式は

$$\begin{aligned} P_{(3)} &= m_{(3)} + \frac{(1-t)(1+q+q^2)}{1-q^2t} m_{(21)} + \frac{(1+q)(1+q+q^2)(1-t)^2}{(1-qt)(1-q^2t)} m_{(1^3)} \\ P_{(21)} &= m_{(21)} + \frac{(1-t)(2+q+t+2qt)}{1-qt^2} m_{(1^3)} \\ P_{(1^3)} &= m_{(1^3)} \end{aligned}$$

と表せる。Remark として m_λ で表すと係数はあまり奇麗でないが Schur 多項式で表すとも少なくとも $|\lambda|$ が小さいときの係数は奇麗に表せている (Appendix 参照)。相関関数のスペクトル強度を求めるには

$$\oint_{|z_j|=1} \frac{dz_1 \cdots dz_N}{(2\pi i)^N z_1 \cdots z_N} P_\lambda(\bar{z}) P_\mu(z) |\Delta| = \delta_{\lambda\mu} \mathcal{N}_\lambda, \quad (2.6)$$

$$\prod_{j=1}^N \frac{(z_j : q)}{(az_j : q)} = \sum_{\lambda} c_\lambda P_\lambda, \quad (2.7)$$

$$P_\lambda(z_1, \dots, z_N, 1) = \sum_{\mu} b_{\lambda\mu} P_\mu(z_1, \dots, z_N), \quad (2.8)$$

の $\mathcal{N}_\lambda, c_\lambda, b_{\lambda\mu}$ が必要となる。ここで $(a : q)_\infty = (1-a)(1-aq)(1-aq^2) \cdots$ である。これら $\mathcal{N}_\lambda, c_\lambda, b_{\lambda\mu}$ は既に Macdonald 多項式の性質から既知の量である。

簡単のため β を整数の場合に限る。励起状態は分割数 λ によって表され、先進 Green 関数に寄与するのは

- $\lambda = (\lambda_1)$
- $\lambda = (\lambda_1 + m, m + \beta, \dots, m + \beta, \dots, m + 1, \dots, m + 1, m, \dots, m)$

の2つのタイプに限定される。特に前者の場合 スペクトル強度 $\mathcal{J}_\lambda$ は

$$\mathcal{J}_\lambda \propto \frac{(q^{\lambda_1+1} : q)_\infty (t^{N-1} q^{\lambda_1+1} : q)_\infty}{(q^{\lambda_1} t : q)_\infty (t^N q^{\lambda_1+1} : q)_\infty} \quad (2.9)$$

と求められる [17]。

3 結論

Macdonald 多項式の性質を用いて三角型 Ruijsenaars-Schneider 模型の絶対零度での先進 Green 関数の導出を行った。選択則として β を整数の場合に終状態は1個の準粒子励起と2個の準粒子励起、 β 個の準ホール励起で表せ、1個の準粒子励起の場合のスペクトル強度の具体的な形を与えた。

謝辞

本研究は University of Tsukuba Research Initiative にサポートされました。

A Macdonald 多項式

便宜のため $|\lambda| \leq 5$ の Macdonald 多項式を Schur 多項式で表した表式を与えておく。

$$\begin{aligned}
P_{(1)} &= s_{(1)} \\
P_{(2)} &= s_{(2)} + \frac{q-t}{1-qt} s_{(1^2)} \\
P_{(1^2)} &= s_{(1^2)} \\
P_{(3)} &= s_{(3)} + \frac{(1+q)(q-t)}{1-q^2t} s_{(21)} + \frac{(q-t)(q^2-t)}{(1-qt)(1-q^2t)} s_{(1^3)} \\
P_{(21)} &= s_{(21)} + \frac{(q-t)(1+t)}{1-q^2t} s_{(1^3)} \\
P_{(1^3)} &= s_{(1^3)} \\
P_{(4)} &= s_{(4)} + \frac{(q-t)(1+q+q^2)}{1-q^3t} s_{(31)} + \frac{q(1+q^2)(q-t)(1-t)}{(1-q^2t)(1-q^3t)} s_{(2^2)} \\
&\quad + \frac{(1+q+q^2)(q-t)(q^2-t)}{(1-q^2t)(1-q^3t)} s_{(21^2)} + \frac{(q-t)(q^2-t)(q^3-t)}{(1-qt)(1-q^2t)(1-q^3t)} s_{(1^4)} \\
P_{(31)} &= s_{(31)} + \frac{q-t}{1-qt} s_{(2^2)} + \frac{(q-t)(1+q)(1-qt^2)}{(1-qt)^2(1+qt)} s_{(21^2)} + \frac{(q-t)(q^2-t)(1+t)}{(1-qt)^2(1+qt)} s_{(1^4)} \\
P_{(2^2)} &= s_{(2^2)} + \frac{q-t}{1-qt} s_{(21^2)} + \frac{(q-t)(q-t^2)}{(1-qt)(1-qt^2)} s_{(1^4)} \\
P_{(21^2)} &= s_{(21^2)} + \frac{(q-t)(1+t+t^2)}{1-qt^3} s_{(1^4)} \\
P_{(1^4)} &= s_{(1^4)} \\
P_{(5)} &= s_{(5)} + \frac{(1+q)(1+q^2)(q-t)}{1-q^4t} s_{(41)} + \frac{q(1+q+q^2+q^3+q^4)(q-t)(1-t)}{(1-q^3t)(1-q^4t)} s_{(32)} \\
&\quad + \frac{(1+q^2)(1+q+q^2)(q-t)(q^2-t)}{(1-q^3t)(1-q^4t)} s_{(31^2)} + \frac{q(1+q+q^2+q^3+q^4)(q-t)(q^2-t)(1-t)}{(1-q^2t)(1-q^3t)(1-q^4t)} s_{(2^21)} \\
&\quad + \frac{(1+q)(1+q^2)(q-t)(q^2-t)(q^3-t)}{(1-q^2t)(1-q^3t)(1-q^4t)} s_{(21^3)} + \frac{(q-t)(q^2-t)(q^3-t)(q^4-t)}{(1-qt)(1-q^2t)(1-q^3t)(1-q^4t)} s_{(1^5)} \\
P_{(41)} &= s_{(41)} + \frac{(1+q)(q-t)}{1-q^2t} s_{(32)} + \frac{(1+q+q^2)(q-t)(1-qt)(1+qt)}{(1-q^2t)(1-q^3t^2)} s_{(31^2)} \\
&\quad + \frac{(1+q+q^2)(q-t)^2(1+qt)}{(1-q^2t)(1-q^3t^2)} s_{(2^21)} + \frac{(1+q+q^2)(q-t)(q^2-t)(1-qt^2)}{(1-qt)(1-q^2t)(1-q^3t^2)} s_{(21^3)} \\
&\quad + \frac{(q-t)(q^2-t)(q^3-t)(1+t)}{(1-qt)(1-q^2t)(1-q^3t^2)} s_{(1^5)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{(32)} &= s_{(32)} + \frac{q-t}{1-qt} s_{(31^2)} + \frac{(1+q)(q-t)(1-qt^2)}{(1-qt)^2(1+qt)} s_{(2^21)} \\
&\quad + \frac{(1+q)(q-t)^2(1+t)}{(1-qt)^2(1+qt)} s_{(21^3)} + \frac{(q-t)(q^2-t)(1+t)(q-t^2)}{(1-qt)^2(1+qt)(1-qt^2)} s_{(1^5)} \\
P_{(31^2)} &= s_{(31^2)} + \frac{q-t}{1-qt} s_{(2^21)} - \frac{(1+q)(q-t)(1-qt^3)}{(1-qt)(1-q^2t^3)} s_{(21^3)} + \frac{(q-t)(q^2-t)(1+t+t^2)}{(1-qt)(1-q^2t^3)} s_{(1^5)} \\
P_{(2^21)} &= s_{(2^21)} + \frac{(q-t)(1+t)}{1-qt^2} s_{(21^3)} + \frac{(q-t)(q-t^2)(1+t+t^2)}{(1-qt^2)(1-qt^3)} s_{(1^5)} \\
P_{(21^3)} &= s_{(21^3)} + \frac{(1+t)(q-t)(1+t^2)}{1-qt^4} s_{(1^5)} \\
P_{(1^5)} &= s_{(1^5)}
\end{aligned}$$

参考文献

- [1] S.N.M. Ruijsenaars: “*Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities*”, Commun. Math. Phys. **110** (1987) 191.
- [2] B. Sutherland: “*Exact Results for a Quantum Many-Body Problem in One Dimension I,II*”, Phys. Rev. **A4** (1971) 2019; Phys. Rev. **A5** (1972) 1372.
- [3] F. D. M. Haldane: “*Exact Jastrow-Gutzwiller resonating-valence-bond ground state of the spin-1/2 antiferromagnetic Heisenberg chain with $1/r^2$ exchange*”, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 635.
- [4] B. S. Shastry: “*Exact solution of an $S=1/2$ Heisenberg antiferromagnetic chain with long-ranged interactions*”, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 639.
- [5] H. Konno: “*Dynamical correlation functions and finite-size scaling in the Ruijsenaars-Schneider model*”, Nucl. Phys. B **473** (1996) 579.
- [6] F. Lesage, V. Pasquier, D. Serban: “*Dynamical correlation functions in the Calogero-Sutherland model*”, Nucl. Phys. B **435** (1995) 585.
- [7] Z.N.C. Ha: “*Fractional statistics in one dimension: view from an exactly solvable model*”, Nucl. Phys. B **435** (1995) 604.
- [8] D. Serban, F. Lesage and V. Pasquier: “*Single-particle Green function in the Calogero-Sutherland model for rational couplings $\beta = p/q$* ”, Nucl. Phys. B **466** (1996) 499.
- [9] F. D. M. Haldane and M. R. Zirnbauer: “*Exact calculation of the ground-state dynamical spin correlation function of a $S=1/2$ antiferromagnetic Heisenberg chain with free spinons*”, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 4055.
- [10] J.C. Talstra and F.D.M. Haldane: “*Dynamical $T = 0$ correlations of the $S=1/2$ one-dimensional Heisenberg antiferromagnet with $1/r^2$ exchange in a magnetic field*”, Phys. Rev. B **50** (1994) 6889 : (Erratum) Phys. Rev. B **54** (1996) 12594.
- [11] V. Inozemtsev: “*On the connection between the one-dimensional $S=1/2$ Heisenberg chain and Haldane-Shastky model*”, J.Stat. Phys. **59** (1990) 1143.

- [12] Y. Kuramoto and H. Yokoyama: ‘*Exactly soluble supersymmetric t-J-type model with long-range exchange and transfer*’, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1338 .
- [13] M. Arikawa , T. Yamamoto, Y. Saiga and Y. Kuramoto: “*Exact electron addition spectrum in 1D supersymmetric t-J model with $1/r^2$ interaction*”, Nucl. Phys B **702** (2004) 380.
- [14] M. Arikawa , T. Yamamoto, Y. Saiga and Y. Kuramoto: “*Spin Dynamics in the Supersymmetric t-J Model with Inverse-Square Interaction*”, J. Phys. Soc. Jpn **73** (2004) 808.
- [15] M. Arikawa and Y. Saiga, Y. Kuramoto: “*Exact spin dynamics of the $1/r^2$ supersymmetric t-J model in a magnetic field*”, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006)10603.
- [16] I. G. Macdonald: “*Symmetric Functions and Hall Polynomials*” , 2nd edition, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [17] M. Arikawa: in preparation.