

正則化法と全保存型差分法を用いた重力N 体問題の シミュレーション

峯崎, 征隆
徳島文理大学人間生活学部

<https://doi.org/10.15017/14286>

出版情報 : 応用力学研究所研究集会報告. 20ME-S7 (14), 2009-02. Research Institute for Applied
Mechanics, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :

応用力学研究所研究集会報告 No.20ME-S7
「非線形波動の数理と物理」(研究代表者 矢嶋 徹)
共催 九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.20ME-S7
Mathematics and Physics in Nonlinear Waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2008

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 14 (pp. 92-97)

正則化法と全保存型差分法を用いた 重力N体問題のシミュレーション

峯崎 征隆 (MINESAKI Yukitaka)

(Received February 2, 2009)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
February, 2009

正則化法と全保存型差分法を用いた重力 N 体問題のシミュレーション

徳島文理大学人間生活学部 峯崎征隆 (MINESAKI Yukitaka)

概要 重力 N 体問題は $N(N-1)/2$ 個の摂動 2 体問題と見なせることが知られている．本講演では，正則化法で摂動 Kepler 問題が持つ特異点を消去した後に，エネルギー保存差分法，多様体修正法を適用することで，重力 N 体問題が持つ全ての保存量を保つスキームを構成する．このスキームは保存量だけでなく，力学的に安定な Lagrange 平衡解を高精度に再現する．

1 はじめに

重力 N 体問題 (以下， N 体系と略す) は非可積分系である．そのため，特殊な初期条件を除いては，数値積分法を用いて近似的に解を求める以外にその時間発展を知る方法はない．しかしながら，ユークリッド座標系上で従来の数値積分法を N 体系に適用すると誤差が著しく増加する場合が多い．

その原因は， N 体系の運動方程式が 2 体近接遭遇に対応する特異点を持っていることにある．特異点付近では，わずかな位置の変化によって，極めて大きなポテンシャルの変化が起きるが，数値計算では有効桁数が限られているために，ポテンシャルの計算値に大きな誤差を含むことになる (情報落ち)．そのため，近接遭遇のたびに大きな誤差が発生し，その累積によって最終的には N 体系の運動を再現できなくなってしまう．

このような誤差の増大を防ぐ方法として，数値積分を行う前に特異点を消去する正則化法がある．正則化法として，近接する 2 質点のペアが持つ特異点を消去する Aarath-Zare 法 [1]，全ての 2 質点のペアが持つ特異点を消去する Heggie 法 [5] が知られている．原理上，正則化後に適用できる数値積分法に制限はないが，少ない計算量のわりに高精度であるライブラリ [2] が広く用いられている．このライブラリは，Aarath-Zare 法による正則化の後に 4 次の Hermite 積分法を用いるコードを含んでいる．

しかしながら，Hermite 積分法を含む多くの数値積分法を正則化後に適用した場合，特異点を消去する前と比べて大幅に小さくなるものの，時間が経つにつれて真の解軌道からのずれが大きくなっていく．その原因の 1 つとして，これらの数値積分法が N 体系の保存量であるエネルギー，運動量，角運動量の全てを保つわけではないことが挙げられる．

この問題を解決するためには，正則化後に「 N 体系が持つ全ての保存量を保つ数値積分法」を選択すればよいことになる．この数値積分法は，変数分離 Hamilton 系への拡大正準変換を行った後にエネルギー保存型差分法 ([3] など) を用いるものである．しかしながら，この考え方に基づいた差分法は，変数分離可能な 2 体系，及び摂動 2 体問題に関するもの [6],[7] に限られていた．

本研究の目的は，この差分法を一般の N 体系へ拡張することである．この拡張の手順については，第 2 節から第 5 節で説明を行う．さらに，この拡張が高精度に解軌道を再現する例として，3 体問題の Lagrange 解，8 の字解を挙げる．

2 重力 N 体系 $\rightarrow N(N-1)/2$ 個の 2 体問題

ユークリッド座標系上の平面 N 体系が持つ Hamiltonian は

$$H^*(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{q}_i^*) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2m_\alpha} \left((p_{\alpha[1]}^*)^2 + (p_{\alpha[2]}^*)^2 \right) - \sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{\beta=\alpha+1}^N \frac{m_\alpha m_\beta}{\sqrt{(q_{\alpha[1]}^* - q_{\beta[1]}^*)^2 + (q_{\alpha[2]}^* - q_{\beta[2]}^*)^2}} \quad (2.1)$$

である．ただし，質点 $i (i = 1, 2, \dots, N)$ の質量は m_i ，正準運動量は $\mathbf{p}_i^* = (p_{i[1]}^*, p_{i[2]}^*)$ ，正準座標は $\mathbf{q}_i^* = (q_{i[1]}^*, q_{i[2]}^*)$ である．変数変換

$$p_{i,j[l]} = \frac{1}{M_N} \left(m_j p_{i[l]}^* - m_i p_{j[l]}^* \right), \quad q_{i,j[l]} = q_{i[l]}^* - q_{j[l]}^* \quad (2.2)$$

よって, (2.1) は

$$H(\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{q}_{i,j}) = H_{2\text{-body}}(\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{q}_{i,j}) + H_{\text{pert}}(\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{q}_{i,j}), \quad (2.3)$$

$$H_{2\text{-body}}(\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{q}_{i,j}) = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{\beta=\alpha+1}^N \left(\frac{M_N}{2m_\alpha m_\beta} ((p_{\alpha,\beta[1]})^2 + (p_{\alpha,\beta[2]})^2) - \frac{m_\alpha m_\beta}{\sqrt{(q_{\alpha,\beta[1]})^2 + (q_{\alpha,\beta[2]})^2}} \right), \quad (2.4)$$

$$H_{\text{pert}}(\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{q}_{i,j}) = - \sum_{l=1}^2 \sum_{\alpha=1}^{N-2} \sum_{\beta=\alpha+1}^{N-1} \sum_{\gamma=\beta+1}^N \frac{1}{2m_\alpha m_\beta m_\gamma} (m_\gamma p_{\alpha,\beta[l]} + m_\alpha p_{\beta,\gamma[l]} + m_\beta p_{\gamma,\alpha[l]})^2 \quad (2.5)$$

となる. また, 変数変換 (2.2) から拘束条件

$$m_\gamma p_{\alpha,\beta[l]} + m_\alpha p_{\beta,\gamma[l]} - m_\beta p_{\alpha,\gamma[l]} = 0, \quad q_{\alpha,\beta[l]} + q_{\beta,\gamma[l]} - q_{\alpha,\gamma[l]} = 0, \quad 1 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq N, \quad l = 1, 2 \quad (2.6)$$

が導かれる. (2.2) は $4N$ 個の変数から $2N(N-1)$ 個の変数への変数変換であり, 正準変換ではない. そのため, $\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{q}_{i,j}$ は正準変数ではない. しかしながら, $\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{q}_{i,j}$ は Hamilton 系と同じ形の系

$$\begin{aligned} \frac{dp_{i,j[l]}}{dt} &= - \frac{\partial H(\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{q}_{i,j})}{\partial q_{i,j[l]}} = - \frac{\partial H_{2\text{-body}}(\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{q}_{i,j})}{\partial q_{i,j[l]}} - \frac{\partial H_{\text{pert}}(\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{q}_{i,j})}{\partial q_{i,j[l]}}, \\ \frac{dq_{i,j[l]}}{dt} &= \frac{\partial H(\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{q}_{i,j})}{\partial p_{i,j[l]}} = \frac{\partial H_{2\text{-body}}(\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{q}_{i,j})}{\partial p_{i,j[l]}} + \frac{\partial H_{\text{pert}}(\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{q}_{i,j})}{\partial p_{i,j[l]}}, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad l = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

の解である. Heggie は (2.2) と似た変換によって得られた変数が Hamilton 系と同じ形の系の解であることを証明している [5] が, 全く同様の証明によって $\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{q}_{i,j}$ が (2.7) の解であることを証明できる. (2.7) は 2 つの質点 i, j からなる 2 体運動に摂動が加わったものを示している. 拘束条件 (2.6) より $H_{\text{pert}}(\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{q}_{i,j}) = 0$ であり, また $\frac{\partial H_{\text{pert}}(\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{q}_{i,j})}{\partial p_{i,j[l]}} = \frac{\partial H_{\text{pert}}(\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{q}_{i,j})}{\partial q_{i,j[l]}} = 0$ なので, (2.7) は 2 体運動を示していると思ってもよい. 2 体からなるペア (i, j) の選び方は $N(N-1)/2$ 通りある. このことから, 平面 N 体問題 (2.1) は拘束条件 (2.6) を満たしつつ, $N(N-1)/2$ 個の 2 体問題 (2.7) に写されることが示された.

3 2 体問題の特異点消去と差分化

既に 2 体問題が持つエネルギー, 角運動量, Laplace ベクトルの全てを保存する差分スキームが知られている [6],[7]. ここではこのスキームをペア (i, j) からなる 2 体系に適用する.

(i, j) 系の運動を示す Hamilton 系 (2.7) は

$$\frac{dp_{i,j[l]}}{dt} = - \frac{m_i m_j q_{i,j[l]}}{((q_{i,j[1]})^2 + (q_{i,j[2]})^2)^{3/2}}, \quad \frac{dq_{i,j[l]}}{dt} = \frac{M_N p_{i,j[l]}}{m_i m_j}, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad l = 1, 2 \quad (3.1)$$

と書き直される. この系は時間変数 t から

$$\frac{ds_{i,j}}{dt} = \frac{1}{(Q_{i,j[1]})^2 + (Q_{i,j[2]})^2}, \quad 1 \leq i < j \leq N \quad (3.2)$$

の関係を満たす仮想時間変数 $s_{i,j}$ への変換, 及び逆 Levi-Civita 変換

$$\begin{aligned} Q_{i,j[1]} &= \sqrt{q_{i,j[2]} + \sqrt{(q_{i,j[1]})^2 + (q_{i,j[2]})^2}}, \quad Q_{i,j[2]} = \frac{q_{i,j[1]}}{Q_{i,j[1]}}, \\ P_{i,j[1]} &= p_{i,j[1]} Q_{i,j[2]} + p_{i,j[2]} Q_{i,j[1]}, \quad P_{i,j[2]} = p_{i,j[1]} Q_{i,j[1]} - p_{i,j[2]} Q_{i,j[2]}, \quad 1 \leq i < j \leq N \end{aligned} \quad (3.3)$$

よって，特異点を持たない Hamilton 系

$$\frac{dQ_{i,j[l]}}{ds_{i,j}} = \frac{M_N P_{i,j[l]}}{m_i m_j}, \quad \frac{dP_{i,j[l]}}{ds_{i,j}} = 2h_{i,j} Q_{i,j[l]}, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad l = 1, 2, \quad (3.4)$$

に写される．ここで， $h_{i,j}$ は (i, j) 系が持つエネルギー

$$H_{i,j}(\mathbf{P}_{i,j}, \mathbf{Q}_{i,j}) = \frac{M_N}{2m_i m_j} \frac{(P_{i,j[1]})^2 + (P_{i,j[2]})^2}{(Q_{i,j[1]})^2 + (Q_{i,j[2]})^2} - \frac{2m_i m_j}{(Q_{i,j[1]})^2 + (Q_{i,j[2]})^2}, \quad 1 \leq i < j \leq N \quad (3.5)$$

の値である．時間変換 (3.2) の差分版を

$$\frac{s_{i,j}^{(k+1)} - s_{i,j}^{(k)}}{t^{(k+1)} - t^{(k)}} = \frac{1}{(Q_{i,j[1]}^{(k)})^2 + (Q_{i,j[2]}^{(k)})^2}, \quad 1 \leq i < j \leq N \quad (3.6)$$

とし，Hamilton 系 (3.4) にエネルギー保存型差分 [3] を適用すると，差分系

$$\frac{\overline{Q_{i,j[l]}^{(k+1)}} - Q_{i,j[l]}^{(k)}}{t^{(k+1)} - t^{(k)}} = \frac{M_N}{2m_i m_j} \frac{\overline{P_{i,j[l]}^{(k+1)}} + P_{i,j[l]}^{(k)}}{(Q_{i,j[1]}^{(k)})^2 + (Q_{i,j[2]}^{(k)})^2}, \quad \frac{\overline{P_{i,j[l]}^{(k+1)}} - P_{i,j[l]}^{(k)}}{t^{(k+1)} - t^{(k)}} = h_{i,j}^{(k)} \frac{\overline{Q_{i,j[l]}^{(k+1)}} + Q_{i,j[l]}^{(k)}}{(Q_{i,j[1]}^{(k)})^2 + (Q_{i,j[2]}^{(k)})^2} \quad (3.7)$$

ただし， $h_{i,j}^{(k)} = H_{i,j}(\mathbf{P}_{i,j}^{(k)}, \mathbf{Q}_{i,j}^{(k)})$ である．(3.7) は (i, j) 系が持つ全ての保存量 (エネルギー，運動量，角運動量，Laplace ベクトル) を保つ．そのため，(3.7) を (i, j) 系の全保存型差分と呼ぶ．特異点が原因となって，(3.7) で情報落ちが起きることはない．

(3.7) によって，時刻 $t^{(k)}$ における $P_{i,j[l]}^{(k)}, Q_{i,j[l]}^{(k)}$ から時刻 $t^{(k+1)}$ における $\overline{P_{i,j[l]}^{(k+1)}}, \overline{Q_{i,j[l]}^{(k+1)}}$ が得られる． $\overline{P_{i,j[l]}^{(k+1)}}, \overline{Q_{i,j[l]}^{(k+1)}}$ から，正則化前の変数 $p_{i,j[l]}^{(k+1)}, q_{i,j[l]}^{(k+1)}$ を求めるには，(3.3) の逆変換である Levi-Civita 変換

$$\begin{aligned} \overline{q_{i,j[1]}^{(k+1)}} &= \overline{Q_{i,j[1]}^{(k+1)}} \overline{Q_{i,j[2]}^{(k+1)}}, & \overline{q_{i,j[2]}^{(k+1)}} &= \frac{1}{2} \left(\overline{(Q_{i,j[1]}^{(k+1)})^2} - \overline{(Q_{i,j[2]}^{(k+1)})^2} \right), \\ \overline{p_{i,j[1]}^{(k+1)}} &= \frac{\overline{P_{i,j[1]}^{(k+1)}} \overline{Q_{i,j[2]}^{(k+1)}} + \overline{P_{i,j[2]}^{(k+1)}} \overline{Q_{i,j[1]}^{(k+1)}}}{(\overline{Q_{i,j[1]}^{(k+1)}})^2 + (\overline{Q_{i,j[2]}^{(k+1)}})^2}, & \overline{p_{i,j[2]}^{(k+1)}} &= \frac{\overline{P_{i,j[1]}^{(k+1)}} \overline{Q_{i,j[1]}^{(k+1)}} - \overline{P_{i,j[2]}^{(k+1)}} \overline{Q_{i,j[1]}^{(k+1)}}}{(\overline{Q_{i,j[2]}^{(k+1)}})^2 + (\overline{Q_{i,j[2]}^{(k+1)}})^2}, \quad 1 \leq i < j \leq N \end{aligned} \quad (3.8)$$

を用いればよい．

4 $N(N-1)/2$ 個の 2 体問題 → 重力 N 体系

N 体系から $N(N-1)/2$ 個の 2 体系への変数変換 (2.2) の逆変換は一意的には定まらない． $(p_{i[l]}, q_{i[l]})$ 及び $(p_{i,j[l]}, q_{i,j[l]})$ を正準変数のペアと見なした場合に，(2.2) の逆変換を

$$\overline{p_{i[l]}^{(k+1)}} = -\sum_{j=1}^{i-1} \overline{p_{j,i[l]}^{(k+1)}} + \sum_{j=i+1}^N \overline{p_{i,j[l]}^{(k+1)}}, \quad \overline{q_{i[l]}^{(k+1)}} = \frac{1}{M_N} \left(-\sum_{j=1}^{i-1} m_j \overline{q_{j,i[l]}^{(k+1)}} + \sum_{j=i+1}^N m_j \overline{q_{i,j[l]}^{(k+1)}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad l = 1, 2 \quad (4.1)$$

と選ぶことができる．(4.1) によって，離散時刻 $t^{(k+1)}$ における各質点の運動量，位置 $\overline{p_{i[l]}^{(k+1)}}, \overline{q_{i[l]}^{(k+1)}}$ が求められる．しかしながら，一般にはこれらの量を (2.1) に代入して得られる $H^*(\overline{\mathbf{p}_i^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_i^{(k+1)}})$ の数値は $H^*(\mathbf{p}_i^{*(k)}, \mathbf{q}_i^{*(k)})$ の数値に一致しない．つまり，離散時刻 $t^{(k)}$ から $t^{(k+1)}$ の時間発展において，エネルギーが保存されていない．その他の保存量 (運動量，角運動量) についても同様である．

保存量が保たれない理由は (3.8) で得られた $\overline{p_{i,j[l]}^{(k+1)}}, \overline{q_{i,j[l]}^{(k+1)}}$ が拘束条件 (2.6) を満たさないことにある．2 節で述べたように， $H_{\text{pert}}(\mathbf{p}_{i,j}^{(k)}, \mathbf{q}_{i,j}^{(k)}) = 0$ となるので，離散時刻 $t^{(k)}$ における変数変換 $(\mathbf{p}_i^{*(k)}, \mathbf{q}_i^{*(k)}) \rightarrow (\mathbf{p}_{i,j}^{(k)}, \mathbf{q}_{i,j}^{(k)})$ において $H^*(\mathbf{p}_i^{*(k)}, \mathbf{q}_i^{*(k)}) = H_{2\text{-body}}(\mathbf{p}_{i,j}^{(k)}, \mathbf{q}_{i,j}^{(k)})$ が成り立つ．また，逆 Levi-Civita 変換 $(\mathbf{p}_{i,j}^{(k)}, \mathbf{q}_{i,j}^{(k)}) \rightarrow (\mathbf{P}_{i,j}^{(k)}, \mathbf{Q}_{i,j}^{(k)})$ に対して $H_{2\text{-body}}(\mathbf{p}_{i,j}^{(k)}, \mathbf{q}_{i,j}^{(k)}) = H(\mathbf{P}_{i,j}^{(k)}, \mathbf{Q}_{i,j}^{(k)})$ という

関係がある．(3.7) がエネルギー保存型差分であることから， $(\mathbf{P}_{i,j}^{(k)}, \mathbf{Q}_{i,j}^{(k)}) \rightarrow (\overline{\mathbf{P}_{i,j}^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{Q}_{i,j}^{(k+1)}})$ に対して， $H(\mathbf{P}_{i,j}^{(k)}, \mathbf{Q}_{i,j}^{(k)}) = H(\overline{\mathbf{P}_{i,j}^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{Q}_{i,j}^{(k+1)}})$ となる．さらに，Levi-Civita 変換 $(\overline{\mathbf{P}_{i,j}^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{Q}_{i,j}^{(k+1)}}) \rightarrow (\overline{\mathbf{p}_{i,j}^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_{i,j}^{(k+1)}})$ に対して， $H(\overline{\mathbf{P}_{i,j}^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{Q}_{i,j}^{(k+1)}}) = H_{2\text{-body}}(\overline{\mathbf{p}_{i,j}^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_{i,j}^{(k+1)}})$ が成り立つ．以上より，

$$H^*(\mathbf{p}_i^{*(k)}, \mathbf{q}_i^{*(k)}) = H_{2\text{-body}}(\overline{\mathbf{p}_{i,j}^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_{i,j}^{(k+1)}}) \quad (4.2)$$

が導かれる．しかしながら， $\mathbf{p}_{i,j}^{(k)}, \mathbf{q}_{i,j}^{(k)}$ に対して (2.6) が成り立ったとしても， $\overline{\mathbf{p}_{i,j}^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_{i,j}^{(k+1)}}$ が拘束条件 (2.6) を満足するとは限らない．そのため，一般に Hamiltonian (2.3) が持つ摂動部分は $H_{\text{pert}}(\overline{\mathbf{p}_{i,j}^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_{i,j}^{(k+1)}}) \neq 0$ となる．このことから，変数変換 $(\overline{\mathbf{p}_{i,j}^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_{i,j}^{(k+1)}}) \rightarrow (\overline{\mathbf{p}_i^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_i^{(k+1)}})$ に対して成り立つのは， $H(\overline{\mathbf{p}_{i,j}^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_{i,j}^{(k+1)}}) = H^*(\overline{\mathbf{p}_i^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_i^{(k+1)}})$ であり，結果として

$$H_{2\text{-body}}(\overline{\mathbf{p}_{i,j}^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_{i,j}^{(k+1)}}) \neq H^*(\overline{\mathbf{p}_i^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_i^{(k+1)}}) \quad (4.3)$$

となる．

以上のことから，差分 N 体系の時間発展 $(\mathbf{p}_i^{*(k)}, \mathbf{q}_i^{*(k)}) \rightarrow (\overline{\mathbf{p}_i^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_i^{(k+1)}})$ で Hamiltonian (エネルギー) は保たれない．また，この時間発展で運動量は保たれるが，角運動量は保たれない．そのため， $(\mathbf{p}_i^{*(k)}, \mathbf{q}_i^{*(k)}) \rightarrow (\overline{\mathbf{p}_i^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_i^{(k+1)}})$ は N 体系の時間発展を再現しない． N 体系の運動を再現するためには，エネルギーと角運動量が保存されるように変換 $(\mathbf{p}_i^{*(k)}, \mathbf{q}_i^{*(k)}) \rightarrow (\overline{\mathbf{p}_i^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_i^{(k+1)}})$ を補正する必要がある．その補正については次節で述べる．

5 保存量を保つスケールリング変換

多様体修正法 [4] を用いて，エネルギーと角運動量の双方を保存する．角運動量のみを保つようにスケールリング変換 $(\overline{\mathbf{p}_i^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_i^{(k+1)}}) \rightarrow (\overline{\mathbf{p}_i^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_i^{(k+1)}})$ を行った後に，エネルギーと角運動量の双方を同時に保つスケールリング変換 $(\overline{\mathbf{p}_i^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_i^{(k+1)}}) \rightarrow (\mathbf{p}_i^{*(k+1)}, \mathbf{q}_i^{*(k+1)})$ を行う．このことによって，離散時刻 $t^{(k)}$ から $t^{(k+1)}$ の時間発展 $(\mathbf{p}_i^{*(k)}, \mathbf{q}_i^{*(k)}) \rightarrow (\mathbf{p}_i^{*(k+1)}, \mathbf{q}_i^{*(k+1)})$ は，エネルギー，運動量，角運動量の保存性を実現する．

最初のスケールリング変換 $(\overline{\mathbf{p}_i^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_i^{(k+1)}}) \rightarrow (\overline{\mathbf{p}_i^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_i^{(k+1)}})$ は

$$\mu^{(k,k+1)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (p_{i[1]}^{(k)} q_{i[2]}^{(k)} - p_{i[2]}^{(k)} q_{i[1]}^{(k)})}{\sum_{i=1}^N (\overline{p_{i[1]}^{(k+1)}} \overline{q_{i[2]}^{(k+1)}} - \overline{p_{i[2]}^{(k+1)}} \overline{q_{i[1]}^{(k+1)}})}} \quad (5.1)$$

と定義されるスケールリングパラメータ $\mu^{(k,k+1)}$ を用いて，

$$\overline{p_{i[l]}^{(k+1)}} = \mu^{(k,k+1)} \overline{p_{i[l]}^{(k+1)}}, \quad \overline{q_{i[l]}^{(k+1)}} = \mu^{(k,k+1)} \overline{q_{i[l]}^{(k+1)}}, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad l = 1, 2 \quad (5.2)$$

と定義できる．この変換によって，角運動量の保存則

$$\sum_{i=1}^N (p_{i[1]}^{*(k)} q_{i[2]}^{*(k)} - p_{i[2]}^{*(k)} q_{i[1]}^{*(k)}) = \sum_{i=1}^N (\overline{p_{i[1]}^{(k+1)}} \overline{q_{i[2]}^{(k+1)}} - \overline{p_{i[2]}^{(k+1)}} \overline{q_{i[1]}^{(k+1)}}) \quad (5.3)$$

が得られる．

後のスケールリング変換 $(\overline{\mathbf{p}_i^{(k+1)}}, \overline{\mathbf{q}_i^{(k+1)}}) \rightarrow (\mathbf{p}_i^{*(k+1)}, \mathbf{q}_i^{*(k+1)})$ は以下のように定義される $v^{(k,k+1)}$ で

$$p_{i[l]}^{*(k+1)} = v^{(k,k+1)} \overline{p_{i[l]}^{*(k+1)}}, \quad q_{i[l]}^{*(k+1)} = \frac{1}{v^{(k,k+1)}} \overline{q_{i[l]}^{*(k+1)}}, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad l = 1, 2 \quad (5.4)$$

となる． N 体系の運動エネルギー $T_S^*(\mathbf{p}_i^{*(k)})$ ，位置エネルギー $V_S^*(\mathbf{q}_i^{*(k)})$ は

$$T_S^*(\mathbf{p}_i^{*(k)}) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2m_\alpha} \left((p_{\alpha[1]}^{*(k)})^2 + (p_{\alpha[2]}^{*(k)})^2 \right), \quad V_S^*(\mathbf{q}_i^{*(k)}) = - \sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{\beta=\alpha+1}^N \frac{m_\alpha m_\beta}{\sqrt{(q_{\alpha[1]}^{*(k)} - q_{\beta[1]}^{*(k)})^2 + (q_{\alpha[2]}^{*(k)} - q_{\beta[2]}^{*(k)})^2}} \quad (5.5)$$

で表される．これらと Hamiltonian $H^*(\mathbf{p}_i^{*(k)}, \mathbf{q}_i^{*(k)})$ によって定義されるパラメータ

$$v_1 = \frac{-V_S^*(\overline{\mathbf{q}_i^{(k+1)}}) + \sqrt{\left(V_S^*(\overline{\mathbf{q}_i^{(k+1)}}) \right)^2 + 4H^*(\mathbf{p}_i^{*(k)}, \mathbf{q}_i^{*(k)}) T_S^*(\overline{\mathbf{p}_i^{(k+1)}})}}{2T_S^*(\overline{\mathbf{p}_i^{(k+1)}})},$$

$$v_2 = \frac{-V_S^*(\overline{\mathbf{q}_i^{(k+1)}}) - \sqrt{\left(V_S^*(\overline{\mathbf{q}_i^{(k+1)}}) \right)^2 + 4H^*(\mathbf{p}_i^{*(k)}, \mathbf{q}_i^{*(k)}) T_S^*(\overline{\mathbf{p}_i^{(k+1)}})}}{2T_S^*(\overline{\mathbf{p}_i^{(k+1)}})} \quad (5.6)$$

から

$$v^{(k,k+1)} = \begin{cases} v_1 & (|v_1 - 1| \leq |v_2 - 1| \text{ の場合}) \\ v_2 & (|v_1 - 1| > |v_2 - 1| \text{ の場合}) \end{cases} \quad (5.7)$$

と定められる．スケーリング変換 (5.2), (5.4) を行うことで，差分 N 体系の時間発展 $(\mathbf{p}_i^{*(k)}, \mathbf{q}_i^{*(k)}) \rightarrow (\mathbf{p}_i^{*(k+1)}, \mathbf{q}_i^{*(k+1)})$ は，エネルギーと角運動量の双方を保存するようになる．また，運動量も保存している．

$(\mathbf{p}_i^{*(k)}, \mathbf{q}_i^{*(k)}) \rightarrow (\mathbf{p}_i^{*(k+1)}, \mathbf{q}_i^{*(k+1)})$ は N 体系が持つ全ての保存量を保つだけではない．正則化法を用いて特異点を消去することによって，数値計算誤差の増大を防いでいる．その意味で，この時間発展は正則化法を経由した N 体系の全保存型差分であるといえる．

6 差分 N 体系による解軌道

質点数が 3 である場合の差分 N 体系，すなわち差分 3 体系の解軌道と 3 体系が持つ解軌道を比較する．特殊な初期条件に対してのみ，3 体系の解軌道が解析的に求められる．そのような解軌道として，Lagrange 平衡解と 8 の字解がある．

Lagrange 平衡解のなかには，力学的に安定なものとは不安定なものが存在する．力学的に極めて安定な場合には，Hamilton 系向け汎用的数値解法である symplectic 数値積分法，差分 N 体問題の双方が極めて高精度に 3 体が持つ Lagrange 平衡解を再現している (図 1,2)．それに対して，力学的に安定と不安定の境界付近の場合には，差分 N 体問題は symplectic 数値積分法では再現できない Lagrange 平衡解を再現している (図 3,4)．また，力学的に極めて安定な特殊解である 8 の字解に関しては，symplectic 数値積分法，差分 N 体問題の双方が解軌道を再現している (図 5,6)．全ての初期条件の元で，離散時間幅は 0.05，計算時間を 1000 とした．

このことから，力学的に安定でない初期値に対しても，差分 N 体系は N 体系の解軌道の良い近似を与えることが予想される．

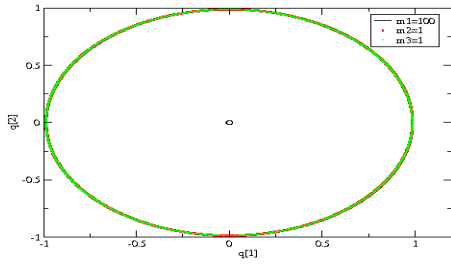


図 1: symplectic 法 (安定な Lagrange 解)

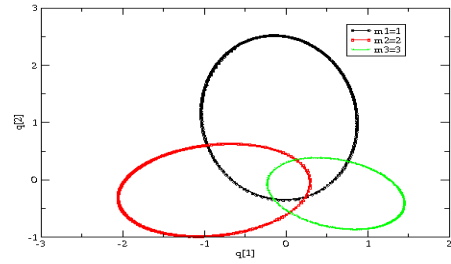


図 2: 差分 N 体問題 (安定な Lagrange 解)

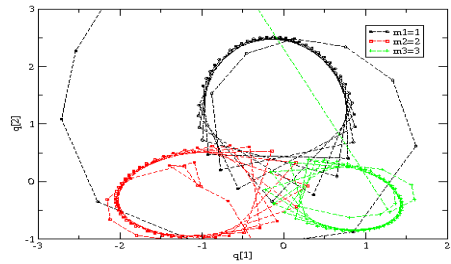


図 3: symplectic 法 (不安定に近い Lagrange 解)

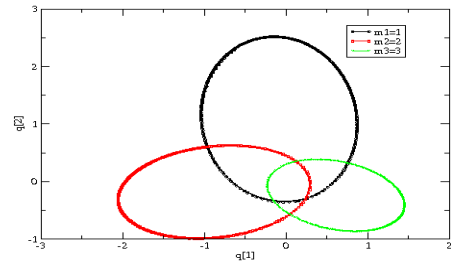


図 4: 差分 N 体問題 (不安定に近い Lagrange 解)

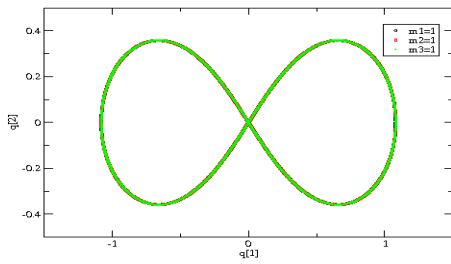


図 5: symplectic 法 (8 の字解)

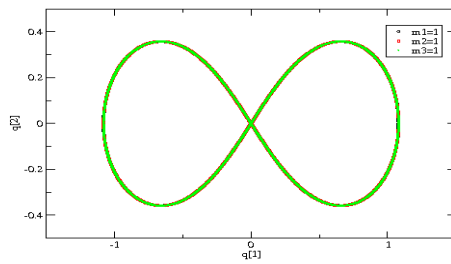


図 6: 差分 N 体問題 (8 の字解)

参考文献

- [1] S. J. Aarseth, K. Zare, A regularization of the three-body problem, *Celes. Mech.* **10** (1974) 185-205.
- [2] <http://www.ast.cam.ac.uk/~sverre/web/pages/nbody.htm>
- [3] D. Greenspan, *Discrete Numerical Method in Physics and Engineering* (Academic Press, New York, 1974).
- [4] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner, *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations* (Springer-Verlag, New York, 2004).
- [5] D. C. Heggie, A global regularisation of the gravitational N -body problem, *Celes. Mech.* **10** (1974) 217-41.
- [6] Y. Minesaki, Y. Nakamura, A new discretization of the Kepler motion which conserves the Runge-Lenz vector, *Phys. Lett. A*, **306** (2002), 127-133.
- [7] Y. Minesaki, Y. Nakamura, A new conservative numerical integration algorithm for the three-dimensional Kepler motion based on the Kustaanheimo- Stiefel regularization theory, *Phys. Lett. A*, **324** (2004), 282-292.