

## KPII方程式の(3142)型解とV字初期値に対する数値解

及川, 正行  
九州大学応用力学研究所

辻, 英一  
九州大学応用力学研究所

児玉, 裕二  
オハイオ州立大学

<https://doi.org/10.15017/14273>

---

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 20ME-S7 (1), 2009-02. 九州大学応用力学研究所  
バージョン：  
権利関係：



応用力学研究所研究集会報告 No.20ME-S7  
「非線形波動の数理と物理」(研究代表者 矢嶋 徹)  
共催 九州大学グローバル COE プログラム  
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.20ME-S7  
*Mathematics and Physics in Nonlinear Waves*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2008

Co-organized by  
*Kyushu University Global COE Program*  
*Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry*

Article No. 1 (pp. 1-8)

# KPII方程式の(3 1 4 2)型解と V字初期値に対する数値解

及川 正行(OIKAWA Masayuki), 辻 英一(TSUJI Hidekazu),  
児玉 裕二(KODAMA Yuji)

( Received February 17, 2009 )



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
February, 2009

# KPII 方程式の (3142) 型解と V 字初期値に対する数値解

及川 正行 (Masayuki OIKAWA), 辻 英一 (Hidekazu TSUJI)  
九大・応力研 (Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu Univ.)

児玉 裕治 (Yuji KODAMA)  
Department of Mathematics, Ohio State University

## 概 要

最近の KPII 方程式の研究で見出された (3142)-type の (2,2)-ソリトン解は半無限の二つのソリトンを V 字型に配置した初期値に対する漸近解を与えるように思われる．本論文はその理論解と数値解を比較することにより，その予想を確認する．

## 1 はじめに

Kadomtsev-Petviashvili II(KPII) 方程式 [1] は KdV 方程式の弱二次元的拡張であり，KdV 方程式同様，可積分系であり [2, 3] かつ重要な普遍的方程式である．KPII 方程式は浅水波，浅水内部波，イオン音波などを記述する [4]．Satsuma[5] は  $N$  ソリトン解を求めた．Miles[6, 7] は浅水波ソリトンの二次元相互作用を研究し，2-ソリトン解が常に regular とは限らないこと，また，regular と singular の境界でソリトンの共鳴相互作用が生じることを発見した．このとき Miles が解析したのは本質的に KPII 方程式である．ただし，ある速度で走る系において定常な解のみを考察した．さらに Miles はこれを当時実験的に知られていた浅水波ソリトンの Mach 反射を理論的に説明するために利用した．これに関連して，数値シミュレーション [8, 9] や実験 [10, 11] が行われ，ソリトン共鳴は確認された．

しかし，その後，KPII 方程式のソリトンについての具体的な解析はあまり行われなかった．とくに初期値問題については KdV 方程式についてはよく分かっているが，KPII 方程式についてはほとんど何もわかっていない．

しかし，最近になって KPII 方程式におけるソリトンの相互作用を表す解の研究が集中的に行われ，解の理解や分類が進んだ [12, 13, 14, 15, 16, 17]．ここでは，とくにこのような研究で得られた (3142)-type の (2,2)-ソリトン解に注目し，その性質や V 字型初期値に対する数値解との関係を調べる．

## 2 KPII 方程式のソリトン解の新理論

KPII 方程式を次の形で考える．

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( 4 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

$$u(x, y, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \tau(x, y, t) \quad (2)$$

によって,  $\tau$ -関数を導入する. Wronski 行列式で与えられる次の  $\tau$ -関数

$$\tau = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_N \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_N' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(N-1)} & f_2^{(N-1)} & \cdots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix}, \quad f_n^{(j)} := \frac{\partial^j f_n}{\partial x^j} \quad (3)$$

は  $f_1, f_2, \dots, f_N$  が線形系

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad (4)$$

の一次独立な解であるとき, (2) を通じて KP-II 方程式 (1) の解を与える [18].

(4) を満たす簡単な例として

$$e^{\theta_j}, \quad \theta_j = k_j x + k_j^2 y - k_j^3 t + \theta_{j0} \quad (5)$$

の一次結合がある. ここで,  $k_j, \theta_{j0}$  は定数である.

$N = 1$ ,  $f_1 = e^{\theta_i} + e^{\theta_j}$ , ( $k_i < k_j$ ) としよう. このとき,

$$\tau = f_1 = e^{\theta_i} + e^{\theta_j}. \quad (6)$$

phase  $\theta_i$  を持つ項あるいは phase  $\theta_j$  を持つ項のいずれかが卓越する領域では  $u \simeq 0$  であって, line:  $\theta_i = \theta_j$  に沿って line soliton

$$u = \frac{1}{2}(k_j - k_i)^2 \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2}(\theta_j - \theta_i) \quad (7)$$

がある. これを  $[i, j]$ -ソリトンと呼ぼう. このソリトンの振幅を  $\alpha[i, j]$ , 傾き  $dx/dy$  を  $\beta[i, j]$  とす

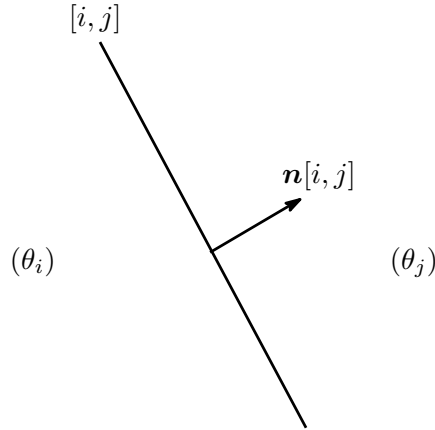


図1  $[i, j]$ -ソリトン

ると

$$\alpha[i, j] = \frac{1}{2}(k_j - k_i)^2, \quad \beta[i, j] := \frac{dx}{dy} = -(k_i + k_j) \quad (8)$$

である. 後者はソリトンの伝播方向の傾き  $\gamma[i, j]$  と言えば

$$\gamma[i, j] = k_i + k_j \quad (9)$$

である.

$N = 2$  で,  $f_1, f_2$  が

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}e^{\theta_1} + a_{12}e^{\theta_2} + a_{13}e^{\theta_3} + a_{14}e^{\theta_4} \\ f_2 &= a_{21}e^{\theta_1} + a_{22}e^{\theta_2} + a_{23}e^{\theta_3} + a_{24}e^{\theta_4} \end{aligned} \quad (10)$$

で与えられるとしよう. ここで,  $\theta_j$  は (5) であって,

$$k_1 < k_2 < k_3 < k_4 \quad (11)$$

と仮定する. このとき

$$\begin{aligned} \tau &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_1' \\ f_2 & f_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^4 a_{1j}e^{\theta_j} & \sum_{j=1}^4 k_j a_{1j}e^{\theta_j} \\ \sum_{j=1}^4 a_{2j}e^{\theta_j} & \sum_{j=1}^4 k_j a_{2j}e^{\theta_j} \end{vmatrix} = \det(AV), \end{aligned} \quad (12)$$

ここで,  $A$  は (10) の係数行列で

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & k_1 e^{\theta_1} \\ e^{\theta_2} & k_2 e^{\theta_2} \\ e^{\theta_3} & k_3 e^{\theta_3} \\ e^{\theta_4} & k_4 e^{\theta_4} \end{pmatrix} \quad (13)$$

である. 従って, 行列の積の行列式に関する Binet-Cauchy の公式により

$$\tau = \sum_{1 \leq r < s \leq 4} (k_s - k_r) A(r, s) \exp(\theta_r + \theta_s) \quad (14)$$

となる. ここで,  $A(r, s)$  は  $A$  の第  $r$  列と第  $s$  列からなる  $2 \times 2$  小行列式である.  $u$  が singular でないためには, これらの小行列式は非負である必要がある.

一般に, この  $\tau$  関数が生じる解は  $y \rightarrow -\infty$  で漸近形として 2 つのソリトンをもち,  $y \rightarrow +\infty$  で漸近形としてやはり 2 つのソリトンをもつ [12, 14]. それゆえ, この解は (2, 2)-ソリトンと呼ばれる.

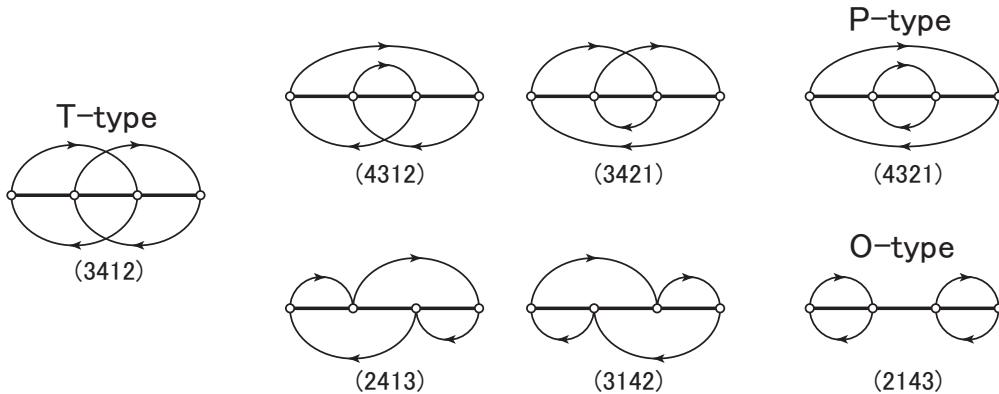


図 2 7 個の (2, 2)-ソリトンのタイプに対応する open chord ダイアグラム

(2, 2)-ソリトンは 7 つの異なるタイプに分類されることが示された [17]. さらに  $y \rightarrow \pm\infty$  でのようなソリトンが現れるかは置換  $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4))$  と関係している [17]. 24 個の置

換の中，すべての要素が異なる要素にうつるような置換（derangement と呼ばれる）が 9 個ある．また， $\pi(i) > i$  であるような  $i$  を  $\pi$  の excedance という．2 個の excedance をもつ derangement は 7 個であり，その 7 個が異なる (2,2)-ソリトンのタイプに対応する．

2 個の excedance を  $i, j$  とするとき  $\implies [i, \pi(i)], [j, \pi(j)] : y \rightarrow +\infty$  でのソリトン

それ以外を  $k, \ell$  とすると  $\implies [\pi(k), k], [\pi(\ell), \ell] : y \rightarrow -\infty$  でのソリトン

となる．これは図 2 の open chord ダイアグラムで示される．

T-type の  $\tau$  関数は 6 個の指数関数項からなり，中央の 4 個の  $\tau$  関数は 5 個の指数関数項からなり，O-type, P-type の  $\tau$  関数は 4 個の指数関数項からなる．O-type, P-type, T-type は  $y \rightarrow \pm\infty$  で同じ振幅と方向をもつ漸近的ソリトンが現れるので，elastic と言われることがある．中央の 4 個は， $y \rightarrow +\infty$  での漸近的ソリトンと  $y \rightarrow -\infty$  での漸近的ソリトンが異なる．これらは inelastic と言われることがある．

O-type の 2-ソリトン解，P-type の 2-ソリトン解は従来の 2-ソリトン解であり，T-type の 2-ソリトン解は従来の 2-ソリトン解が singular である領域（S-領域と呼ぼう）で存在する（regular である）[16]．O-type, P-type の解は（適当な並進座標系において）定常な解であるが，他はすべて非定常な解である．これらの非定常解は最近見出された新しい解である．

### 3 (3142)-type の (2,2)-ソリトン解

(3142)-type の (2,2)-ソリトン解について少し詳しく述べる．これは図 2 の下段中央のコード図の場合である． $y \rightarrow +\infty$  で，[1,3], [3,4]-ソリトンが， $y \rightarrow -\infty$  で，[1,2], [2,4]-ソリトンが現れる．係数行列  $A$  は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix},$$

で与えられる．ここで， $a, b, c > 0$  は自由なパラメーター． $A(1, 2) = 0$  である． $\tau$  関数はこれに対応する項を除く 5 個の指数関数項からなる． $\tau$  関数は

$$\begin{aligned} \tau &= (k_3 - k_1)e^{\theta_1 + \theta_3} + (k_4 - k_1)be^{\theta_1 + \theta_4} \\ &+ (k_3 - k_2)ae^{\theta_2 + \theta_3} + (k_4 - k_2)abe^{\theta_2 + \theta_4} + (k_4 - k_3)ce^{\theta_3 + \theta_4} \end{aligned} \quad (15)$$

で与えられる． $y$  軸に関して対称な場合の一例を図 3 に示す．また，図 4 に  $t > 0$  の場合の平面

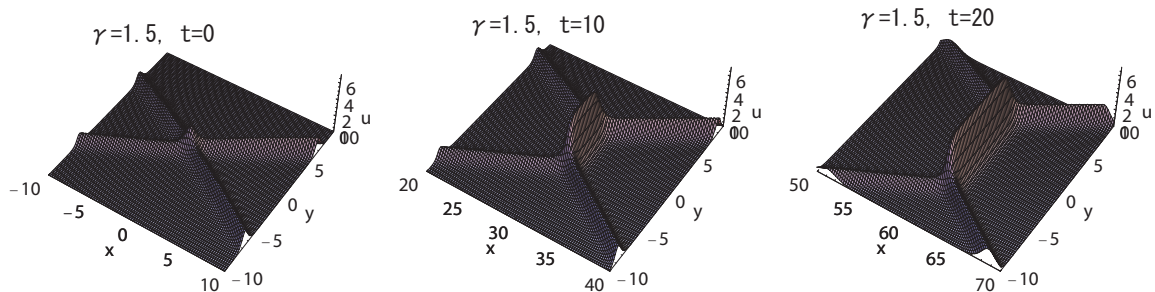


図 3 (3142)-type (2,2)-ソリトン解． $k_1 = -7/4$ ,  $k_2 = -1/4$ ,  $k_3 = 1/4$ ,  $k_4 = 7/4$ ,  $a = 4$ ,  $b = 4/7$ ,  $c = 4/3$ . 左： $t = 0$ ，中央： $t = 10$ ，右： $t = 20$ ．

模式図を示す．この解では [1,4]-ソリトン（stem と呼ぼう）が生成され，成長していく．

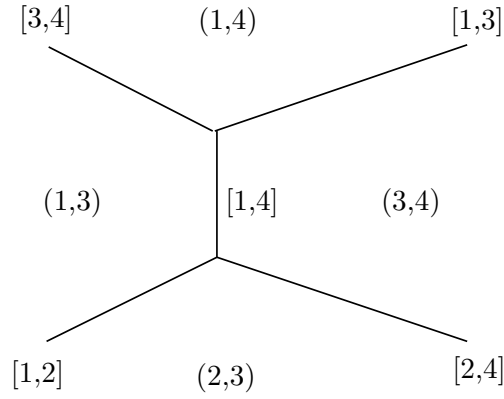


図4 (3142)-type (2,2)-ソリトン解の平面模式図 .  $t > 0$  に対応 .

図3のように  $[1,3]$ -ソリトンと  $[2,4]$ -ソリトンの振幅が等しく (以下では  $\alpha = 2$  とする), 方向が  $y$  軸に関して対称としよう . すなわち

$$\alpha[1, 3] = \alpha[2, 4] = 2, \quad -\gamma[1, 3] = \gamma[2, 4] =: \gamma. \quad (16)$$

このとき,

$$\begin{aligned} k_3 - k_1 &= 2, & k_1 + k_3 &= -\gamma, \\ k_4 - k_2 &= 2, & k_2 + k_4 &= \gamma. \end{aligned} \quad (17)$$

従って

$$k_1 = -1 - \frac{\gamma}{2}, \quad k_2 = -1 + \frac{\gamma}{2}, \quad k_3 = 1 - \frac{\gamma}{2}, \quad k_4 = 1 + \frac{\gamma}{2}. \quad (18)$$

この場合,  $k_1 < k_2 < k_3 < k_4$  の条件は

$$\gamma < 2 \quad (19)$$

となる . これは実は (3142)-type (2,2)-ソリトン解は (少なくとも今考えているような対称的な場合には)  $[1,3]$ -ソリトンと  $[2,4]$ -ソリトンからなる従来の 2-ソリトン解が singular であるような領域 (S-領域) において regular な解として存在するというを意味する .

さらに, 対称な (3142) 解は次の性質をもつ :

- (i) 図4の2つの相互作用点ではソリトン共鳴が起こっている .
- (ii) (19) によって,  $\alpha[1, 2] = (k_2 - k_1)^2/2 = \gamma^2/2 < 2$ ,  $\alpha[3, 4] = (k_4 - k_3)^2/2 = \gamma^2/2 < 2$  が成り立つ . つまり, 図4の左側2つのソリトンの振幅は右側2つのソリトンの振幅より小さい .
- (iii) (18) から,  $\gamma[1, 2] = k_1 + k_2 = -2$ ,  $\gamma[3, 4] = k_3 + k_4 = 2$  が成り立つ . すなわち, 図4の左側2つのソリトンの傾きは右側2つのソリトンの傾きには無関係で, それらの振幅  $\alpha = 2$  のみに依存する . また, その値は (19) の右辺と一致する .

これらの性質は Miles[7] が浅水波ソリトンの Mach 反射に対する漸近解を作った際に見出した性質そのものである . Miles は定常的な解しか扱っていないので, (3142)-type の解とは異なる . しかし, Miles の解は (3142)-type の解の漸近形になっている .

## 4 数値計算との比較

われわれはいくつかのモデル方程式でソリトンの二次元相互作用について調べてきた [19, 20, 21, 22]. それらのモデル方程式は一次元の可積分方程式を弱二次元化したもので, 二次元化することで可積分性が失われるようなものであった. 従って, 数値計算によって相互作用の性質を調べた. その際, 図 5 に示すような V 字型の初期値を用いた.

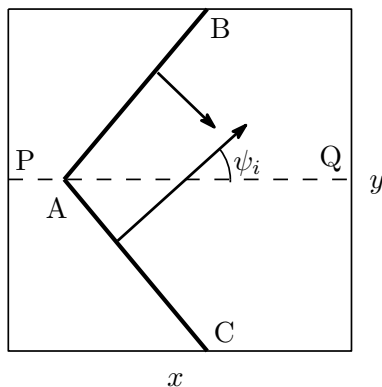


図 5 V 字型初期値の平面模式図. AB, AC が初期に対称に配置された振幅の等しいソリトン.

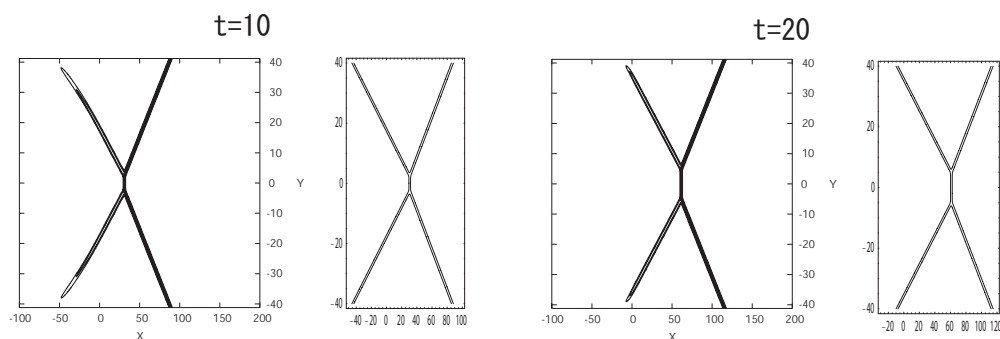


図 6 V 字型初期値 ( $\alpha = 2, \gamma = 1.5$ ) からの数値解と (3142)-type (2,2)-ソリトン解の比較.  $t = 10$  および  $t = 20$ . それぞれ左側が数値解, 右側が理論解

初期値の V 字から (18) のようにパラメーター  $k_1, k_2, k_3, k_4$  が決まる. 図 6 は図 3 と同じパラメーターの場合の  $t = 10$  および  $t = 20$  における数値解と (3141)-解を比較したものである.  $a = 4, b = 4/7, c = 4/3$  は  $t = 0$  で 4 つのソリトンに phase shift がないように定めた.  $t = 10$  ではまだ [3,4],[1,2]-ソリトンに近づいていくであろう後方にできた波はまだ十分に成長していないが,  $t = 20$  では十分に成長している. また, stem も延びている. 数値計算のパターンと理論のパターンは良く一致している.

図 7 は  $c = 1.5$  の場合の数値計算における stem の振幅の時間発展を示している. この場合の stem の振幅の理論値は  $\alpha[1, 4] = (2 + \gamma)^2/2 = 6.125$  であるが, 数値結果は  $t = 7$  くらいでこの値に達している. また, stem の波形や後方の現れるソリトンの波形も理論値とぴったり一致する.

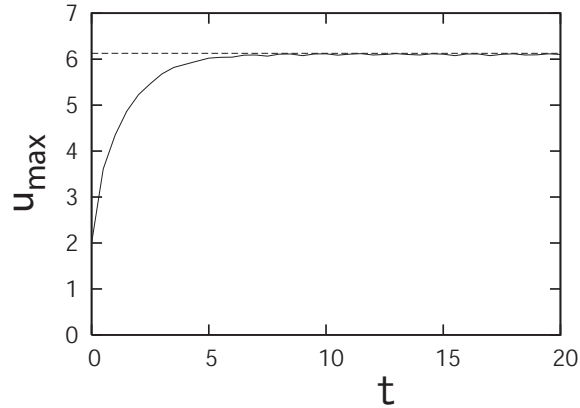


図7 V字型初期値 ( $\alpha = 2, \gamma = 1.5$ , 左側) からの数値解における stem の振幅の時間発展 .

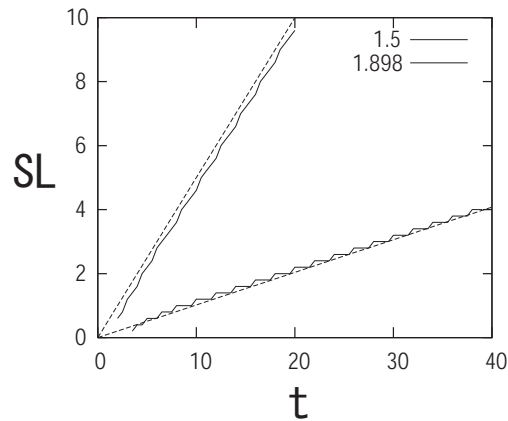


図8 V字型初期値からの数値解における stem の長さの時間発展 .  $\alpha = 2, \gamma = 1.5$  (上側) および  $\gamma = 1.898$  (下側) .

図8は  $\gamma = 1.5$  と  $\gamma = 1.898$  の場合の stem の長さを数値計算と理論で比較したものである . 破線は理論値であるが , 理論値は  $(2 - \gamma)t$  で与えられる . 両者は良く一致しているが ,  $\gamma = 1.5$  に対しては phase がずれている .

他の  $\gamma$  の値についても良い一致が得られている .  $\gamma > 2$  に対しては理論解としては O-type ( 等角反射に相当する解である ) になる . これらの計算は V 字初期値の漸近解が (3142) 解あるいは O-type で与えられることを示唆する . ここでは対称な場合を扱ったが , 非対称な場合についてもほぼ同じことが言える . これについては本報告集の辻等の論文をご覧ください .

## 参考文献

- [1] Kadomtsev, B. B. and Petviashvili, V. I. : Sov. Phys.- Doklady **15** (1970) 539.
- [2] Dryuma, V. S. : Sov. Phys. JETP Lett. **19** (1974) 387.
- [3] Ablowitz, M. J. and Clarkson, P. A. : *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991).
- [4] Ablowitz, M. J. and Segur, H. : *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, (Philadel-

- phia, SIAM, 1981).
- [5] Satsuma, J. : J. Phys. Soc. Jpn. **40** (1976) 286.
  - [6] Miles, J. W. : J. Fluid Mech. **79** (1977) 157.
  - [7] Miles, J. W. : J. Fluid Mech. **79** (1977) 171.
  - [8] Kako, F. and Yajima, N. : J. Phys. Soc. Jpn. **49** (1980) 2063.
  - [9] Funakoshi, M. : J. Phys. Soc. Jpn. **49** (1980) 2371.
  - [10] Folkes, P. A., Ikezi, H. and Davis, R. : Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 902.
  - [11] Nishida, Y. and Nagasawa, T. : Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 1626.
  - [12] Biondini, G. and Kodama, Y. : J. Phys. A **36** (2003) 10519.
  - [13] Kodama, Y. : J. Phys. A **37** (2004) 11169.
  - [14] Biondini, G. and Chakravarty, S. : J. Math. Phys. **47** (2006) 033514.
  - [15] Biondini, G. and Chakravarty, S. : Math. Comput. Simul. **74** (2007) 237.
  - [16] Biondini, G. : Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 064103.
  - [17] Chakravarty, S. and Kodama, Y. : J. Phys. A **41** (2008) 275209.
  - [18] Freeman, N. C. and Nimmo, J. J. C. : Phys. Lett. A **95** (1983) 1.
  - [19] Tsuji, H. and Oikawa, M. : Fluid Dyn. Res. **29** (2001) 251.
  - [20] Tsuji, H. and Oikawa, M. : J. Phys. Soc. Jpn. **73** (2004) 3034.
  - [21] Tsuji, H. and Oikawa, M. : J. Phys. Soc. Jpn. **76** (2007) 084401.
  - [22] Oikawa, M. and Tsuji, H. : Fluid Dyn. Res. **38** (2006) 868.