九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

海況観測で使う補間・推定法に関する覚書 : とくに海洋レーダーについて

増田, 章
九州大学応用力学研究所

https://doi.org/10.15017/14175

出版情報：九州大学応用力学研究所所報. 134, pp.29-45, 2008-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：
権利関係：

海況観測で使う補間・推定法に関する覚書
－とくに海洋レーダーについて－

増田　章*1

(2008 年 1 月 31 日受理)

A note on some basic methods of interpolation and estimation in particular for monitoring ocean current by HF radar

Akira MASUDA
E-mail of corresponding author: *masuda@riam.kyushu-u.ac.jp*

Abstract

In monitoring ocean current by HF radar under different circumstances, we need various kinds of data analysis for obtaining a better estimation of the current field. This article is intended to summarize and describe several fundamental ideas and algorithms for interpolating and estimating the current field based on data of limited accuracy. In particular, harmonic interpolation is stressed as a simple and useful method for stable estimation. It is shown that harmonic interpolation of two-dimensional flow field has an intriguing meaning from a viewpoint of fluid dynamics. That is, harmonic interpolation minimizes the sum of the squared divergence and vorticity of the current field. Similarly biharmonic interpolation minimizes the sum of the squared gradients of divergence and vorticity. Discusssion is given also for the over-determined situation provided by more than a couple of HF radar. In that case, reliability of the resulting current vector can be estimated as well. In addition a general procedure called the *least square method with harmonic relaxtion* is presented which not only makes a full use of the information available, but also adapts the estimation to surrounding values. Finally a scheme is proposed to estimate the current field even for quite limited a number of data under some assumptions of smooth current field.

Key words : *ocean surface current, HF radar, harmonic (biharmonic) interpolation, least square method with harmonic relaxation, optimal estimation of current field*

1.　はじめに

二基の海洋レーダーで対馬海峡の海流を初めて試験観測したのが 1999 年である (山本ほか 2002)[1]. その後 2002 年に 7 基の海洋レーダーを対馬, 壱岐, 志賀島に配備し, 対馬海峡東西両水道の表層海流面分布を (一時間毎に) 連続計測することができるようになった. この監視データに基づき対馬海峡の海流や潮位の変動を調べている (山下ほか 2004[2], 奥野ほか 2004[3], 遙山ほか 2004[5], 奥野ほか 2005[4], Yoshikawa et al. 2006[6], 増田 2007[7], Yoshikawa et al. 2007[8], 石井ほか 2007[9], 中園ほか 2008[10]). 幸いにも, 欠測の少ない連続観測を続けることができている.

海況解析では 1 時間毎の流況図を作成することが基本になる. 流況図の作成には生の観測資料に様々なデータ処理を施す必要がある. この実際上の必要から解析法を考え適用してきた. これまで実際に使った手法・考え方を今後のために現時点でまとめておきたい. それが本稿の第一の目的である. なお, 海洋レーダーに即して考えてきた解析手法ではあるが, 海洋レーダーに限らず様々な場面で有用であろう.

またこの過程で様々な解析手法の間に思いがけない関係や, 共通する側面を見出した. その知見から得た着想もある. 具体的な結果までは示さないが, このような考え方と手法の原型を提示しておき, 今後の実用・発展を期す. そのため少し一般化した枠で整理しておきたい. これが第二の目的である.

次の節では, 海洋レーダー観測値処理 (解析) の諸課題を述べて全体の概観を得る. 次いで簡単な補間法から始めて補間・推定の方法をいくつか見ていく.

*1 九州大学応用力学研究所

最後に全体をまとめる．調和補間法と重み付き最小自乗法が全体の基調を成す．

2. 観測値処理 (解析) の諸課題

海洋レーダー観測を念頭に置き，処理が必要になる理由 (狙い) と処理の内容をあげる．意味の詳細と処理手法の具体的考え方は次節以降で述べる．

流況図を描くためには以下のような準備をする．先ず流速ベクトルを求める範囲と格子点を指定する．次に基線付近のような特殊処理を要する領域を指定し，これに必要な格子情報等を設定する．特殊領域および適用する推定法ごとに (推定に必要な) 行列ほかを求めておく．一時間毎に観測値を推定して流況図を描くには次のようにする．

- 与えられた時刻 (前後を含むこともありうる) における視線方向データ全部を読み込み作業配列に格納する．
- 必要なら空間 (時間を含むことも) 補間処理をして作業配列を書き換える．
- 全ての海洋レーダー観測値を用いて，指定した時刻における指定範囲の格子上の流速ベクトルを求める．
- 指定した特殊領域 (基線周囲の菱形領域など) を切り出す．
- 指定した特殊領域で指定した方法による流速ベクトル推定を済ます．
- 特殊領域外と合わせて全範囲の空間格子上の流速ベクトルを求める．

このためには次の手順が必要である．

1. 解析用の時間・空間格子点にない計測値から解析用格子点の値を推定する．
2. 欠測点の値を補間・推定する．とくに欠測点が広く複雑に分布している場合の補間をする．
3. 三つ以上の海洋レーダーで同一点を観測しているといった過剰情報がある場合に，全ての情報を活用した補間・推定をする．
4. 観測異常値を周囲状況から判断し取り除く．除いた後は補間・推定する．
5. 誤差が大きくなりがちな格子点でもそれなりに推定する (基線付近では大きな誤差を持つ流速ベクトルを推定してしまいがちである)．
6. 僅かの情報も活かすように補間・推定する．例えば，一つの視線方向流速データしかない所の流速ベクトルを推定する．観測データが少ないところでもそのデータをもとに流速ベクトルをなるべく広範に推定する．

ほぼこの順序で説明していく．なお，海洋レーダー計測原理などは説明無しに述べることがある．その詳細は藤井・徳田 (2001)[11]，山下ほか (2004)[2] を参照して頂きたい．

以下で断りになしに使う (あまり慣用にない) 記号，定義，性質を本論に入る前にまとめておく．

- デカルト座標系のことを直角座標系または直方座標系と呼ぶ．
- $A \models B$ とは，A を B とも表せること，B は A の別表現であることを意味する．例えば平面上の点 P の直方座標が (x, y) で，極座標が (r, θ) ということを $\mathrm{P} \models (x, y) \models (r, \theta)$ などと書く．
- (m, n) 次行列全体を $\boldsymbol{M}(m, n)$ で表し (m, n は自然数)，行列の肩の ' で転置行列を表す．また n 次列ベクトルの全体を $\boldsymbol{R}^n$ または $\boldsymbol{M}(n, 1)$ と書く．太文字でベクトルを表すことがある．
- $\boldsymbol{u}$ が二次元ベクトルのとき，$\neg\boldsymbol{u}$ で $\boldsymbol{u}$ を時計回りに直角だけ回転させたベクトルを表す．

  $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ が二次元流速場 ($\boldsymbol{x}$ が平面座標，即ち位置ベクトル) のとき，$\nabla \times \boldsymbol{u}$ で渦度を表す．これはベクトルでなくスカラーである．同じく $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ は発散を表し，これもスカラーである．$\neg\boldsymbol{u}$ の場を「$\boldsymbol{u}$ の共役ベクトル場」と呼ぶことにすれば，共役ベクトル場の発散は元のベクトル場の渦度 (回転) に，共役ベクトル場の渦度は元のベクトル場の発散になる．即ち

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\neg\boldsymbol{u}) = \nabla \times \boldsymbol{u} \\ \nabla \times (\neg\boldsymbol{u}) = -\nabla \cdot \boldsymbol{u} \end{cases} \tag{1}$$

  が成り立つ．

  また $\psi = \psi(\boldsymbol{x})$ を平面上のスカラー場として

$$\nabla \times \psi \equiv -\neg\nabla\psi \tag{2}$$

  と定義する．ψ が流線関数なら $\nabla \times \psi$ は対応する流れを表す．

3. 簡単な補間法

海洋レーダーの観測にはかなりの誤差がつきもので精密な観測値は望むべくもない．従って簡単で使い易い補間を使う方が実用的である．簡単な補間法から始めよう．幾何学上の意味を述べ理解を深める．

3.1 双線形補間　四格子点値から指定した点の値に

海洋レーダー観測では，レーダーの視野内にレーダー格子 (極座標での格子点) を配置し，先ずその上で視線方向流速成分値を得る．流速ベクトルを得るには二方向の流速成分値が必要である．そのため二つ (以上) の海洋レーダーを使う．しかし複数レーダーのレーダー格子点どうしはずれており重ならない．同一地点で二つ (以上) の方向の成分値を得るには，何らかの補間をして同一点の二つの方向の流速成分値を用意する．普通は，解析に便利なように直方座標系の格子を設定し，その上で流速ベクトルを求める．この目的には以下に述べる双線形補間を使うことが多い．海洋レーダーに限らず，観測点が解析用時空間格子点と重なることは希なので頻繁に使う．

直方座標系の格子点 $(x,y) \models (r,\theta)$ においてスカラー量 v を推定したいものとし，その推定値を $\hat{v}$ と書こう．

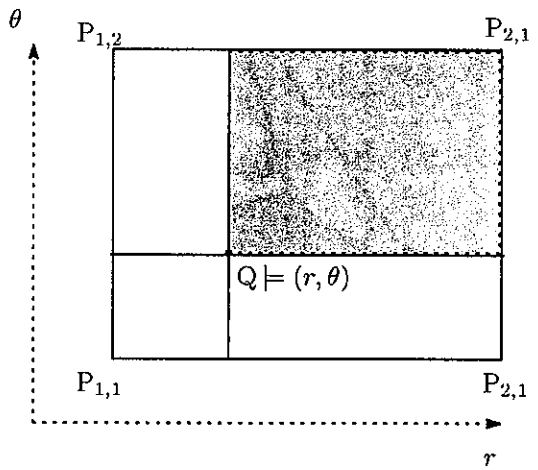

Fig. 1 Bilinear interpolation of the value at point Q in a reacangle as a weighted mean of the values at the four points $P_{i,j}$'s. The weight $B_{1,1}$ of the value at point $P_{1,1}$, e.g., is proportional to the area of the shaded small rectangle, which is the farthest from $P_{1,1}$.

四つのレーダー格子点 $P_{i,j} = (r_i, \theta_j)$ $(1 \le i \le 2,\ 1 \le j \le 2)$, $r_1 \le r \le r_2$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ の作る扇形 (ほぼ長方形) 領域が直方座標系の当該格子点 Q$= (x,y) \models (r,\theta)$ を中に含むとする．その様子を Fig. 1 に (r,θ) 平面上で示す．また四つのレーダー格子点上で $v_{i,j} \equiv v(r_i, \theta_j)$ を観測しているとする．レーダー格子点番号の相方を $\bar{\bullet}$ で表そう．つまり $\bar{1} = 2$, $\bar{2} = 1$ とする．

双線形補間では，a, b, c, d を定数として

$$\hat{v}(r,\theta) = a + b \cdot r + c \cdot \theta + d \cdot r\theta \tag{3}$$

なる近似式に当てはめる (双線形とは二組の変数の内，一方を固定したときもう一つについては線形という意味)．四隅のいずれかの格子点に近づくと格子点上の値になるとして径数 a, b, c, d (四つ) を決める．結果は

$$\hat{v}(r,\theta) = \sum_{i,j=1}^{2} B_{i,j}(r,\theta) v_{i,j} \tag{4}$$

となる．ここに

$$B_{i,j}(r,\theta) = \frac{\square_{i,j}}{\square} = \frac{r - r_{\bar{i}}}{r_i - r_{\bar{i}}} \frac{\theta - \theta_{\bar{j}}}{\theta_j - \theta_{\bar{j}}} \tag{5}$$

であり，

$$\begin{cases} \square_{i,j} \equiv (r,\theta) \text{ と } (r_{\bar{i}}, \theta_{\bar{j}}) \\ \qquad\qquad \text{を対角点とする長方形の面積} \\ \square \equiv \text{四隅の作る長方形の面積} \end{cases} \tag{6}$$

である．但しこの定義にいう長方形は元の直方座標 (x,y) 平面の長方形ではない．(r,θ) 平面で考えた長方形である．これから直ちに分かるように

$$\sum_{i,j=1}^{2} B_{i,j}(r,\theta) = 1 \tag{7}$$

を満たす．つまり双線形補間とは (r,θ) を中に含むレーダー格子領域の四隅における値 $v_{i,j}$ を，重み付きで平均することを意味する．

海洋レーダーでは平面上格子点だけでなく，指定した時刻の値を必要とする．解析格子点 (x,y,t) における視線方向成分値に直すために時刻でも平面上でも補間をしている．例えば，以前のフェイズド・アレイ方式海洋レーダーでは，方位毎に計測時刻が異なっていた．異なる時刻を代表する観測値をレーダー格子上で得ているので当該時刻を前後の観測時刻で挟み線形内挿することが多い．

この場合の様子を，簡単のため (x,t) 座標面を用いて Fig. 2 に示す．四点の重み

$$B_{i,j}(x,t) = \left| \frac{(x - x_{\bar{i}})(t - t_{i,\bar{j}})}{(x_1 - x_2)(t_{1,1} - t_{1,2})} \right| \tag{8}$$

が図解した平行四辺形の面積に比例するようになるような双線形補間である．また平行四辺形の分割が Fig. 1 と違うことに注意する．

要するに平面座標について双線形補間，時刻については線形補間をする．全体で「三線形補間」とでも云うべきものである．

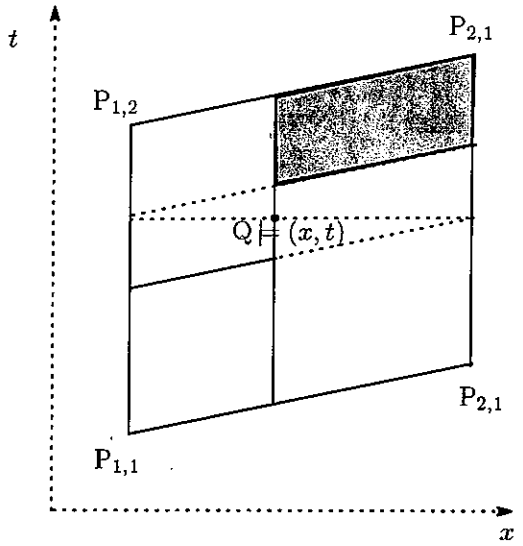

Fig. 2 Bilinear interpolation of the value at point Q in a parallorogram as a weighted mean of the values at the four points $P_{i,j}$'s. The weight $B_{1,1}$ of the value of point $P_{1,1}$, e.g., is proportional to the area of the shaded small parallerogram, which is the farthest from $P_{1,1}$.

3.2 線形補間 三格子点値から指定した点の値に

(平面上で) 三点の観測値を基に行う線形補間は (平面上で) 四点の観測値で行う双線形補間 (3.1 節) とよく似ている．重みが，ある種の面積比を表すなどいろいろな意味で対応が付く．

今，点 Q $\models (x, y)$ (これは直方座標) を中に含む三つの格子点 $P_i \models (x_i, y_i)$ $(1 \le i \le 3)$ があり，P_i 上でスカラー量 v_i を観測しているとしよう (Fig. 3). (x, y) は直方座標である．三角形の中を線形補間するには

$$\hat{v}(x, y) = a + b \cdot x + c \cdot y \tag{9}$$

なる近似式に当てはめる．三隅のいずれかの格子点に近づくと格子点上の値になるとして三つの径数 a, b, c を決める．結果は

$$\hat{v}(x, y) = \sum_{i=1}^{3} B_i(x, y) v_i \tag{10}$$

となる．但し

$$B_i(x, y) \equiv \frac{\triangle_i(x, y)}{\triangle_{123}} \tag{11}$$

であり，

$$\begin{cases} \triangle_i(x, y) \equiv \mathrm{P}_i \text{ 以外の二つと } Q \text{ の} \\ \qquad \text{三点が作る三角形の面積} \\ \triangle_{123} \equiv \text{三点 } \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_2 \text{ が作る} \\ \qquad \text{三角形の面積} \end{cases} \tag{12}$$

である．これから分かるように

$$\sum_{i=1}^{3} B_i(x, y) = 1 \tag{13}$$

を満たす．線形補間では (x, y) を中に含む三角形格子領域の三隅における値 v_i を，重み付きで平均していることを意味する．なお，三角形の面積を求めるにはベクトルの外積を座標で表現すればよい．例えば

$$\triangle_3(x, y) = \frac{1}{2} \left| (x_1 - x)(y_2 - y) - (y_1 - y)(x_2 - x) \right| \tag{14}$$

とする．

ちなみに，海洋における水塊分析では，異なる水質を持つ三つの水型がある比率で混合して別の水質 (温度，塩分) ができたとして，その混合比がいかほどかを求めることがある．この場合にも上の三角形面積比の考え方を使う．

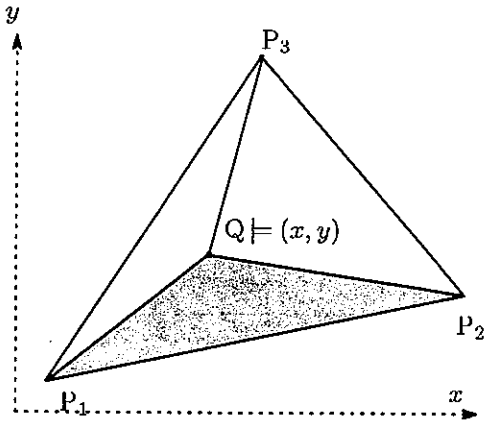

Fig. 3 Linear interpolation of the value at point Q in a triangle as a weighted mean of the three points P_i's. The weight B_3 of the value at P_3, e.g., is proportional to the area of the small shaded triangle ΔQP_1P_2, which is distant from P_3.

海洋レーダー観測資料の解析では線形補間をあまり用いないようである．(x, y) を中に含む三角形の選び方に任意性があるからかもしれない．

線形補間は格子配置が不規則でも使えるし何次元にでも拡張出来る．三角形の外に出る場合は補外ができる．その場合 $B_i < 0$ となるものが現れ負の重みを含む平均になる．考え方は変わらない．

3.3　調和補間法　欠測点を滑らかに補間する

簡単のため一変数の時系列で考える．ある時刻の測定ができなかった (あるいは信頼できない異常値だった) としよう．この場合，その時刻の前後の値の平均値で補間するのが自然である．事実そうすることが多い (多項式で近似することもあるが煩雑な割りに根拠が薄い)．これは簡単である．しかし二次元 (平面) の海洋レーダー格子点で欠測となった場合はどうしたらよいだろう．r 軸上でも θ 軸上でも線形内挿は可能だが，一般にその二つの結果は異なる．どちらを選ぶかで却って混乱するかもしれない．

欠測が一点に留まらず不規則な形状の格子点群に広がっているという場合もあるだろう．時間軸と空間方向の組みで欠測点が広がっているかもしれない．このようにいろいろと複雑な状況に対してそれぞれ双線形補間のようなものを考えるのは面倒であり極めて煩雑になりがちである．そこで状況を細かく区別しないで補間することのできる，単純で一般性のある方法を考える．

欠測点あるいは欠測領域の値を無理なく推定したい．そのために推定値が満たすべき第一の条件とは，周りの値とかけ離れないことであろう．これは何らかの平均を施すことに相当する．線形式で内挿するとはまさにこのことであった．

ところで，よく知られているようにスカラー場の Laplacian 演算子とは，周りの平均値と当該点での値の差という意味がある．例えば直方格子で，格子間隔がそれぞれ Δx，Δy なら

$$(\nabla^2 v)_{i,j} \approx \frac{1}{2(\Delta x)^2}\left(v_{i-1,j}+v_{i+1,j}-2v_{i,j}\right) + \frac{1}{2(\Delta y)^2}\left(v_{i,j-1}+v_{i,j+1}-2v_{i,j}\right) \quad (15)$$

と近似できる．この性質を使うと周りの平均になるような補間，周りに馴染むような補間をするには

$$\nabla^2 v = 0 \quad (16)$$

を離散格子上で解けば良いことが分かる．境界条件として境界値 (欠測領域の境界では観測値がある筈) を与えておかねばならない．(16) を満たすなら

$$v_{i,j} = \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\frac{v_{i-1,j}+v_{i+1,j}}{2} + \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\frac{v_{i,j-1}+v_{i,j+1}}{2} \quad (17)$$

である．$v_{i,j}$ は i 方向で平均したものと j 方向で平均したものを，方向毎に重みを付けて平均した値になっている．

直方座標系なら上に見たように x 方向 (添字 i) と y 方向 (添字 j) で格子間隔に応じた異なる重みが自然に付く．しかし方向毎の重みに拘る必要はない．実際，双線形補間では格子間隔に無関係な表現になっている。また (r,θ) 系格子を (r,θ) 平面の直方格子と考えその調和方程式を解いてもよい．この程度でも周囲に馴染むという意味で大凡の補間はできる (厳密な意味・精度は元々この種の補間に期待できない)．

なお前で調べた双線形補間と線形補間はいずれも調和補間の意味を持つ．というのも a, b, c, d が定数なら

$$\nabla^2(a+bx+cy+dxy)=0 \quad (18)$$

だからである．孤立した欠測点を調和補間することは周りの平均ないし (双) 線形補間にほかならない．

調和補間では欠測点あるいは欠測領域がいくらあっても良い．(異常でない) 測定値を得た所の値は補間しない．欠測領域の境界 (周り) の値は既知なのだから Dirichlet 型境界値問題になる．多くの欠測領域に分割してそれぞれで調和方程式を解けばよい．但し，欠測点が偶々，領域の端にある場合は境界値を指定できない．欠測境界点では，法線微分 (差分) が 0 という Neumann 条件にすると無理がない．全体では混合型境界値問題になる．これで定式化ができた．

調和方程式は緩和法 (繰り返し手順) で数値的に解ける．欠測領域がそれほど広くなければ容易に収束する．これは何次元でも使える．例えば，時刻方向の情報も活かしたい場合は，(x,y,t) の三次元で調和補間をすればよい (3.4 節)．時刻方向に馴染み方を弱くする (強くする) といった工夫も可能である．

3.4　例　海洋レーダー時空間欠測点の調和補間

時刻を示す添字を k とする．前後を挟んで高々 3 個程度だろう．(もっと多くてもよい)．レーダー座標として極座標 (r_i,θ_j)　$1\le i\le I$,　$1\le j\le J$ を考える．海洋レーダーが全方位を見ているなら j-方向には周期的で $\hat{v}(i,J)=\hat{v}(i,1)$ とする．普通は視野角が有限なので周期的境界条件にはならない．

手順をまとめる．

i 欠測込みで観測値を $u_{ij,k}$ に読み込む．読み込むとき欠測値の番値を記憶し，測定点では $v_{i,j,k}=u_{ijk}$, 欠測点で $v_{ijk}=0$ と初期設定する．

ii 測定点の値は触らずそのままにし，欠測点の値 $\hat{v}$ は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2_{i,j}\right)\hat{v}=0 \quad (19)$$

を満たすように緩和法で決める．時間方向に強弱の重みを付けたほうが良いかもしれない．

iii その際，境界条件が必要になる．未知な境界値がある場合は，空間，時間どちらにしろ法線微分が 0 という Neumann 条件を課す．全方位をレーダーが見ている場合のみ j (方位角座標) に周期境界を使う．

iv 適当に収束判定値と繰返し上限階数を与え，反復緩和法で解く．

3.5 重調和補間法 欠測点を滑らかに補間する

周りの値とかけ離れず馴染むように決めるとすれば，調和補間の変形，発展として重調和補間というのも考えられる．但し欠測点が孤立している場合には意味がないだろう．欠測領域が広がっているときに限る．

やり方としては調和補間と同じである．緩和法 (反復手順) を用いて，離散格子上の重調和程式

$$\nabla^4 \hat{v} = 0 \tag{20}$$

を数値的に解く．その際，境界では境界値だけでなく法線微分値も与えるというのが基本になる．領域境界に欠測があれば，それなりの工夫が必要である．

3.4 節で述べた調和補間は，いわば熱源のない熱伝導方程式の定常解を境界値だけで解こうとする意味がある (後述)．これに対し，重調和補間は板の弾性変形を求めようとするのに近い．一次元で言えば調和補間が一次式で重調和補間が三次式に対応する．境界値に馴染ませるという意味では似ているが同じではない．調和補間の方が手軽ではある．調和補間と重調和補間を組み合わせて

$$\nabla^2 \hat{v} - \lambda \nabla^4 \hat{v} = 0 \qquad (\lambda \geq 0) \tag{21}$$

とするのも考えられる．

調和補間の精度はそんなに良くない (判定のしようもない)．しかし周りに馴染ませるという考え方はすっきりしているしプログラミングが簡単である．何よりも汎用性があって使いやすいというのが最大の利点であろう．

4. 二つ以上任意個数の海洋レーダーで流速ベクトルを推定する

二つの異なる方向の流速成分が分かれば (水平) 流速ベクトルを合成できる．だから二つのレーダーで観測すれば一応充分ではある．しかし対馬海峡には東西両水道を視野に納めるために 7 基のレーダーを配備しており三つ以上のレーダーで視ている海域が少なくない．三つ以上の視線方向成分から流速ベクトル (二つの数値) を決めるのは条件過剰である．誤差がなければどの二つの視線方向成分でも良い (同方向でない限り) が実際には観測誤差もある．二つの選択で推定値が違うだろうから，どの二つを選ぶべきかという問題も起きてくる．

ここは使えるデータを全部使うことにすればよい．いずれかのレーダーが不具合で欠測となることもあるだろうから，任意の数のレーダーの視線方向流速値がある場合でも使える一般的な流速ベクトル推定法を用意しておくのが最善である．

いろいろあると思うが「重み付き最小自乗解法」とでも呼ぶやり方を考えた．今，レーダーが J (≥ 2) 個あるとしよう．レーダーの位置を (直方) 座標で (x_j, y_j) $(1 \leq j \leq J)$ と表す．解析するための格子点 (x 座標，y 座標，時刻) $= (x, y, t)$ における流速ベクトル $\boldsymbol{u} \equiv (u_x, u_y)' = (u_1, u_2)'$ が知りたいとする．

v_j を j 番レーダーが見た (x, y, t) における視線方向速度 (遠方への速度を正とする) とし所与とする．但し，一般にはレーダー格子点 (二次元極座標) と解析用の直方格子点が一致することはない．だから，その前に，レーダー格子点における視線方向流速値を適当に補間して解析格子点における視線方向流速値に直しておく必要がある．それには双線形補間 (3.1 節) を用いる．

さて，θ_j を j 番レーダーからみた地点 (x, y) の視線方向とする．

$$F_{j,i} = \begin{cases} \cos\theta_j & (i = 1) \\ \sin\theta_j & (i = 2) \end{cases}$$

を成分とする行列 $F \in M(J, 2)$ はレーダーの配置と観測点で決まる既知の量である．$J = 2$ のときのみ F は正方行列となる．その場合，行列式は

$$\begin{aligned} \det(F) &= \cos\theta_1 \sin\theta_2 - \sin\theta_1 \cos_2 \\ &= \sin(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \tag{22}$$

となるので n を整数として $\theta_2 - \theta_1 = n\pi$ となる地点，即ち二つのレーダーの視線方向が重なる所では F が正則でない．

j 番レーダーによる視線方向流速値 v_j の信頼度を表す重みを $w_j \geq 0$ としよう．欠測なら $w_j = 0$ とし，測定していれば $w_j = 1$ とでもしておく．格子点 (x, y) と j 番レーダーのレーダー格子点の配置を

勘案した重み，あるいは視線方向の角度差に応じた重みを付けるというのも考えられる (殆ど同じ方向のものは情報が重複しているので)．成分が

$$w_{ij} = w_j \delta_{ij} \qquad (\ 0 \le w_j\ ) \tag{23}$$

となる対角行列 $W \in \boldsymbol{M}(J,J)$ を定義し，重みを表現する．

v_j は，j 番レーダーによる視線方向流速であり，誤差がなければ $\boldsymbol{u}$ の θ_j 方向の流速成分と同じ筈である．この v_j を縦に並べて列ベクトル $v \in \boldsymbol{R}^J$ を作る．

観測したレーダーの情報を最も有効に使うために重み付き残差平方和

$$\begin{aligned} Q &\equiv \sum_{j=1}^{J} w_j \left(\sum_{i=1}^{2} (F_{j,i} u_i) - v_j \right)^2 \\ &= [F\boldsymbol{u} - v]' W [F\boldsymbol{u} - v] \end{aligned} \tag{24}$$

を最小化するものとして流速ベクトル $\boldsymbol{u}$ を推定しよう．$\boldsymbol{u}$ に関する Q の変分をとれば

$$\begin{aligned} \delta Q &= (\delta \boldsymbol{u})' F' W (F\boldsymbol{u} - v) \\ &\quad + (F\boldsymbol{u} - v)' W' W F (\delta \boldsymbol{u}) \\ &= 2(\delta \boldsymbol{u})' F' W (F\boldsymbol{u} - v) = 0 \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} F'WF\boldsymbol{u} = F'Wv \quad &\Rightarrow \\ \boldsymbol{u} = [F'WF]^{-1}(F'Wv) \end{aligned} \tag{25}$$

として流速ベクトル u が求まる．非負対称行列 $F'WF \in \boldsymbol{M}(2,2)$ が正則なことは仮定しておく．

実際の海洋レーダーでは $J = 2$ の場合が多い．$J = 2$ なら普通に解くだけで

$$F\boldsymbol{u} = v \ \Rightarrow \boldsymbol{u} = F^{-1} v \tag{26}$$

となる (F が正則なことは仮定しておく)．一方，重み付き最小自乗法でも $J = 2$ なら，F, W が正方行列となるので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= [F'WF]^{-1}(F'Wv) \\ &= F'^{-1}(W)^{-1}(F')^{-1}(F'Wv) \\ &= F^{-1} v \end{aligned} \tag{27}$$

を得る．但し行列の正則性は仮定した．最小自乗法を組み込んで置けば $J = 2$ の場合でも全く同じであり，区別する必要がないので便利である．

この最小自乗法で求めた残差平方和の最小値は，

$$\begin{aligned} 0 \le Q_{\min} &= (F\boldsymbol{u} - v)' W (F\boldsymbol{u} - v) \\ &= -v' W (F\boldsymbol{u} - v) \\ &= v'Wv - v'WF\boldsymbol{u} \le v'Wv \\ &\because \quad Q_{\min} \le Q_{\boldsymbol{u}=0} = v'Wv \end{aligned} \tag{28}$$

となる．これから不等式

$$v'Wv \ge v'W'WF\boldsymbol{u} \ge 0$$

を得る．よって

$$\begin{aligned} 1 \ge R^2 &\equiv \frac{v'Wv - Q_{\min}}{v'Wv} \\ &= \frac{v'WF\boldsymbol{u}}{v'Wv} \ge 0 \end{aligned} \tag{29}$$

が適合度を表すことが分かる．

$$F\boldsymbol{u} - v = 0 \Rightarrow Q_{\min} = 0 \Rightarrow R = 1 \tag{30}$$

といった適合度の意味も明らかだろう．適合度 R は当該点の観測値の信頼度を表すので，種々の解析における重み付けの指標として使える．

5. 欠測点の補間と異常点の除去

対馬海峡に配備した7基のレーダーでは一時間毎に視線方向流速を観測している．データは膨大であり自動処理しないと手に負えない．その際，観測値に混じる異常値を除去しないと不自然な流れになってしまう．しかし正常か異常かを自動で判別するのは難しい．

ところで，人の脳はパターン認識に長けており，異常値を一目で判別する．何を基準にしているのだろうか．大まかに云えば，全体分布を見ていて周りと大いに違うところが見えると不自然に感じ異常と判断するのだろう．これは調和補間，重調和補間の考えに通じるものがある．ラプラシアンというのは周りの値からのずれを表すのだった．周りからある程度違う値を取るものではあるが，度が過ぎていれば異常と考えて良いであろう．そこで，異常値の除去と欠測点 (+ 異常値観測点) の補間とを同時に行う次のような手順を考えてみた．海洋レーダー視線方向流速値 u を扱う．

1. あり得ないほど大きな観測値は異常値なので，最初から欠測点として扱い無視する．測定点・欠測点を識別するマスク配列 M_o を作り記憶する．この段階の観測値を配列 u_o に記憶する．

2. 観測値のある格子点の u 値を変えず，欠測点 (欠測領域) のみを重調和補間で補い u の全体分布を求める．

3. 重調和補間後の u 分布から $q \equiv \nabla^2 u$ の分布を作り，領域全体で (あるいは当該点の周りで) q^2 の平均値 $\overline{q^2}$ を求める．

   異常性判定のための閾値 (臨界値) $Cr \gg 1$ を決めておく．$q^2 > C\overline{q^2}$ となる点を異常値とする．ラプラシアンの値がラプラシアンとして妥当な周囲の揺らぎから大きく外れているということだからである．異常と判定した点を識別するマスク配列 M_h を作る．

4. 異常値と判定した点を擬似欠測扱いとする．本来の欠測点と擬似欠測点の値を未知として 2 に戻り重調和補間をする．次いで 3 の処理に移る．

   前回 3 で異常値と判定した点が正常値判定になることもある．その場合は擬似欠測点でなく正常測定点とし観測値を差し戻す．

5. 収束判定基準を満たすまで重調和補間と異常値判定手順を反復する．異常値の数と異常点の位置が変化しなくなれば収束したと判定する．

6. この操作が終わった段階では，異常値と判定した測定点および当初からの欠測点の値を周りから重調和補間した u の分布ができている．異常値を最終判定した後に一回だけ調和補間をしてもよい．

上に述べたものは基本的な考え方のみを記したものである．実際にやってみるとうまく働く場合もあれば，反復が収束しないこともある．そううまくはいかない．閾値の設定も難しい．厳しくすると正常点が少なくなるし甘いと異常値を見逃す．水面波の砕波を自動判定するのが極めて難しいように一筋縄では行かないようである．今後の課題である．

6. 基線付近の補間法

二つのレーダーで観測している場合，両レーダーを結ぶ線分を基線という．海洋レーダーは視線方向流速成分しか測定できない．基線上では，二つのレーダーはどちらも基線に沿う方向の流速成分という同じ情報しか与えない．これでは流速ベクトルが合成できない ((22) で $\det(F) = 0$ の状況)．基線から少し外れれば一応は二つの独立な成分があるのでベクトルを合成できる．しかし，ちょっとした誤差が拡大してしまう．だから基線に直交する成分に異常に大きな流速が現れることが多い．従って基線付近で求めた流速ベクトルは信用できないとして棄てる．

とはいえ基線付近は海峡中央部を占める重要海域になっているため，何とか妥当な流速ベクトルを求めたいということになる．この辺りの事情および実例については山下ほか (2004)[2] を参照して頂きたい．

山下ほか (2004)[2] では，二つの解析法 (周回方向流速補間法 azimathul component interpolation method および最適ベクトル補間法 optimal vector interpolation method と呼んでいた) を用いて基線付近の流速を推定していたが，その根拠を殆ど説明していなかった．本節と次節で，その基になった考え方を (可能性を含めて) 述べる．

6.1 周回方向速度の周囲値のみを使う補間

問題を設定しよう．二つのレーダー $\mathcal{J}$，$\mathcal{K}$ を結ぶ基線を中心にして計四つのビームが囲む細長い菱形領域を考える．当面は $\mathcal{J}$ に近い側の半分 (扇形) に限定しよう．その領域を R とし境界を ∂R と書く．$\mathcal{J}$ のレーダー格子点上で周回方向速度成分 u_θ を，誤差を抑えて求めたい．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= (u, v)' \models (u_r, u_\theta) \\ &\equiv (\text{視線方向, 周回方向}) \text{ 速度成分} \end{aligned} \tag{31}$$

としよう．R 内に u_r の信頼できる観測値があり，境界 ∂R では $\boldsymbol{u}$ が既知とする．だから u_θ も ∂R で既知である．この情報を基に u_θ を R の中でうまく推定したい．即ち，境界値 $u_\theta(i, -J)$ と $u_\theta(i, +J)$ を既知として $u_\theta(i, -(J-1)) \sim u_\theta(i, J-1)$ の値を補間する．

そのための最も簡単なやり方は次のようなものであろう．i を固定し，左の端と右の端の値 $u_\theta(i, -J)$, $u_\theta(i, +J)$ を求める．それには $\mathcal{K}$ のデータも使わなければならない．この両端の値を単純に線形補間する．異なる i の様子には全く無関係であり，

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial i^2} u_\theta(i, j) \tag{32}$$

を境界値問題で解いているのと同じである．

次に，

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial i^2} + \frac{\partial^2}{\partial j^2} \right) u_\theta(i, j) \tag{33}$$

を満たすような調和補間も有効である (i, j 方向の差分を偏微分で表している)．これだと近くの i における値

に馴染む．u_θ の境界値に一部欠測があっても Neumann 条件を補えば使える．山下ほか (2004)[2] の周回方向流速補間法 (azimathul component interpolation method) ではこの方法を使っている．

更に

$$0 = \nabla^4 u_\theta(i,j) \tag{34}$$

を満たすようにする方法 (重調和補間) も考えられる．

なお，$\mathcal{J}$ 側と $\mathcal{K}$ 側の扇形が重なる領域 (中央部) では異なるレーダー格子系で見た視線方向成分，周回方向速度成分が得られる．この中央部で直方座標格子点において流速ベクトルを求めるには，二つのレーダー座標系で得た流速ベクトルに適当な重みをつけて平均するといった処置をすることになる．

6.2 他のレーダーデータも使う補間

視線方向流速値を触らず，周回方向の速度 $v = u_\theta$ (スカラー) のみを補間するのに，その領域境界値だけから補間するというのだと，もう一つのレーダーが R の内部で計測して得た情報を全く活かしていない．もう少しその情報をうまく使いたい．また，データがないところでは埋めるしかないので調和補間 (または重調和補間) の良さも使いたい．周回方向速度成分の誤差が大きくなるという欠点を抑えつつデータをなるべく使う方式が望ましい．そのためには二つの方法が適度に入る最適化問題に定式化すればよいだろうと考える．

問題を再吟味しよう．レーダー $\mathcal{J}$ に対する格子系 (極座標) を固定し，その格子点番号を添字 j で表す．j 番子点上の視線方向成分を u_j と書き既知である．これに直交する周回方向の成分を v_j と書くがこれは未知である．

レーダー $\mathcal{K}$ もそれ自身の格子系を有する．その格子点番号を添字 k で表そう．$\mathcal{K}$ 系の k 番格子点では視線方向流速成分 U_k を観測している．$\{u_j|1 \le j \le {}^\exists J\}$, $\{U_k|1 \le k \le {}^\exists K\}$ という二組のデータを使って $\mathcal{J}$ 系の周回方向速度成分 $\{v_j|1 \le j \le J\}$ を求めたい．但し基線付近でも誤差が大きく拡大しないようなやり方でなければならない．

$\mathcal{K}$ 系の k 番格子点は $\mathcal{J}$ 系の j 番格子点と一致しない．$\mathcal{K}$ 系 k 番格子点の視線方向は，$\mathcal{J}$ 系の視線方向と角度 ψ_k を成すとしよう

$\mathcal{K}$ 系 k 番格子点を囲む $\mathcal{J}$ 系の四つの格子点がある (Fig. 4)．この四隅の格子点はそれぞれ $\mathcal{J}$ 系の番号 j を持つ．同時に (k,γ) という番号づけ (別名) も許す．ここに γ とは sw, se, ne, nw のいずれかである．つまり，$\mathcal{K}$ 系 k 番格子点の周りの四隅の γ 点という意味である．

$$\Gamma \equiv \{\mathrm{sw}, \mathrm{se}, \mathrm{ne}, \mathrm{nw}\}$$
$$\sim \{\text{南西}, \text{南東}, \text{北東}, \text{北西}\} \text{ の意}$$

という記号も使う．

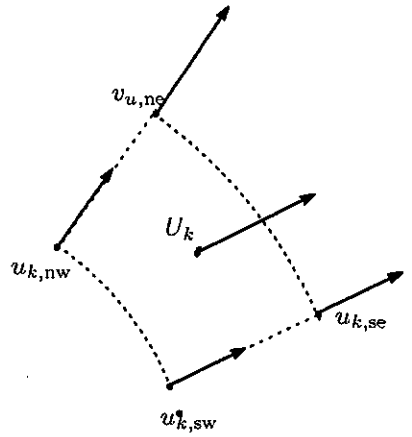

Fig. 4 Radar $\mathcal{K}$ measures only the radial component U_k at its k-th grid, which is enclosed by four grids of radar $\mathcal{J}$, labeled by (k,sw), (k,se), (k,ne), and (k,nw). Also radar $\mathcal{J}$ measures only the radial components of current $u_{k,\mathrm{sw}}$, $u_{k,\mathrm{se}}$, $u_{k,\mathrm{ne}}$, and $u_{k,\mathrm{nw}}$ at its own grids. The task here is to estimate the azimathul components of current $\{v_j\}$, using $\{U_k\}$ effectively as additional information.

そうすると $W_{k,\gamma}$ を四隅点の重み (例えば双線形補間の重み) によって定義した

$$\begin{cases} u_k \equiv \sum_{\gamma\in\Gamma} W_{k,\gamma} u_{k,\gamma} \\ v_k \equiv \sum_{\gamma\in\Gamma} W_{j,\gamma} v_{j,\gamma} \end{cases} \tag{35}$$

は，$\mathcal{J}$ 系 の視線方向成分，周回方向成分を $\mathcal{K}$ 系 k 番格子点へ補間した値になる．

ここで $\{u_{k,\gamma}|1 \le k \le K,\ \gamma \in \Gamma\} = \{u_j|1 \le j \le J\}$ は既知だが，未知の $\{v_{k,\gamma}|1 \le k \le K,\ \gamma \in \Gamma\} = \{v_j|1 \le j \le J\}$ を求めたい．一般には同じ j が複数の (k,γ) に対応するに注意する．

さて，観測にも補間にも誤差が無ければ

$$\begin{aligned} U_k &= u_k \cos\psi_k + v_k \sin\psi_k, \\ &= \cos\psi_k \sum_{\gamma\in\Gamma} W_{k,\gamma} u_{k,\gamma} \\ &\quad + \sin\psi_k \sum_{\gamma\in\Gamma} W_{k,\gamma} v_{k,\gamma} \end{aligned} \tag{36}$$

となる．U_k の信頼度を (既知の) 重み w_k としよう．この関係を基に $\{v_{k,\gamma}|1 \le k \le K,\ \gamma \in \Gamma\} = \{v_j|1 \le j \le J\}$ を未知量とし，

$$Q \equiv \sum_k w_k \left(\sin\psi_k \sum_\gamma W_{k,\gamma} v_{k,\gamma} - U_k + \cos\psi_k \sum_\gamma W_{k,\gamma} u_{k,\gamma} \right)^2 \tag{37}$$

を最小にする $\{v_j|1 \le j \le J\}$ を求める．

普通のやり方では，$\mathcal{K}$ 系 k 番格子点上の流速ベクトルを求めるのに次のようにしている．まず $\mathcal{K}$ 系 k 番格子点上における，$\mathcal{J}$ 系の視線方向流速成分 (未知) を四隅の観測値 $u_{k,\gamma}$ から補間・推定する．これと $\mathcal{K}$ 系の視線方向流速成分 U_k (観測値) を組み合わせて $\mathcal{K}$ 系 k 番格子点上の流速ベクトルが求められる．このやり方では U_k どうしが全く無関係なまま $\mathcal{K}$ 系格子上の流速ベクトルが決まる (従って $\mathcal{K}$ 系格子点の流速はばらばらになりやすい)．これに対し，ここで考えた最小自乗法では，一つの u_j がいくつかの U_k と関係しつつ $\mathcal{J}$ 系格子上の流速ベクトルを求めることになる．この点が異なる．

6.3 連続形で表現し調和補間を加味する

最小化問題を解くという違いはあっても (6.2) 節の方法は従来方式とほぼ同じであり (後で分かる)，基線付近で誤差が拡大しやすいという困難が残る．また，いずれかの観測値 U_k に隣接しない限り j 番点の値 v_j を求めることはできない．「観測値の無い領域で値を決めるには調和補間または重調和補間で補う」というところがまだ入っていないからである．

(5.2) 節の離散形では意味が分かりにくいのでまず連続形に表現し直して見通しを良くしよう．

$$\begin{cases} k \to \boldsymbol{x}, \quad \displaystyle\sum_k \to \int d\boldsymbol{x} \\ \displaystyle\sum_\gamma W_{k,\gamma} v_{k,\gamma} \to \int W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) v(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \end{cases}$$

と置き換えれば

$$Q = \int w(\boldsymbol{x}) \left(\int M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) v(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{x}) \right)^2 d\boldsymbol{x}$$

となる．ここに

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{x}) \\ \qquad - \displaystyle\int \cos\psi(\boldsymbol{x}) W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) u(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \\ M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv \sin\psi(\boldsymbol{x}) W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{cases} \tag{38}$$

は既知の量である．v に関する Q の変分をとると

$$\delta Q = 2 \int \left[\int w(\boldsymbol{z}) M(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) \left(\int M(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) v(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{z}) \right) d\boldsymbol{z} \right] \delta v(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$$

なので

$$\begin{aligned} 0 &= \int w(\boldsymbol{z}) M(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) \left(\int M(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) v(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{z}) \right) d\boldsymbol{z} \\ &= \int N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) v(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} - F(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{39}$$

を満たすように $v(\boldsymbol{x})$ を決める．ここに

$$\begin{cases} F(\boldsymbol{x}) & \equiv \displaystyle\int w(\boldsymbol{z}) M(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{z})\, d\boldsymbol{z} \\ N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \equiv \displaystyle\int w(\boldsymbol{z}) M(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) M(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{z} \end{cases} \tag{40}$$

は既知であり Fredholm の積分方程式を解くことに帰着させたことになる．

とくに

$$w = 1, \quad W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

の場合 (δ はデルタ関数)，方程式は

$$0 = \sin\psi(\boldsymbol{x}) \left[\sin\psi(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) - U(\boldsymbol{x}) + \cos\psi(\boldsymbol{x}) u(\boldsymbol{x}) \right]$$

となり，その解は

$$v = \frac{U - u\cos\psi}{\sin\psi} \qquad (\sin\psi \ne 0 \quad \text{とする}) \tag{41}$$

である．これは j 番格子における $\mathcal{K}$ 系視線方向速度 U と $\mathcal{J}$ 系視線方向速度 u から，j 番格子 における v を推定する従来の方法と同じである．勿論 $\sin\psi \approx 0$ となる所，即ち基線付近で誤差が大きくなる．欠測領域では $w = 0$ なので，$F = N = 0$ となり，この基準だけでは $\boldsymbol{u}$ が求められないことも明かだろう．

そこで，調和補間の良さを加味するために次のようにする．即ち

$$0 = -\nabla^2 v(\boldsymbol{x}) + \int N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) v(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} - F(\boldsymbol{x}) \tag{42}$$

を満たすように $v(\boldsymbol{x})$ を決める．

これは上に見た Q の代わりに

$$Q = \int (\nabla v(\boldsymbol{x}))^2\, d\boldsymbol{x} + \int w(\boldsymbol{x}) \times \left(\int M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) v(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{x}) \right)^2 d\boldsymbol{x}$$

を最小化する問題として定式化できる．

$$\begin{aligned}\delta\int(\nabla v)^2\,dx\\ &= 2\int\nabla\cdot(\delta v\nabla v)\,dx - 2\int(\nabla^2 v)\,\delta v\,dx\\ &= -2\int(\nabla^2 v)\,\delta v\,dx \qquad (43)\end{aligned}$$

だからである (領域境界上で $\delta v = 0$ とする)．

調和補間を入れるために Q に加えた第一項は，スカラー v の勾配の自乗の総和を表す．そのため周りの値から大きく違う値は現れにくい．調和補間項があれば，誤差の大きくなりやすい所 ($\sin\psi \approx 0$) で，緩和がある程度効き，誤差の拡大を抑制すると期待できる．更に，$w(\boldsymbol{x}) = 0$ となる欠測領域でも調和項が残るので $\boldsymbol{u}$ を決定することができる．これが調和補間項の第二の働きである．

観測値の有無に拘わらず $w(\boldsymbol{x}) \to 0$ とすれば，

$$\nabla^2 v = 0 \qquad (44)$$

を解くことになる．これは境界値のみで調和補間することを意味する．K レーダーの視線方向流速情報を R の中で一切使わず，単純に滑らかさだけで決めるということである．逆に $w(\boldsymbol{x}) \to \infty$ とすれば滑らかさ (周りの値) に頓着せず決める普通の方式になる (基線付近では誤差が大きくなりがちである)．

観測値の重み w には程合いがあるだろうが，その意味づけと決め方は難しい．$\sin\psi(\boldsymbol{x})$ が小さい所では $w(\boldsymbol{x})$ を小さくとるといった工夫も可能だろう．

熱伝導と類比すると式 (42) の意味が分かり易くなる．今，簡単のため

$$\begin{cases} M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sin\psi(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ w(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{\kappa} = \text{const} \qquad (\kappa > 0) \end{cases} \qquad (45)$$

としよう．このとき (42) は

$$\begin{aligned}0 = \kappa\nabla^2 v(\boldsymbol{x}) + \sin\psi(\boldsymbol{x})\times\\ [f(\boldsymbol{x}) - \sin\psi(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})] \qquad (46)\end{aligned}$$

となる．これは v を温度，κ を熱伝導係数，f を外部熱源，$\sin\psi$ を外部熱源の吸収効率，$\sin^2\psi\cdot v$ を温度に応じた放熱量 (放熱係数は外部熱源吸収効率の自乗) として，定常温度分布を決めることと同じである．熱伝導係数 κ が大きければ，熱源や内部放熱は効かず，境界値に馴染むように v が決まる．逆に拡散がなければ，外部から注入した熱を全て放熱するよう，局所的に温度が決まる．$\sin\psi \approx 0$ のところは，吸収効率も悪いが放熱効率は更に小さいので，ちょっとした熱源でも高温 (あるいは低温) になり易いことを表す．

調和補間の代わりに重調和補間を加味するのなら

$$0 = \nabla^4 v(\boldsymbol{x}) + \int N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} - F(\boldsymbol{x}) \qquad (47)$$

とすればよい．この場合

$$\int(\nabla^2 v)^2\,dx$$

なる量を小さくしようとすることが重調和項をもたらすことも調和項の場合と同様である．領域境界で

$$\delta v = \frac{\partial}{\partial n}\delta v = 0 \quad \left(\frac{\partial}{\partial n}\text{ は法線微分}\right) \qquad (48)$$

とすれば，

$$\begin{aligned}\delta\int(\nabla^2 v)^2\,dx\\ &= 2\int\nabla\cdot[\nabla^2 v\,\nabla\delta v - \delta v\nabla^3 v]\,dx\\ &\quad +2\int(\nabla^4 v)\delta v\,dx\\ &= 2\int(\nabla^4 v)\delta v\,dx \qquad (49)\end{aligned}$$

だからである．

7. 汎用補間法に一般化する

前節では基線付近でもそれなりに働く流速ベクトル推定法を追求してきた．しかしながら (6.3) 節の考察を基にすれば，更なる一般化が可能である．周回方向速度に限る必要はないし，未知数をいくらでも増やせる．また理屈の上では関連する情報を全て使える．

7.1 調和型緩和付き最小自乗法

具体的に，普通の直方格子上の流速ベクトルを全て未知量とする問題を考えよう．

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \equiv (u(\boldsymbol{x}), v(\boldsymbol{x}))' \in \boldsymbol{R}^2$$

を領域 R 内の未知の二次元流速場とする (太字 $\boldsymbol{u}$ はベクトルで，u は x 成分であることに注意)．$f(\boldsymbol{x})$ を何らかの観測量とする．誤差を含まないなら

$$f(\boldsymbol{x}) = \int M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{x}\in R$$

となっているべき量であるとしよう．但し $M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{M}(1,2)$ は既知とする．この条件の重みを $w(\boldsymbol{x})$ で

表す．これは自由に決めて良い．逆にいうと決め方が問題になる．ここでは一応固定しておこう．

上のように書いたが $f(\boldsymbol{x})$ が連続分布である必要はない．離散分布でも良い (実際上は常に離散分布)．また f が同種の観測量である必要はない (後で示すようにスカラーでなく何次元ベクトルでも構わない)．

このとき非負量

$$Q \equiv \int \left[(\nabla u(\boldsymbol{x}))^2 + (\nabla v(\boldsymbol{x}))^2\right] d\boldsymbol{x} + \int w(\boldsymbol{x}) \left[\int M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{x})\right]^2 d\boldsymbol{x} \quad (50)$$

を最小化するような $\boldsymbol{u}$ を求める．

$\boldsymbol{u}$ につき Q の変分を取れば方程式

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\nabla^2 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \int N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \quad (51)$$

を得る．但し

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) & \equiv \int w(\boldsymbol{z}) M'(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{z})\, d\boldsymbol{z} \\ N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \equiv \int w(\boldsymbol{z}) M'(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) M(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{z} \end{cases} \quad (52)$$

である．外見は (6.3) 節の (39)，(40) と変わらない．F，u がベクトル $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{u}$ になることに対応して積分核も行列になり転置演算 $'$ が入ることだけである．

$$\begin{cases} w(\boldsymbol{x}) \to 0 \Rightarrow \\ \qquad \nabla^2 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0 \\ w(\boldsymbol{x}) \to \infty \Rightarrow \\ \qquad \int N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \end{cases} \quad (53)$$

の意味も全く同じである．

調和緩和を重調和緩和に換えるなら

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \nabla^4 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \int N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \quad (54)$$

とする．積分核 N はある種の平均を表し性質が良い．数値解なら難しくはない．緩和法か行列演算で済む．F と N の二つとも重み w を含む．重み付けは自由であるが，何度も繰り返してきたように選び方と理由付けは難しい．

この方法は領域全体の流速ベクトルを一挙に推定する手段として使える．しかし，十分な測定がある所でわざわざこのような方法を使わなくてもよい．従って，緩和法といっても，未知として扱うのは，欠測領域および基線周囲領域に限ればよい．実際に対馬海峡の海流・潮流に適用するとそれなりにうまくいく (山下ほか 2004)[2]．これが最適ベクトル補間法と呼んでいたものである．.

二つのレーダーの共通視野 (流速ベクトルが直接求められる区域) を含む広い領域 (片方のレーダーの視野内) で流速ベクトルを推定するのにもこの手法を試してみたことがある．二つのレーダーによる観測値が両方ある領域の少し外側までは何とかそれらしい流速分布が現れていた (山下ほか 2004)[2]．

この汎用法が原理として優れていると考える理由を以下に上げる．

- 類似した問題に広く使える．汎用法である．
- データを活用する最小化問題である．
- 場合によっては，他のあらゆるデータ (流速と関連付けられるような) を活用・同化して精度を上げていくことができる．
- 閉じた領域に限らず，開いた領域や，単一レーダーで見ている場合などいろいろと使えそうである．
- 調和補間を併用しているので誤差の拡大が抑えられるし，観測値のない区域の流速も同時に推定できる．調和補間は渦度と発散を同等に扱う．

7.2 (重) 調和補間の流体力学上の意味

(7.1) 節に述べた汎用法で $w = 0$ とすると

$$Q \equiv \int (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\, dxdy$$

を最小化する問題になる．これは

$$\nabla^2 \boldsymbol{u} = 0$$

を解くことになり，ベクトルの調和補間を意味する．即ち流速ベクトル場を境界条件のみで決める．

これには流れの発散と渦度に関連した意味付けができる．即ち「Q を最小化する」ことは「渦度の自乗と発散の自乗和

$$P \equiv \int \left[(\nabla \cdot \boldsymbol{u})^2 + (\nabla \times \boldsymbol{u})^2\right] d\boldsymbol{x} \quad (55)$$

を最小化する」ことと同等になっている．これを示そう．容易に分かるように

$$P - Q = 2\int \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right] d\boldsymbol{x} \quad (56)$$

である．境界で $\delta \boldsymbol{u} =$ という条件を使えば，$\boldsymbol{u}$ に関する変分が

$$\delta P - \delta Q$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta u\frac{\partial v}{\partial y} - \delta v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta v\frac{\partial u}{\partial x} - \delta u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる．これから所要の結果を得る．

一方，重調和補間では

$$
Q \equiv \int (|\nabla^2 u|^2 + |\nabla^2 v|^2)\, dx
$$

を最小化しようとしているのだった．これも「渦度の勾配の自乗と発散の勾配の自乗和

$$
P \equiv \int \left[|\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})|^2 + |\nabla(\nabla\times\boldsymbol{u})|^2\right] dx \quad (57)
$$

を最小化する」ことと同じである．これを示すには

$$
\begin{aligned}
\delta P &= 2\int \nabla^3(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\cdot\delta\boldsymbol{u}\, dx \\
&\quad +2\int \nabla^3(\nabla\cdot\neg\boldsymbol{u})\cdot(\neg\delta\boldsymbol{u})\, dx \\
&= 2\int \nabla^4\boldsymbol{u}(x)\cdot\delta\boldsymbol{u}\, dx \quad = \delta Q \qquad (58)
\end{aligned}
$$

とすればよい．但し $\delta\boldsymbol{u}$ に対する境界条件，

$$
\delta\boldsymbol{u} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n}\delta\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{on} \quad \partial R
$$

を用いた．

この意味づけを用いると調和補間を加味した汎用法の趣旨がよく分かる．即ち，

(1) 流れと関係づけられる量の観測値があればなるべくそれに近い値を出し，しかも

(2) 領域全体で渦度や発散が小さい (流速の変動が穏やか) ような流速場を求める

ということである．一方，重調和補間を加味した方法では，(2) に換えて

(2') 領域全体で渦度や発散の変動が小さい (渦度や発散の空間変動が穏やかな) 流速場を求めようとしている．

どちらも一種の滑らかさを流速場に課す．重調和補間の方が緩い制限だが手順は複雑になる．

7.3　少ない観測資料で流速を推定する手法

ここまで来ると，更に少ない観測資料でも流速場全体を推定できそうな気がしてくる．勿論，いろいろな仮定が必要である．

平面上の単連結領域の内部を R，その境界を ∂R，境界を含めた領域を $\overline{R}$ と書く．$\overline{R}$ における水平流速ベクトル $\boldsymbol{u}$ の分布を求める問題である．任意の流速場は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}^{r,d} + \boldsymbol{u}^{ir,nd} \\
&= \boldsymbol{u}^{r} + \boldsymbol{u}^{d} + \nabla\phi \qquad (59)
\end{aligned}
$$

と分解できる．但し R で所与の渦度分布を持ち発散の無い流れを $\boldsymbol{u}^r$ (rotational part) で表し，R で所与の発散分布を持ち渦度が無い流れを $\boldsymbol{u}^d$ (divergent part) で表す．また

$$
\boldsymbol{u}^{r,d} \equiv \boldsymbol{u}^{r} + \boldsymbol{u}^{d} \qquad (60)
$$

である．境界での流速に関する条件が何かないと流速場は決まらないので適当な条件を課す．例えば $\boldsymbol{u}^r$ では法線速度が 0 となるように，$\boldsymbol{u}^d$ では接線速度が 0 となるようにできる．点源の渦度，発散に対する軸対称解の重ね合わせでもよい (付録参照)．

一方 $\boldsymbol{u}^{ir,nd}$ (irrotational, nondivergent part) は，全体として領域内外への出入りがないような境界法線速度をもつ渦なし非発散の流れである．この流れは速度ポテンシャル $\phi^{ir,nd}$ で表せる．$\phi^{ir,nd}$ には定数だけの任意性があるので $\phi^{ir,nd}$ 値を一意に確定させるために

$$
\oint_{\partial R} \phi^{ir,nd}\, ds = 0 \qquad (ds \text{ は境界上の線素}) \ (61)
$$

を課しておく．

さて，渦度 $\nabla\times\boldsymbol{u}$ (二次元ベクトルではスカラーとして扱う) と発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}$ を同時に表現するために太字で書き，

$$
\boldsymbol{\omega} \equiv (\nabla\times\boldsymbol{u},\ \nabla\cdot\boldsymbol{u})'
$$

と二次元列ベクトルのように書く ($\boldsymbol{\omega}$ の 第一成分が渦度，第二成分が発散)．

離散化し格子点の値にしたものを並べて大文字でかつ太字に書こう．$\boldsymbol{U}$ や $\boldsymbol{\Omega}$ を $\overline{R}$ で定義したものを全体場と呼び添字 t (total) を右下に付ける．同様に ∂R で定義したものを境界場と呼び添字 b (boundary) を右下に付けることにする．全体場は ${}^{\exists}T$ 個，境界場は ${}^{\exists}B$ 個の量からなる。但し T が領域内と境界上の格子点の数，B が境界上の格子点の数で一般に $T \gg B$ となる．連続表示で二次元ベクトルであるものは，その二倍の次元をもつベクトルとして扱う．例えば $\boldsymbol{\Omega}_t$ は $\overline{R}$ の T 個の格子点における二次列ベ

クトルを T 個縦に並べたものなので，$2T$ 個の成分からなる列ベクトルを表す．

今 $\boldsymbol{U}^o \in \boldsymbol{R}^K$ を観測値なり何なりの総体 (個数 K) で所与とする．(6.2) 節の例で言えば，R での視線方向速度成分と，∂R 上の流速ベクトル観測データが $\boldsymbol{U}^o$ を構成する．なお，$\boldsymbol{U}^o$ は流速そのものでなくとも良いが $\overline{R}$ の一部分の流速とは関係が付くものでなければ意味がない．誤差がなければ，流れ $\boldsymbol{U}_t$ と $\boldsymbol{U}^o$ とは

$$0 = P\boldsymbol{U}_t - O\boldsymbol{U}^o$$

の関係があるとしよう．ここに $P \in \boldsymbol{M}(K,T)$, $O \in \boldsymbol{M}(K,K)$ は既知とする．

観測値 (既知) の数 K が未知量 $\boldsymbol{U}_t$ の数 $2T$ より遙かに小さいとしている．何らかの仮定がなければ未知量を決めることはできない．最小化問題として解くことを考える．$\boldsymbol{U}_t$ 全体を未知とする扱いもできるだろうが，未知数の数 $(2T)$ が大き過ぎよう．$O(B)$ 程度の個数の未知数に抑えたい．

そこで，天下りだが 仮定であり便法・手段 と割り切り，流れが

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0 \text{ in } R \tag{62}$$

を満たすとする．これは前節で調べた重調和補間の考え方に沿う．渦度と発散の空間変動が全体として小さいということを表すのだった．渦度や発散は許すが，その空間変動を抑え全体として滑らかにするという条件である．

この仮定があれば，境界場 $\boldsymbol{\Omega}_b$ から全体場の渦度・発散 $\boldsymbol{\Omega}_t$ が分かる．境界要素法を用いて調和方程式 (Dirichlet 問題) の解が求まるからである．スカラーに対する境界要素法の解を表現するある線形演算子 (行列) $L \in \boldsymbol{M}(T,B)$ が決まる (付録 2)．このとき

$$\boldsymbol{\Omega}_t = \tilde{L}\boldsymbol{\Omega}_b$$

と書ける．L は領域の形から分かるものであり既知としてよい (求めておく．付録 2)．但し

$$\tilde{L} \equiv \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}(2T, 2B)$$

である．

境界値 $\boldsymbol{U}_b^{r,d}$ に適当な条件 ($\boldsymbol{\Omega}$ の詳細に依存しない) を指定しておけば，$\boldsymbol{\Omega}_t$ に対応する流れを

$$\boldsymbol{U}_t^{r,d} = M\boldsymbol{\Omega}_t = M\tilde{L}\boldsymbol{\Omega}_b$$

と表せる．領域の形により $M \in \boldsymbol{M}(2T, 2[T-B])$ が決まる (付録 2)．

残るは渦なし発散なしの流れである．$\phi_b \in \boldsymbol{R}^B$ が分かれば，境界要素法の行列 L を用いて

$$\boldsymbol{\Phi}_t = L\boldsymbol{\Phi}_b$$

と書ける．これを用いて

$$\boldsymbol{u}^{ir,nd} = \nabla\phi \tag{63}$$

が求まる．離散系で表現すれば，$^\exists N \in \boldsymbol{M}(2T, B)$ で

$$\boldsymbol{U}_t^{ir,nd} = NL\boldsymbol{\Phi}_b \tag{64}$$

となる．(定数の不定性を除く) 付加条件があるので $\check{\boldsymbol{\Phi}}_b \in \boldsymbol{R}^{B-1}$ を決めればよい．$G \in \boldsymbol{M}(B, B-1)$ を用いて $\boldsymbol{\Phi}_b = G\check{\boldsymbol{\Phi}}_b$ と表す．

結局，流速の全体場は二つの未知量 $\boldsymbol{\Omega}_b \in \boldsymbol{R}^{2B}$ と $\check{\boldsymbol{\Phi}}_b \in \boldsymbol{R}^{B-1}$ から決まる．以上により，

$$\boldsymbol{U}_t = \boldsymbol{U}^{r,d} + \boldsymbol{U}^{ir,nd} = M\tilde{L}\boldsymbol{\Omega}_b + NLG\check{\boldsymbol{\Phi}}_b \tag{65}$$

は，領域内部で渦度と発散が調和関数となる流れがあるという仮定を除けば，任意の二次元流を表現することが分かった．未知数は $3B-1$ ($\ll T$) なので，それほど大きな次数にならずに済む．残差を表す列ベクトルは

$$\begin{aligned} &P\boldsymbol{U}_t - O\boldsymbol{U}^o \\ &\quad = PM\tilde{L}\boldsymbol{\Omega}_b + PNLG\check{\boldsymbol{\Phi}}_b - O\boldsymbol{U}^o \\ &\quad = \check{M}\boldsymbol{\Omega}_b + \check{N}\check{\boldsymbol{\Phi}}_b - O\boldsymbol{U}^o \end{aligned} \tag{66}$$

となる．但し

$$\begin{cases} \check{M} \equiv PM\tilde{L} \in \boldsymbol{M}(K,B) \\ \check{N} \equiv PNLG \in \boldsymbol{M}(K,B-1) \end{cases} \tag{67}$$

と置いた．

$W \in \boldsymbol{M}(K,K)$ を観測値 $\boldsymbol{U}^o$ に合わせるべき流速場の条件の重みを表す行列とし，

$$\begin{aligned} S \equiv &(\check{M}\boldsymbol{\Omega}_b + \check{N}\check{\boldsymbol{\Phi}}_b - O\boldsymbol{U}^o)' \times \\ &W(\check{M}\boldsymbol{\Omega}_b + \check{N}\check{\boldsymbol{\Phi}}_b - O\boldsymbol{U}^o) \end{aligned} \tag{68}$$

を重み付き残差平方和とすれば S は未知量 $\boldsymbol{\Omega}_b \in \boldsymbol{R}^{2B}$, $\check{\boldsymbol{\Phi}}_b \in \boldsymbol{R}^{B-1}$ に関する非負二次形式になっている．S を最小化するような $\boldsymbol{\Omega}_b$, $\check{\boldsymbol{\Phi}}_b$ を求めるという形でも良い (付録 1)。

更に

$$\begin{aligned} Q &\equiv \int [(\nabla \times \boldsymbol{u})^2 + (\nabla \cdot \boldsymbol{u})^2]\, d\boldsymbol{x} + S \\ &= \boldsymbol{\Omega}_b' \tilde{L}' \tilde{L} \boldsymbol{\Omega}_b + S \end{aligned} \tag{69}$$

も未知量 $\boldsymbol{\Omega}_b \in \boldsymbol{R}^{2B}$, $\check{\boldsymbol{\Phi}} \in \boldsymbol{R}^{B-1}$ に関する非負二次形式である．この Q を最小化する問題が調和補間を加味した汎用法に相当する (最初の仮定に重調和補間の意味が入っている).

以上のように定式化した最小化問題を特異値分解法ないし最小自乗法で数値的に解き $\boldsymbol{\Omega}_b \in \boldsymbol{R}^{2B}$, $\check{\boldsymbol{\Phi}}_b \in \boldsymbol{R}^{B-1}$ を求めれば，流速場を (65) から推定できる．

この場合も，直接手段で分かっているところは触らず必要なところだけ推定することにすればよい．ところで行列 G, L, M, N, O, P は次数が大きい．しかし，対象領域の形状，領域の離散化の仕方，観測値の種類と分布，その重み付けだけで決まる．例えば基線を挟む菱形領域について予め一度だけ計算して求めておくだけでよい．

境界における法線速度の精度をよくするため，少し広めに境界を取ると良いかもしれない．この解法を使うには緩和法と特異値分解の良い解法が望ましい．また，単一レーダーだけからしか見えていない場合も，それなりの領域を取って行う．一時間毎の海流のようなものでは潮流や小規模・短周期の渦が入っているだろうから，基本仮定 (重調和補間に類する方式) を満たしにくい．その意味では日平均流速場の方が良いかもしれない．

観測値による拘束が小さいとどうしても非現実的な流れが出やすいだろう．手順が煩雑で出てくる行列が大きいのは仕方ない．

応用として単一レーダーだけから流速ベクトルを推定することができるかという問題を考えよう．今，三角形の入り江の奥から一つの海洋レーダーが視線方向成分のみを計っているとする．あるいは長い直線状海岸に置いた一つのレーダーで沖合いを監視しており −90 度から +90 度まで視線方向流速を計っているとする．海岸線における法線方向速度成分を何らかの手段で特定する．例えばその法線速度成分は 0 とする．こうすれば (5.2) 節の方法で考えた基線付近の流速推定で扇型領域境界における法線方向速度を全て推定し流速場を求めることができる．

しかし，この方法だと周回方向速度成分が単調過ぎるような流れしか出ないだろう．そこで海岸 (領域境界) における流速自体も未知としてここ (7.3) 節で見てきた方法を適用する．即ち「渦度と発散が調和関数」であり，観測した流速成分値をできるだけ再現するように決めるとすれば少し自由度が大きくなる．この方法だと海岸形状に制限はない．

「渦度と発散が調和関数である」という仮定は「水平発散が無い」といった仮定より自由度がある．しかしあくまで仮定に過ぎないことに留意する．例えば，渦度や発散の最大値あるいは最小値が領域内部に現れるような流れは，この条件を満たす流れにはない．また，緩和付き最小自乗法では，観測値に近づける部分 (最小自乗) と周りに馴染ませる部分 (調和式緩和) の重みを適当に (経験的に) 付けなければならない．

データが少なければ補間でなく補外に近いのでどうしても信頼性に欠ける．結果を示す際にはその旨の注釈を必ず付けておかねばならない．

8. おわりに

本稿は，これから海洋レーダーを使った観測とその解析をしようとする人の便宜および私自身の心覚えとして書きとめたものである．海洋レーダーを念頭においてはいるが，ほかの状況でも使えるように考え方を中心にまとめた．

まだ試してみたことがなく空想 (幻想?) に近いものもあるが考え方を汲み取って頂ければ幸いである．実例は一部を山下ほか (2004)[2] で示したのでそちらを参照して頂きたい．前半は丁寧に書いたが，後半は (面倒な主題を扱っているということもあり)，駆け足になり舌足らずになってしまった．また異常値の除去・補間については極めて不十分であり，軽く触れるに留めた．次の機会に (誤りがあれば訂正し) 数値例など内容を補うつもりである．

謝　辞

本研究は，科学研究費基盤研究 (B)「海洋レーダーを中心として沿岸部・海峡部の表層海況を監視するシステムの開発研究　—対馬海峡を実験海域として—」の一環として行ったものである．応用力学研究所共同研究「海洋短波レーダーによる日本沿岸海況監視システムの開発」(代表: 藤井智史，平成 17-19 年度) により一部援助を受けた．また本稿の作成作業を池末あけみさんに手伝って頂いた．記して謝意を表すものである．

参考文献

1) 山本秀幸, 増田 章, 草場忠夫, 丸林賢次, 石橋道芳, 奥野 章, 藤井智史, 佐藤健治: HF レーダーを用いた対馬海峡表層海流の観測　—予備解析—, 応用力学研究所所報, **122**, (2002) 9-23.

2) 山下義幸, 増田 章, 吉川 裕, 丸林賢次, 石橋道芳, 奥野 章: 海洋レーダー観測システムで用いる基線付近流速場の補間・推定手法, 応用力学研究所所報, **126**, (2004) 47-56.

3) 奥野章, 吉川 裕, 増田 章, 丸林賢次, 石橋道芳: 対馬海峡表層海況監視海洋レーダーシステム, 応用力学研究所所報, **126**, (2004) 57-67.

4) 奥野 章, 吉川 裕, 増田 章, 丸林賢次, 石橋道芳, : 短波レーダーにより観測された対馬海峡の潮流, 九州大学大学院総合理工学報告, **27**, No.1, (2005) 9-18.

5) 遙山 誠, 増田 章, 吉川 裕, 奥野 章: 日本沿岸域における M_2 潮汐振幅の季節変動および経年変動, 九州大学大学院総合理工学報告, **26**, No.3, (2004) 365-372.

6) Yoshikawa, Y., A. Masuda, K. Marubayashi, M. Ishibashi and A. Okuno: On the accuracy of HF radar measurement in the Tsushima Strait, *J. Geophys. Res.*, **111**, C04009, (2006) 1-10.

7) 増田 章: 表層流・潮汐に関する覚書 ―海洋レーダー観測に関連して―, 応用力学研究所所報, **132**, (2007) 55-74.

8) Yoshikawa, Y., T. Matsuno, K. Marubayashi and K. Fukudome: A surface velocity spiral observed with ADCP and HF radar in the Tsushima Strait, *J. Geophys. Res.*, **112**, C06022, (2007) doi:1029/2006JC003265.

9) 石井大輔, 柳哲雄, 吉川裕, 増田章: 漂流ブイと海洋レーダーを用いた対馬海峡における収束・発散場の評価, 海の研究, **16**, (2007) 237-251.

10) 中園隆司, 吉川裕, 増田 章, 丸林賢次, 石橋道芳: 対馬海峡東水道に見られる反時計回り渦の変動特性, 応用力学研究所所報, **134**, (2008) 47-52.

11) 藤井智史, 徳田正幸: HF レーダーによる沿岸海洋観測, 陸上設置型レーダーによる海洋観測, 土木学会, (2001) 68-89.

付 録

A1. 一般の二次形式最小化問題

観測量と求めたい量が 4 節ほど直接的に関係付けられないことがある．7.3 節がその例である．

このような場合を複素数に広げ一般化して扱っておこう．$\boldsymbol{C}^n$ で複素 n 次列ベクトルの全体を表し，行列の肩につけた * で転置行列の複素共役を表す．

$\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{C}^m$ が未知ベクトル

$\boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{C}^k$ が既知ベクトル (観測値)

$A \in \boldsymbol{M}(n,m)$, $B \in \boldsymbol{M}(n,k)$ とも既知

としよう．A, B は複素行列でよい．本来なら

$$A\boldsymbol{X} = B\boldsymbol{Y} \tag{A1}$$

を満たさなければならないものとしておく．しかし誤差があり正確にはこの条件を満たさない．そこで残差平方和に相当する

$$Q \equiv (A\boldsymbol{X} - B\boldsymbol{Y})^*(A\boldsymbol{X} - B\boldsymbol{Y})$$

を最小にするような $\boldsymbol{X}$ を求める．満たすべき条件の重みがまちまちな場合は，$W_{i,j} = w_j\delta_{i,j}$ $(w_j \geq 0)$ という成分を持つ行列 $W \in \boldsymbol{M}(n,n)$ を用いて

$$Q \equiv (A\boldsymbol{X} - B\boldsymbol{Y})^* W (A\boldsymbol{X} - B\boldsymbol{Y}) \geq 0 \tag{A2}$$

なる重み付き残差平方和を最小化する問題にする．

$\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{C}^m$ について Q の変分をとれば

$$\begin{aligned}\delta Q = {} & \delta\boldsymbol{X}^*(A^*WA\boldsymbol{X} - A^*WB\boldsymbol{Y}) \\ & +(A^*WA\boldsymbol{X} - A^*WB\boldsymbol{Y})^*\delta\boldsymbol{X}\end{aligned}$$

を得る．任意の $\delta\boldsymbol{X}$ に対して $\delta Q = 0$ となるためには

$$A^*WA\boldsymbol{X} - A^*WB\boldsymbol{Y} = 0 \tag{A3}$$

でなければならない．$A^*WA \in \boldsymbol{M}(m,m)$ はエルミート行列で，普通は正則だから

$$\boldsymbol{X} = (A^*WA)^{-1}(A^*WB\boldsymbol{Y}) \tag{A4}$$

として $\boldsymbol{X}$ が求まる．解の適合度 R については結果だけ書けば

$$1 \leq R^2 = \frac{\boldsymbol{Y}^*B^*WA\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{Y}^*B^*WB\boldsymbol{Y}} \geq 0 \tag{A5}$$

である．

A を F に，B を I に置き換えれば，第 4 節の結果になる．

A2.　流速場の表現　7.3 節の補足として

7.3 節では，領域内部で所与の渦度と発散を持ち，境界で所与の流速を持つ流れを構成する仕方を省いた．ここで補足しておく．

1. 簡単のため R を単連結領域としておく。所与の境界値分布 ψ_b に対して Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \nabla^2\psi = 0 & \text{in} \quad R \\ \psi = \psi_b & \text{on} \quad \partial R \end{cases} \tag{A6}$$

を一意に解くことができる．その解演算子を L と書けば

$$\psi = L(\psi_b) \tag{A7}$$

である．複雑な形状でも離散形なら数値解法で L が容易に求まる．

次のようにする．B 個ある境界点のうち i 番目の境界点で 1，他の境界点で 0 となる境界条件に対して調和方程式を数値的にとけば列ベクトル $\boldsymbol{\Psi}_t \in \boldsymbol{R}^T$ が一個求まる (T は領域内および領域境界の格子点の数)．これを全ての i $(1 \le i \le B)$ について行い，横に並べた行列が所要の $L \in \boldsymbol{M}(T, B)$ に他ならない．即ち任意の $\boldsymbol{\Psi}_b \in \boldsymbol{R}^B$ に対する解は

$$\boldsymbol{\Psi}_t = L\boldsymbol{\Psi}_b \tag{A8}$$

と表せる。

2. 渦無しでかつ発散も無い流れは速度ポテンシャル ϕ で表現する (流線関数でもよい)．ϕ は調和関数であり，境界値 ϕ_b を与えれば $\phi = L(\phi_b)$ と自然に決まる (境界要素法)．領域を離散化すると境界を構成する格子点は B 個あるが，定数分の不定性を除くため

$$\oint \phi\, dx \sim \sum_{k=1}^{B} \Phi_k = 0 \tag{A9}$$

なる条件を課す (不等格子間隔ならそれなりの比率での和)．

従って実際に扱う未知量は $\tilde{\boldsymbol{\Phi}} \in \boldsymbol{R}^{B-1}$ としておく．$\Phi_i = 1$, $\Phi_B = -1, \Phi_j = 0 \quad (B \ne j \ne i)$ なる境界条件のときの $\boldsymbol{\Phi}_t$ を求め，その表す流れ $\boldsymbol{U}_t \in \boldsymbol{R}^T$ を横に並べると行列 $NG \in \boldsymbol{M}(T, B-1)$ が求まると考えても良い．

3. 所与の発散と渦度を領域内部にもつ流れは次のようにして構成する．

渦なしで原点に単位発散 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = \delta(\boldsymbol{x})$ を持つような軸対称流は

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2} = \nabla\frac{\log|\boldsymbol{x}|}{2\pi}$$

である．よって発散を強弱に応じて重ね合わせ

$$\phi^d \equiv \int \frac{\log|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}{2\pi}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} \tag{A10}$$

とすれば

$$\boldsymbol{u}^d(\boldsymbol{x}) = \nabla\phi^d \tag{A11}$$

が渦無しで所与の発散分布を持つ流れを表す．実際には離散系表現に置き換えて使う．

同様に，発散無しで所与の渦度分布を持つ流れは

$$\boldsymbol{u}^r(\boldsymbol{x}) = \nabla\times\psi^r = -\neg\nabla\psi^r \tag{A12}$$

となる．ψ^r は ϕ^d と全く同様で

$$\psi^r \equiv \int \frac{\log|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}{2\pi}(\nabla\times\boldsymbol{u})(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} \tag{A13}$$

と表せる．

4. なお，$\boldsymbol{u}^r$ では境界で法線流速が 0 のものを，$\boldsymbol{u}^d$ では境界で接線流速が 0 のものを選ぶのも自然である．流線関数 ψ^r を

$$\begin{cases} \nabla^2\psi^r = \nabla\times\boldsymbol{u} & \text{in} \quad R \\ \psi^r = 0 & \text{on} \quad \partial R \end{cases}$$

から求めて

$$\boldsymbol{u}^r = \nabla\times\psi^r$$

とすれば対応する流れ $\boldsymbol{u}^r$ を得る．$\boldsymbol{u}^d$ についても同様であることは共役ベクトル場 (2 節) を考えれば明かであろう．事実，

$$\begin{cases} \nabla^2\phi^d = \nabla\cdot\boldsymbol{u} & \text{in} \quad R \\ \phi^d = 0 & \text{on} \quad \partial R \end{cases} \tag{A14}$$

$$\boldsymbol{u}^d = \nabla\phi^d \tag{A15}$$

が対応する表現である。

5. 以上の結果を使うと，任意の二次元流速場を

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}^r + \boldsymbol{u}^d + \boldsymbol{u}^{ir,nd} \\ &= \nabla\times\psi^r + \nabla(\phi^d + \phi^{ir,nd}) \end{aligned} \tag{A16}$$

と表せることが分かる．