貯水池の洪水調節作用の圖表解法

熊谷，才藏

https://doi.org/10.15017/14104

出版情報：九州帝国大学農学部演習林報告. 15, pp.115-121, 1947-09-20. 九州大学農学部附属演習林
バージョン：
権利関係：

貯水池の洪水調節作用の圖表解法

S. Kumagai: Nomograhic Determination of the Discharge of a Flood-control Reservoir

熊　谷　才　藏

貯水池或は湖水えの流入量を時間の函数として與へた時、それからの流出量を算出する方法としては早く Ekdahl の数値計算法があり、此を簡約して図式解法に移したものに物部博士の方法があるが、Ekdahl の方法は又當然図表解法えも移し得る筈である。

今一階微分方程式が次の形に書き表わされたとする。

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)+f_2(y) \qquad (1)$$

（1）の両辺を $x=x_n$ から $x=x_{n+1}$ 迄積分すれば

$$y_{n+1}-y_n=\int_{x_n}^{x_{n+1}} f_1(x)\,dx+\int_{x_n}^{x_{n+1}} f_2(y)\,dx \qquad (2)$$

但し y_{n+1}，y_n は夫々 x_{n+1}，x_n に対應する y の値を表わす。

（2）の右辺の第一項は f_1 の解析式が與へられていれば充分精密に計算し得るが、第二項の計算は y が未知である以上何等かの近似法に依らねばならない。今試みに第一項、第二項共に梯形公式で計算するならば、$x_{n+1}-x_n=h$ として

$$y_{n+1}-y_n=\frac{h}{2}\Big(f_1(x_n)+f_1(x_{n+1})\Big)+\frac{h}{2}\Big(f_2(y_n)+f_2(y_{n+1})\Big)$$

従って

$$y_{n+1}-\frac{h}{2}f_2(y_{n+1})=\frac{h}{2}\Big(f_1(x_n)+f_1(x_{n+1})\Big)+y_n+\frac{h}{2}f_2(y_n) \qquad (3)$$

を得る。若し y_n を知るときは（3）の右辺は既知数となるから、（3）を y_{n+1} に就いて解けば y_{n+1} が求められる。此が即ち Ekdahl 法の原理である。

又（2）の中の積分を Simpson 式で計算するならば $h=x_{n+1}-x_n=x_n-x_{n-1}$ として

$$y_{n+1}-\frac{h}{3}f_2(y_{n+1})=\frac{h}{3}\Big(f_1(x_{n-1})+4f_1(x_n)+f_1(x_{n+1})\Big)+y_{n-1}+\frac{h}{3}f_2(y_{n-1})+\frac{4}{3}\times hf_2(y_n) \qquad (4)$$

こゝに y_{n-1} は x_{n-1} に対應する y の値を表わす。よって y_{n-1}, y_n の値を知る時は（4）を y_{n+1} について解くことが出來る。此は Ekdahl 法を幾分精密にしたものである。

尚上記の方法は又方程式

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y)+f_3(x)f_4(y) \qquad (5)$$

にも適用出來る。今 $t=\int f_1(x)dx$ なる關係を滿足する新変数 t を x の代りに用いれば（3）は

$$\frac{1}{f_4(y)}\frac{dy}{dt}=\frac{f_2(y)}{f_4(y)}+\frac{f_3(x)}{f_1(x)} \qquad (6)$$

の如く書ける。

$$\therefore \int_{y_n}^{y_{n+1}}\frac{1}{f_4(y)}dy=\int_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{f_2(y)}{f_4(y)}dt+\int_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{f_3(x)}{f_1(x)}dt=\int_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{f_2(y)}{f_4(y)}dt+\int_{x_n}^{x_{n+1}}f_3(x)dx$$

$\int\frac{dy}{f_4(y)}=\varphi(y)$ とおけば梯形公式を用いて

$$\varphi(y_{n+1})-\varphi(y_n)=\frac{h'}{2}\left(\frac{f_2(y_{n+1})}{f_4(y_{n+1})}+\frac{f_2(y_n)}{f_4(y_n)}\right)+\frac{h}{2}\Big(f_3(x_{n+1})+f_3(x_n)\Big)$$

但し $h'=t_{n+1}-t_n$。

或は

$$\phi(y_{n+1}) - \frac{h'}{2}\frac{f_2(y_{n+1})}{f_4(y_{n+1})} = \phi(y_n) + \frac{h'}{2}\frac{f_2(y_n)}{f_4(y_n)} + \frac{h}{2}\Big(f_3(x_{n+1}) + f_3(x_n)\Big) \tag{7}$$

さて時間を t，貯水池内の水の体積を $\nabla(t)$，単位時間内の流出量を $q(\nabla)$，流入量を $Q(t)$ で表わすと

$$\frac{d\nabla(t)}{dt} = Q(t) - q(\nabla) \tag{8}$$

或は ∇ の代りに $q(\nabla)$ を用いれば $\dfrac{d\nabla}{dq} = U(q)$ とおいて

$$U(q)\frac{dq}{dt} = Q(t) - q \tag{9}$$

(8) は (1) の型に，(9) は (6) の型に属する。

(3) 或は (7) を解くのに計算図表が適しているることはその形から明かであろう。次に一例について所要の図表を作ってみる。

（例）　貯水池内の或基準面以上の水の体積（単位：m^3）

$\nabla = 5{,}000{,}000\,Z$　但しZは基準面から貯水池表面迄の高さ（単位：m）

貯水池からの流出量（単位：m^3/sec）

$$q(Z) = 78Z^{3/2} + 20 \qquad Z \geqq 0$$
$$\quad = 20 \qquad Z < 0$$

貯水池への流入量（単位：m^3/sec）　$Q(t)$

t（時）	Q
0	20
2	29
4	60
6	120
8	200
10	240
12	250
14	240

16	214
18	178
20	142
22	110
24	76
26	50
28	34
30	24
32	20

時刻0の時水面は基準面に一致しているとする。

方程式（8）は

$$\frac{dZ}{dt}=\frac{1}{5\times10^{6}}\left(Q(t)-q(Z)\right)$$

となるから t_n に対する Z の値を Z_n とすれば

$$Z_{n+1}+0.00072\,q(Z_{n+1})=0.00072\left(Q(t_n)+Q(t_{n+1})\right)+Z_n-0.00072\,q(Z_n)$$

此は三支持線が平行な共線図表で表わせる関係式である。

先ず $0.00072\left(Q(t_n)+Q(t_{n+1})\right)\equiv R_n$ の各観測時に於ける値は次のように計算される。

t	R_n
t_0	0.0353
t_1	.0641
t_2	.1296
t_3	.2304
t_4	.3168
t_5	.3528
t_6	.3528
t_7	.3269
t_8	.2822

t_9	.2304
t_{10}	.1814
t_{11}	.1339
t_{12}	.0907
t_{13}	.0605
t_{14}	.0418
t_{15}	.0317

そこで此等の値をその上にとるべき尺度を R_n 尺、Z_n の値をとるべき尺度を Z_n 尺、Z_{n+1} を読みとるべ尺度を Z_{n+1} 尺とし、各尺度上に夫々次の函数尺を目盛る。

$4R_n$　$Z_n-0.00072\,g(Z_n)$.　$0.8(Z_{n+1}+0.00072\,g(Z_{n+1}))$,

R_n 尺、Z_{n+1} 尺間の距離と Z_{n+1} 尺、Z_n 尺間の距離との比は 4：1 である。

先づ $R_0=0.035$，$Z_0=0$ から $Z_1=0.006$ を得る。次に $R=0.064$，$Z_1=0.006$ から $Z_2=0.04$ を得る。順次かくの如くにして次表第二列の値が得られる。第一列の数字は前記 R_n の値を再記したもで、第一列と第二列との同一行にある数値を用いて第二列次行の値が得られることになる。第三列は小数第三位迄読み得る図表（図の右側にその一部を示す）について読みとつた値、第四列は Runge-Kutta 法で数値積分を行つて得た値を示す。尚（4）を図表的に解くとすれば、最初の二つの函数値を知ることが必要であり、従つて四変数間の関係を表わす図表を作らねばならない。併し貯水池からの流出量計算の場合には（3）の図表解法で充分目的は達せらるゝことゝ思われる。

R_n	Z_n	Z_n	Z_n
0.035	0	0	0
.064	0.006	.0063	.0065

.130	.04	.041	.041
.230	.14	.139	139
.317	.33	.328	.329
353	.58	.580	.582
.353	.84	.834	839
327	1.06	1.054	1.058
.282	1.22	1.217	1.219
.230	1.31	1.311	1.311
.181	1.34	1.341	1.340
134	1.32	1.320	1.320
.091	1.26	1.261	1.260
060	1.17	1.172	1.171
.042	1.07	1.072	1.069
.032	0.97	.969	.967
	0.87	.873	.871

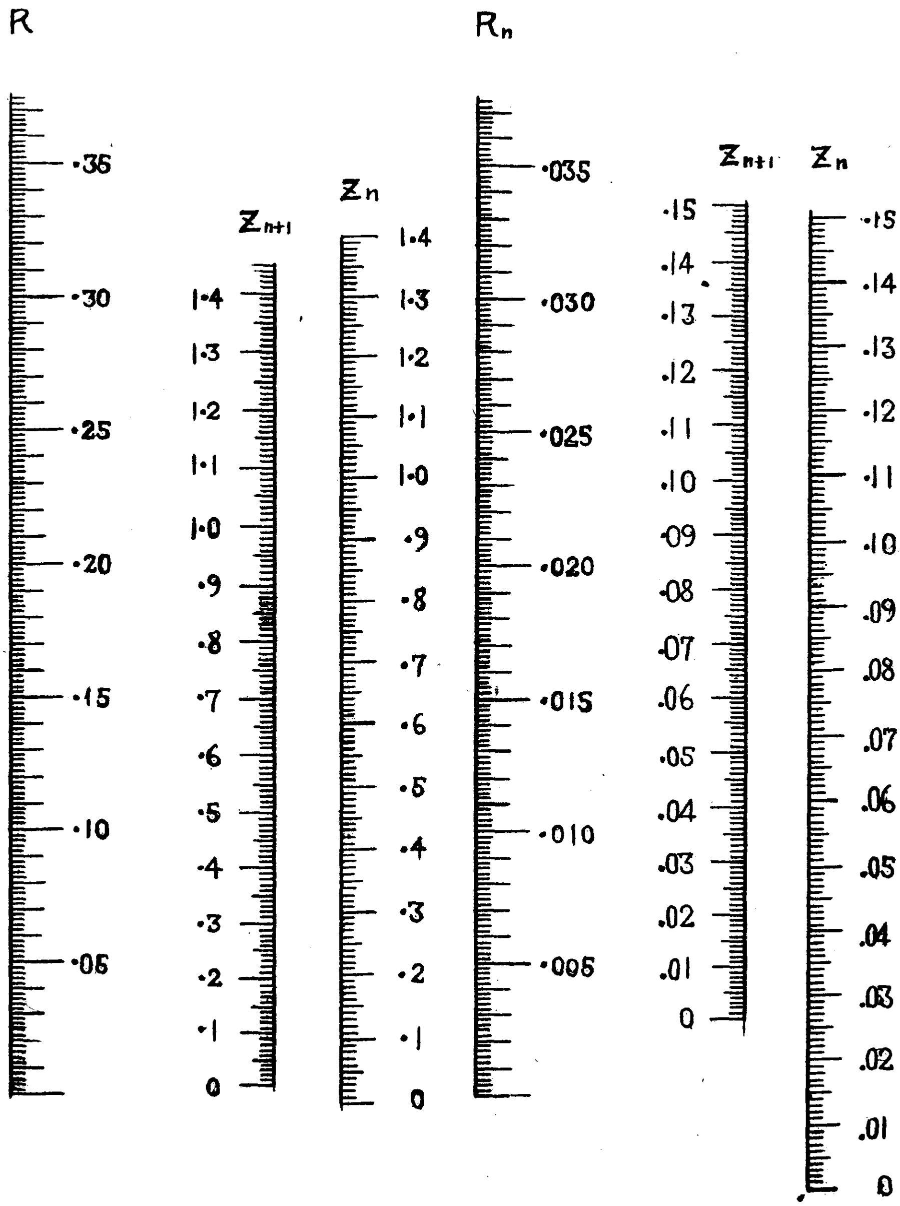
図　表　　（本文末挿入）

上に求めたZの値を用いて流出量 $q(Z)$ を計算すれば

t（時）	$q(z)$ （m^3/sec）
0	20
2	20.04
4	20.6
6	24.1
8	35
10	55
12	80

14	105
16	125
18	137
20	141
22	138
24	130
26	119
28	106
30	95
32	83

$g(Z)$ の値を直接図表によって求むるには Z_r 尺，Z_{n+1} 尺の一側に $g(Z) = 78Z^{3/2} + 20$ の関係により Z に対應する g の目盛りを施しておけばよい。



R
Z_{n+1}
Z_n
R_n
Z_{n+1}
Z_n