砂防堰堤の壓力線に就いて

熊谷, 才藏

https://doi.org/10.15017/14103

出版情報：九州帝国大学農学部演習林報告. 15, pp.97-114, 1947-09-20. 九州大学農学部附属演習林
バージョン：
権利関係：

砂防堰堤の壓力線に就いて

S. Kumagai: On the Line of Pressure of a Soil-saving Dam.

熊 谷 才 藏

目　　次

I. 緒　　言

砂防重力堰堤の梯形断面を靜力学的安定條件から決定する場合、Thiery 氏[1]の様に溢流水深を計算に入れる必要なしと唱へる学者もあるが、他の多くの人[2]は溢流深を適當に見積つて、圧力線が堤底に於て底趾から底幅の 1/3 の距離にある点を通過する様に断面を定めてゐる。ところで此の際堤冠上を流れる水の圧力は度外視されてゐるのであつて、その為圧力線は一般には堤冠部の中点を通らず、此より上流側に於て堤冠と交るといふ結果になる。しかる場合

によつては、堤冠部に於て上流端から堤冠幅の1／3内に入ることもあるのであるが、此の事実を何故不問に附してよいかといふ事に就いては、従來論じられてゐないようであるから、以下此の問題に就いて若干の考察を試みる。本研究は文部省科学研究費に依るものである。

Ⅱ．堤冠上の水壓を無視した場合の壓力線

第１図（本文末挿入）

堰堤横断面を示す第１図に於て次の如く記號を定める。

- m　上流法
- n　下流法
- a　溢流深
- b　堤冠厚
- h　堤冠より任意水面断面迄の深さ
- G　梯形 ABCD の重心
- N　ADの中点
- M　BCの中点
- S　NよりBCへ下した垂線の足
- T　GよりBCへ下した垂線の足
- P　上流法面に対する水圧の作用点
- PQ　同上水圧の作用線
- X　圧力線と水平断面との交点
- R　XよりPQへ下した垂線の足
- x　MXの長さ（Mより左方へ測る場合を正とする）
- w_0　単位体積の水の重量
- w　単位体積の堤体の重量

$\gamma \quad w'/w$。

重力以外の外力としては水圧のみが作用するものと考へ，考へてゐる水平断面以上の堤重並びに水圧のXに関する能率の代数和が零に等しい條件から x を求める。

$$\frac{TM}{TS}=\frac{M\alpha}{GN}=\frac{b+\{b+h(m+n)\}/2}{b+h(m+n)+b/2}=\frac{3b+h(m+n)}{3b+2h(m+n)}$$

$$\therefore \frac{TM}{MS}=\frac{3b+h(m+n)}{6b+3h(m+n)}$$

然るに $MS=\dfrac{b+h(m+n)}{2}-\dfrac{b}{2}-mh=\dfrac{h(n-m)}{2}$，

$$\therefore TM=\frac{h(n-m)\{3b+h(m+n)\}}{6\{2b+h(m+n)\}}$$

よって $XT=x+\dfrac{h(n-m)\{3b+h(m+n)\}}{6\{2b+h(m+n)\}}$

従ってXに関する堤重の能率は

$$\frac{2b+h(m+n)}{2}hw\left(x+\frac{h(n-m)\{3b+h(m+n)\}}{6\{2b+h(m+n)\}}\right)$$

$$=\frac{hw}{12}\left[(n^2-m^2)h^2+3b(n-m)h+6x\{2b+h(m+n)\}\right]。\quad (1)$$

次に $XR=QX\cos\angle QXR=(QC-XC)\,m/(1+m^2)^{\frac{1}{2}}$，

然るに $QC=\dfrac{Rc}{\cos\angle aXR}=\dfrac{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}{3}\cdot\dfrac{3a+h}{2a+h}\cdot\dfrac{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}{m}$

$$=\frac{h(3a+h)(1+m^2)}{3m(2a+h)},$$

$$\therefore XR=\left[\frac{h(3a+h)(1+m^2)}{3m(2a+h)}-\left\{\frac{b+h(m+n)}{2}+x\right\}\right]\frac{m}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

よってXに関する水圧の能率は

$$-\frac{w_0(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}{2}(2a+b)h.\ \Sigma R=-\frac{w_0 h}{12}\Big[(2-m^2-3mn)h^2$$

$$+3\{2a(1-mn)-mb\}h-6abm-6m(2a+b)x\Big]. \qquad (2)$$

（1）式と（2）式との和を零に等しとおいて

$$\gamma\left[(n^2-m^2)h^2+3b(n-m)h+6x\{2b+h(m+n)\}\right]$$

$$=(2-m^2-3mn)h^2+3\{2a(1-mn)-mb\}h-6abm$$

$$-6m(2a+b)x.$$

此より

$$x=\frac{\{2+(\gamma-1)m^2-3mn-\gamma n^2\}h^2+3[2a(1-mn)-b\{m+(n-m)\gamma\}]h-6abm}{6[\{\gamma(m+n)+m\}h+2(am+b\gamma)]} \qquad (3)$$

（3）式に於て h を零に近づけると x は $-abm/2(am+b\gamma)$ に近づくから、a, b, m の何れもが零でないならば、堤冠に充分近い水平断面では、圧力線はその中央より上流側を通過することゝなる。

今 $x/\{b+h(m+n)\}=k$ とおけば，（3）式より

$$k=\frac{\{2+(\gamma-1)m^2-3mn-\gamma n^2\}h^2+3[2a(1-mn)-b\{m+n-m)\gamma\}]h-6abm}{6[\{\gamma(m+n)+m\}h+2(am+b\gamma)]\{b+h(m+n)\}}$$

或水平断面に於て圧力線が核内を通過するといふことは，$|k|<1/6$ なることである。

今（4）に於て $k=-1/6$ とおけば、

$$[(m+n)\{\gamma(m+n)+m\}+2+(\gamma-1)m^2-3mn-\gamma n^2]h^2$$

$$+\{6a(1-mn)-3b\{m+(n-m)\gamma\}+b\gamma(m+n)+bm$$

$$+2(am+b\gamma)(m+n)\}h+2b(am+b\gamma)-6abm=0.$$

此を簡單にすれば

$$\{m^2\gamma+mn(\gamma-1)+1\}h^2+\{a(m^2+3-2mn)+bm(3\gamma-1)\}h+b^2\gamma$$

$$-2abm=0. \tag{5}$$

若し石堰堤に普通であるやうに $m<1$，$n<1$ が滿足されるならば、γは勿論 1 より大と見てよいから，（5）式のh^2並びに h の係數は共に正である。故に（5）なる方程式が正根を持つ爲の必要充分條件は

$$b^2\gamma-2abm<0,$$

即ち

$$b/a<2m/\gamma, \tag{6}$$

であり、此の時他の一根は負である。

又 $h\to0$ なる時の k の極限値を k_0 とすれば

$$k_0=\frac{-6abm}{12b(am+b\gamma)}=\frac{-1}{2\left(1+\frac{b}{a}\cdot\frac{\gamma}{m}\right)}<0,\ 但し a\neq0,$$

$$b\neq0,\ m\neq0.$$

それ故に $b/a\lesseqgtr 2m/\gamma$ なるに從ひ、$k_0\lesseqgtr-1/6$ となる。即ち壓力線は，$b/a<2m/\gamma$ならば、堤冠に於ける上流側三分の一內の一點から出發して中央三分の一の上流側境界線と唯一回交はり※，$b/a\geqq2m/\gamma$ならば，上流側三分の一

※ 堰堤の高さが充分高いものであるべきことは勿論である。以下此の假定が必要な場合一々此を斷らない。

内に入ることはない。特に $m = 0$ の場合は、γ の如何に関せず圧力線は堤冠の中点から出発し、上流側三分の一内に入ることはない。

III. 堤冠上の水圧の影響

前節に於て見たやうに、堤冠上の水圧を考慮しない限り、圧力線が上流側三分の一と中央三分の一との境界線に交る場合が起り得る。所で堤冠上の水圧が此の場合如何なる影響を及ぼすかを見る為には、溢流水の堤冠に及ぼす圧力の分布を知らなければならないが、此を簡単な数式を以て表はすことは困難である。併し兎も角、堤冠上の流水の平均圧力水頭が溢流深より小さいことは確かであらう。今堤冠上に平均圧力水頭 a^1 なる水圧が、堤冠の中点から上流側へ y なる距離の点に、鉛直線に対し θ の傾をなす方向に作用するものとすれば、第1図と同一の記号を用ひて

$$x + MS + y - h\tan\theta = \frac{2x + (n-m)h + 2y - 2h\tan\theta}{2}.$$

堤重及び堤冠上水圧の X に関する能率は

$$\frac{hw}{12}\{h(n-m)\{3b + h(m+n)\} + 6x\{2b + h(m+n)\}\}$$

$$+ \frac{6w_0 a^1 b\cos\theta}{12}\{2x + (n-m)h + 2y - 2h\tan\theta\}$$

$$= \frac{w_0}{12}\{\gamma(n^2-m^2)h^3 + 3\gamma\{b(n-m) + 2x(m+n)\} + 6b\{2\gamma x +$$

$$a^1\cos\theta\,(n-m) - 2a^1\sin\theta\}h + 12a^1 b\cos\theta\,(x+y)\}. \qquad (7)$$

(7) と (2) との和を零に等置することにより

$$x = (\{2 + (\gamma-1)m^2 - 3mn - \gamma n^2\}h^3 + 3\{2a(1-mn) - b\{m$$

$+\gamma(n-m)\}\}h^2-6b\{a^1\cos\theta(n-m)-2a^1\sin\theta+am\}h$

$-12a^1 b\cos\theta y)\ /\ 6\{\{\gamma(m+n)+m\}h^2+2(am+b\gamma)h$

$+2a^1 b\cos\theta\}.$ (8)

或は (4) に相當して

$k=(\{2+(\gamma-1)m^2-3mn-\gamma n^2\}h^3+3\{2a(1-mn)-b\{m$

$+\gamma(n-m)\}\}h^2-6b\{am-2a^1\sin\theta+a^1\cos\theta(n-m)\}h$

$-12a^1 b\cos\theta y)\ /\ 6\{\{\gamma(m+n)+m\}h^2+2(am+b\gamma)h+2a^1b\times$

$\cos\theta\}\times\{b+(m+n)h\}.$ (9)

即ち此の場合圧力線は堤眉上水圧の中心から出発する。今 $k=-1/6$ に對する正値が存在する時、a/h, a^1/h, b/h, y/h を夫々 α, α^1, β, η で表はせば

$-1=(\{2+(\gamma-1)m^2-3mn-\gamma n^2\}+3\{2\alpha(1-mn)$

$-\beta\{m+\gamma(n-m)\}\}-6\beta\{\alpha m-\alpha^1\sin\theta+\alpha^1\cos\theta(n-m)\}$

$-12\alpha^1\beta\eta\cos\theta)\ /\ \{\gamma(m+n)+m+2(\alpha m+\beta\gamma)+2\alpha^1\beta\cos\theta\}$

$\{\beta+(m+n)\}.$ (10)

此より

$\alpha=(\alpha^1\cos\theta+\gamma)\beta^2+\{3\gamma m-m+2\alpha^1\cos\theta(2m-n-3\eta)$

$+6\alpha^1\sin\theta\}\beta+m^2\gamma-mn+1+mn\gamma/\{2(\beta m+mn)-(m^2+3)\}.$

(11)

(11) に於て $\alpha=p\alpha^1$ とおけば $(p\geqq 1)$

$$\alpha^1=\{-\gamma\beta^2+m(1-3\gamma)\beta+mn(1-\gamma)-m^2\gamma-1\}/$$
$$\{\cos\theta\beta^2-2\{\cos\theta(n-2m+3\eta)-3\sin\theta+pm\}\beta+p(m^2-2mn+3)\}.$$

(12) に於て $g\equiv\eta/\beta=y/b$ を用ふれば

$$\alpha^1=\{-\gamma\beta^2+m(1-3\gamma)\beta+mn(1-\gamma)-m^2\gamma-1\}/\{\cos\theta(1-6g)\beta^2-2\{\cos\theta(n-2m)-3\sin\theta+pm\}\beta+p(m^2-2mn+3)\}. \tag{13}$$

(13) 式の分子は負であるから、α^1が正なる爲には分母が負でなければならぬ。$m<1$，$n<1$ と假定すれば，分母の最後の項は正であるから、θ を $0<\cos\theta\leqq1$ の範囲に限る時、(13) の分母を負ならしむる β の正値が存在する條件は

$$g>1/6 \tag{14a}$$

か或は

$$\left.\begin{array}{ll} g\leqq1/6, & (14b_1)\\ \cos\theta(n-2m)-3\sin\theta+pm>0, & (14b_2)\\ \{\cos\theta(n-2m)-3\sin\theta+pm\}^2>\cos\theta(1-6g)p(m^2-2mn+3) & (14b_3)\end{array}\right\}(14b)$$

である。($14b_3$) から

$$g>\frac{1}{6}-\frac{\{\cos\theta(n-2m)-3\sin\theta+pm\}^2}{6\cos\theta p(m^2-2mn+3)}$$

を得る。

さて(14a) は圧力線が上流側三分の一内に入る爲の充分條件でもあるが、(14b)の方はさうでない。(14b_1) が成立する場合圧力線が上流側三分の一内に入る爲の必要且つ充分なる條件は(13)をp倍して得らるる。

$$\alpha=\frac{p\{-\delta\beta^2+m(1-3\delta)\beta+mn(1-\delta)-m^2\delta-1\}}{\cos\theta(1-6g)\beta^2-2\{\cos\theta(n-2m)-3\sin\theta+pm\}\beta+p(m^2-2mn+3)}$$

と

$$\alpha=(a/b)\beta \tag{16}$$

とがα, β の正値に對して聯立することである。此の條件が滿足されてゐる時には(15)，(16) の一組の根を$\alpha=\alpha_1$，$\beta=\beta_1$ とすれば圧力線が上流側核境界線と交る点の堤冠からの深さはa/α_1或はb/β_1で與へられる。※ ここにa，b は前記の様に夫々溢流深及び堤冠の厚さを表はす。(14b_1)が成立する場合(15)、(16)がα，β の正値に對して聯立する爲の條件は簡單な式を以て表はし難いが、同じ場合圧力線が上流側核境界線と交る爲の必要條件としては(14b_2)，(14b_3) の外に次の(14b_4) を附加することが出來る。即ち (15)式の分母が負なる範囲では

$$-2\{\cos\theta(n-2m)-3\sin\theta+pm\}\beta+p(m^2-2mn+3)$$

も亦負でその絶對値は(15)式の分母のそれよりも小さくない。從って(15)式のαと

$$\alpha_g=1/_6=\frac{p\{-\delta\beta^2+m(1-3\delta)\beta+mn(1-\delta)-m^2\delta-1\}}{-2\{\cos\theta(n-2m)-3\sin\theta+pm\}\beta+p(m^2-2mn+3)}$$

(17)

※ (14a)が成立するときにも勿論同様のことが言へる。此の場合には(15)，(16)はa/bの如何に拘らずα_1，βの正値に對して聯立する。

とを比較すると、(15)の分母が負なる範囲では常に $\alpha \geqq \alpha_q = 1/6$

然るに直交座標系を用ひて $\alpha q = 1/6$ を縦座標、β を横座標にとる時，(17) の表はす曲線の第一象限にある部分は上方に凹であつて

$$\alpha_{asymp} = \frac{p\gamma\beta + m(3\gamma - 1)}{2\{\cos\theta\,(n-2m) - 3\sin\theta + pm\}} \tag{18}$$

なる漸近線を有することが判る。それで

$$a/b > \frac{p\gamma}{2\{\cos\theta\,(n-2m) - 3\sin\theta + pm\}} \tag{14 b_4}$$

が上に求めんとした他の一つの必要條件である。

即ち

$$b/a \geqq 2\{\cos\theta\,(n-2m) - 3\sin\theta + pm\}/p\gamma \tag{19}$$

ならば圧力線は上流側境界線と交らない。若し

$2m \geqq n$ ならば　$\cos\theta\,(n-2m) - 3\sin\theta + pm > 0$ とする時

$2\{\cos\theta\,(n-2m) - 3\sin\theta + pm\}/p\gamma \leqq 2m/\gamma$　故に　$b/a \geqq 2m/\gamma$ が成立てば勿論 (19) が満足される。

即ち

$$2m \geqq n, \qquad b/a \geqq 2m/\gamma \tag{20}$$

ならば、堤冠上の水圧中心が堤冠の上流側三分の一内にない限り圧力線は上流側核境界線と交ることはない。此の結果はⅡに於て論じたことからも直ちに導き出せる。即ちⅡの終りに述べた様に堤冠上の水圧を考慮しないならば $b/a \geqq 2m/\gamma$ の場合圧力線は上流側三分の一内に入ることはない。而るに $2m \geqq n$ は堰堤断面の上流側核境界線が上流側に傾かない為の條件であるから、任意の水平断面に於て此と堤冠上水圧の作用線との交点は、水圧の

中心が堤冠の上流側三分の一内にない限り上流側核外に出ることはない。よつて全合力の作用線が水平断面と交る点も亦決して上流側核外に出ることはない筈である。条件(20)は条件(19)より厳しいけれども、その中に未知数 p 及び θ を含まない特徴を有する。

次に(14 b)に立帰つて、此の条件を充す為に p の取り得る値の限界を調べて見る。その為に

$$\frac{\{\cos\theta\,(n-2m)-3\sin\theta+pm\}^2}{\cos\theta\, p\,(m^2-2mn+3)} > 1-6q$$

の左辺の最大値を $n \leqq 0.4$, $m \leqq 0.8$ なる制限の下に吟味する。
こゝで

$\cos\theta\,(n-2m)-3\sin\theta+pm > 0$ であるから $n > (2-p/\cos\theta)m + 3\tan\theta$。

よつて $m=0$, $n=0$; $m=0$, $n=0.4$; $m=0.8$, $n=0.4$; $m=0.8$, $n=0$ の四点に囲まれた矩形内で上の不等式を満足する部分のみが問題となる。

今 $T \equiv \dfrac{\{\cos\theta\,(n-2m)-3\sin\theta+pm\}^2}{\cos\theta\, p\,(m^2-2mn+3)}$ とおけば

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{2\{\cos\theta\,(n-2m)-3\sin\theta+pm\}\{\cos\theta(m^2-2mn+3)+m\{\cos\theta(n-2m)-3\sin\theta+pm}{\cos\theta\, p\,\{(m-n)^2+3-n^2\}^2}$$

> 0.

故に m を固定する時 T は $n=0.4$ で最大値をとる。此の $S(m)$ とすれば

$$S(m) = \frac{\{0.4\cos\theta-3\sin\theta+m(p-2\cos\theta)\}^2}{\cos\theta\, p\,(m^2-0.8m+3)},$$

$$\frac{\partial S}{\partial m}=2\{0.4\cos\theta-3\sin\theta+m(p-2\cos\theta)\}\{(p-2\cos\theta)$$

$$\times\{(m-0.4)^2+(3-0.16)\}^2-(m-0.4)\{0.4\cos\theta-3\sin\theta+m(p$$

$$-2\cos\theta\}\}/\{\cos\theta\, p(m^2-0.8m+3)^2\}\ .$$

故に $(p-2\cos\theta)(m^2-0.8m+3)\gtreqless(m-0.4)\{0.4\cos\theta$

$$-3\sin\theta+(p-2\cos\theta)m\}\ . \tag{21}$$

なるに従ひ $\dfrac{\partial S}{\partial m}\gtreqless 0$ である。

或は (21) は $3p-5.84\cos\theta-1.2\sin\theta\gtreqless m(0.4p-0.4\cos\theta-3\sin\theta)$ とかけるから $(3p-5.84\cos\theta-1.2\sin\theta)/(0.4p-0.4\cos\theta-3\sin\theta)\equiv U$ とおけば　$0.4p-0.4\cos\theta-3\sin\theta>0$ ならば

$$m\lesseqgtr U \tag{22}$$

なるに従ひ $\dfrac{\partial S}{\partial m}\gtreqless 0$。

$0.4p-0.4\cos\theta-3\sin\theta<0$ ならば

$$m\gtreqless U \tag{22'}$$

なるに従ひ $\dfrac{\partial S}{\partial m}\gtreqless 0$。

又 $0.4p-0.4\cos\theta-3\sin\theta=0$ の時は $3\tan\theta>0.4$ ならば $3p-5.84\cos\theta-1.2\sin\theta>0$ であるから $\dfrac{\partial S}{\partial m}>0$，$3\tan\theta<0.4$ ならば $3p-5.84\cos\theta-1.2\sin\theta<0$ であるから $\dfrac{\partial S}{\partial m}<0$。

さて問題の短形内に於て不等式 $n>\left(2-\dfrac{p}{\cos\theta}\right)\times m+3\tan\theta$ を満足する部分を考へるには

(A)　$3\tan\theta < 0.4$　なる場合と

(B)　$3\tan\theta \geqq 0.4$　なる場合とを別々に取扱ふ必要がある。

(A) $3\tan\theta < 0.4$ 即ち $\theta < \tan^{-1}(0.4/3) \approx 7^\circ\ 35'$ の場合。此の時 U の分母を零にする p の値は分子を零にする p の値より小さい。故に U の分母が負ならば、分子も負であるから (22') で U は正であり、且つ 7.5 より大である。それで $p < \cos\theta + 7.5 \times \sin\theta$ ならば $m < U$，従って $\partial S/\partial m < 0$。因みに $n = (2 - p/\cos\theta) m + 3\tan\theta$ に於て $p = \cos\theta + 7.5\sin\theta$ とおけば $n = (1 - 7.5\tan\theta) \times m + 3\tan\theta$ となり，此の直線は $m = 0.4$ に於て直線 $n = 0.4$ と交はる。次に U の分母が零即ち $p = \cos\theta + 7.5\sin\theta$ ではやはり $\partial S/\partial m < 0$ なるべきことは既に述べた。更に $U < 0$ 即ち $\cos\theta + 7.5\sin\theta < p < (5.84/3)\cos\theta + 0.4\sin\theta$ ならば (22) 式のアの場合に相當し、従つて此の場合も $\partial S/\partial m < 0$。因みに $p = (5.84/3) \times \cos\theta + 0.4\sin\theta$ の時直線 $n = (2 - P/\cos\theta) m + 3\tan\theta$ は $m = 0.8$ なる直線と $n < 0.4$ に於て交る。以上の結果により $1 \leqq p < (5.84/3) \times \cos\theta + 0.4\sin\theta$ の場合 S の最大値は $S(0) = (0.4\cos\theta - 3\sin\theta)^2 / 3p\cos\theta$ である。次に $0 \leqq U < 0.8$、即ち $(5.84/3)\cos\theta + 0.4 \times \sin\theta \leqq p \leqq (1.38\cos\theta - 0.3\sin\theta)/0.67$ なる時は $m = U$ に於て S は最大となる。従つて此の場合 S の最大値は $S(U) = \{3(p - 2\cos\theta)^2 + 0.8(0.4\cos\theta - 3\sin\theta)(p - 2\cos\theta) + (0.4\cos\theta - 3\sin\theta)^2\} / 2.84\,p\cos\theta$。

最後に $p > (1.38\cos\theta - 0.3\sin\theta)/0.67$ ならば $U > 0.8$ であるから (22) 式は $m < U$，従って $\partial S/\partial m > 0$。即ち S の最大値は $S(0.8)$

$$= (0.8p - 1.2\cos\theta - 3\sin\theta)^2 / 3p\cos\theta$$ である。

(B)　$3\tan\theta \geqq 0.4$ の場合。此の時直線 $n = (2 - p/\cos\theta) m + 3\tan\theta$ が點 ($m = 0.8$，$n = 0.4$) を通過する爲には $p = (1.2 + 3 \times \tan\theta)\cos\theta / 0.8$ であることを要するから p の取り得る範囲は $p >$

$(1.2+3\tan\theta)\cos\theta/0.8=1.5\cos\theta+3.75\sin\theta$ で、此の式の右辺の値は次の様になる。

$\theta°$	$1.5\cos\theta+3.75\sin\theta$
10	2.128
20	2.692
30	3.174
40	3.559
50	3.838
60	3.998
70	4.036
80	4.011
90	3.750

さて $3\tan\theta=0.4$ ならば U の分母子は $p=1.9825$ で共に零となる。而るに此の時 $1.5\cos\theta+3.75\sin\theta$ も亦 1.9825 となるから $p>1.9825$ では $\partial s/\partial m>0$。又 $3\tan\theta>0.4$ ならば $(5.84/3)\times\cos\theta<(1.2+3\tan\theta)\cos\theta/0.8<\cos\theta+7.5\sin\theta$ であるから $(1.2+3\tan\theta)\cos\theta<p<\cos\theta+7.5\sin\theta$ の範囲では (22')・は $m>U$，従って $\partial s/\partial m>0$。又 $p>\cos\theta+7.5\sin\theta$ なる時は $U>7.5$。故に (22) 式は $m<U$，従って此の時も亦 $\partial s/\partial m>0$。即ち (B) の場合の S の最大値は $S(0.8)=(0.8p-1.2\cos\theta-3\sin\theta)^2/3p\cos\theta$ となる。

以上の結果により、$n<0.4$，$m<0.8$・$\cos\theta\times(n-2mn)-3\sin\theta+pm>0$ なる制限の下に $T\equiv\{\cos\theta\times(n-2mn)-3\sin\theta+pm\}^2/\{\cos\theta p\times(m^2-2mn+3)\}$ の最大値 T_{max} の変化を θ，p に對して図示すれは第2図を得る。

第 2 図 本文末挿入

曲線に附した数字は θ の度数を表はす

次に（$14b_4$）の右辺 $p\gamma/2\{\cos\theta(n-2m)-3\mathrm{son}\,\theta+pm\}\equiv V$ が同じ制限の下に取る最小値を調べて見る。先づ $\cos\theta(n-2m)-3\sin\theta+pm$ は θ, p, m を固定すれば $n=0.4$ で最大値 $k(m)=0.4\cos\theta-3\sin\theta+(p-2\cos\theta)m$ を取る。さて $3\tan\theta<0.4$ ならば $n=(2-p\div\cos\theta)m+3\tan\theta$ は $p=2\cos\theta$ で m 軸に平行になるから k の最大値は $p>2\cos\theta$ ならば $0.4\cos\theta-3\sin\theta+0.8(p-2\cos\theta)$，$p=2\cos\theta$ ならば $0.4\cos\theta-3\sin\theta$，$p<2\cos\theta$ ならば同じく $0.4\cos\theta-3\sin\theta$ である。又 $3\tan\theta\geqq0.4$ ならば $p>1.5\cos\theta+3.75\sin\theta$ なることを要するから $p>2\cos\theta$，従つて k の最大値は $0.4\cos\theta-3\sin\theta+0.8(p-2\cos\theta)$ である。依つて V の最小値は，$\gamma=2.5$ にとると、$3\tan\theta<0.4$ の時 $p>2\cos\theta$ ならば $1.25p/(0.8p-3\sin\theta-1.2\cos\theta)$，$p\leqq2\cos\theta$ ならば $1.25p/(0.4\cos\theta-3\sin\theta)$ である。又 $3\tan\theta\geqq0.4$ の時は $p>1.5\cos\theta+3.75\sin\theta$ が必要であるから、V の最小値は $1.25p/(0.8p-3\sin\theta-1.2\cos\theta)$ となる。今 V の最小値 V_{min} を p に対して図示すれば第3図を得る（但し θ の範囲は $0°\sim30°$）。

第 3 図 本 文 末 挿 入

曲線に附した数字は θ の度数を表はす

Ⅳ 考　　察

前節に論じた所に依り、堤冠上の水圧の中心が堤冠の上流側三分の一内にあれば、圧力線も亦堰堤断面の上流側三分の一内に入る。若し水圧中心が堤冠の中央三分の一内にあれば、圧力線が堰堤断面に於て中央三分の一と上流側三分の一との境界線に交る爲の必要條件は（$14b_2$），（$14b_3$），（$14b_4$）の成立である。
今 m，n を $m\leqq0.8$，$n\leqq0.4$ の範囲に限る時（$14b_2$）が成立し

てゐる場合、（14 b_3）が成立する爲に p のとるべき値の限界は第2図に於て、p 軸から $1-6g$ の距離を隔てて此に平行に引いた直線と曲線との交点を求めることによつて見出される。p の値は幾何であるか不明であるが3を越えることはないと見てよいであらう。従つて假令 θ が 30° を越えることがあるにしても、その場合には（14 b_1）が成立してゐるとき（14 b_2）は成立しない。よつて $\theta>30°$ の時、堤冠核内から発した圧力線が上流側核外に出ることはない。又 $1-6g \geqq 0.053$ ならば p の下限は 2.25 であることが判るが（第2図），$p \geqq 2.25$ なることも殆ど起らないと見てよいと思はれる。従つて $g \leqq 0.158$ ならば圧力線が上流側核外に出ることは先づないと言つて差支ない。

以上の所論に於ては p に合理的な制限を與へたに止り、a/b には何等の制限をも設けなかつたのであるが、実際問題としては a/b も亦或限度内にあるべき筈である。今 $a/b \leqq 3$ なる制限を附するときは、$\theta=0°$ に對する ∇min の $p=1$ に於ける値は 3.2 であるから、第3図を見れば、$p \leqq 3$ とする時 ∇min は θ の如何に拘らず3を越えることが判る。従つて（14 b_4）は此の場合成立しない。即ち $\gamma=2.5$ とするとき、$m \leqq 0.8$，$n \leqq 0.4$，$p \leqq 3$、$a/b \leqq 3$、$g \leqq 1/6 = 0.166\cdots$ なる制限を設くれば、圧力線は上流側核外に出る事がない。尤も Thiéry 以来一般の砂防工学者の有する見解に従へば、w_0 は最大 1.8 に達するといふから，此の場合 $w=2.5$ とすれば $\gamma=1.4$ となるが、此の時尚圧力線が上流側三分の一内に入らない爲には a/b の最大値を $1:0.6=1.666\cdots$ に減ずればよい。結局 $\gamma \geqq 1.4$，$m \leqq 0.8$，$n \leqq 0.4$，$p \leqq 3$，$a/b \leqq 1.666\cdots$，$g \leqq 0.1666\cdots$，が圧力線が上流側三分の一内に入らない爲の一つの充分條件となる。此は通常の場合練積石堰堤によつて満足されてゐる條件と見られるから、堤冠を越流する水の圧力を考慮に入れた場合圧力線が堰堤断面の上流側三分の一内に入る危険は殆どないと断じて差支なかろう。

Ⅴ 摘　要

砂防重力堰堤の堤冠を越流する水圧を考慮に入れた場合の圧力線の走向を吟味し、此が堰堤断面の上流側三分の一内に入らない為の充分条件を求めた。

m	堰堤上流法
n	堰堤下流法
a	溢流水深
b	堤冠幅
$p>1$	溢流水深と堤冠に働く流水の平均圧力水頭との比
θ	堤冠上流水の圧力の作用線が鉛直線と成す角
g	堤冠幅を単位として測つた堤冠中心と堤冠上流水の圧力中心との距離
γ	堤体と流水との比重の比

とすれば　$m, n<1$,　$g \leqq 1/6$ ならば

$$b/a \geqq 2\{\cos\theta(n-2m)-3\sin\theta+pm\}/p\gamma$$

が求むる一つの條件である。若し更に $2m \geqq n$ が成立てば、上式の代りに

$$b/a \geqq 2\,m/\gamma$$

を用ひてよい。

又 $\gamma \geqq 1.4$,　$m \leqq 0.8$,　$n \leqq 0.4$,　$p \leqq 3$,　$a/b \leqq 1/0.6$, $g \leqq 1/6$ を以て充分條件にとり得ることを計算の結果示すことが出來る。此の條件は普通の場合，砂防重力堰堤によつ滿足されてゐると見られるから、堤冠上水圧の影響を顧慮した場合，砂防堰堤の圧力線が堰堤断面の上流側三分の一内に入る虞は殆どないと断じて

ない。

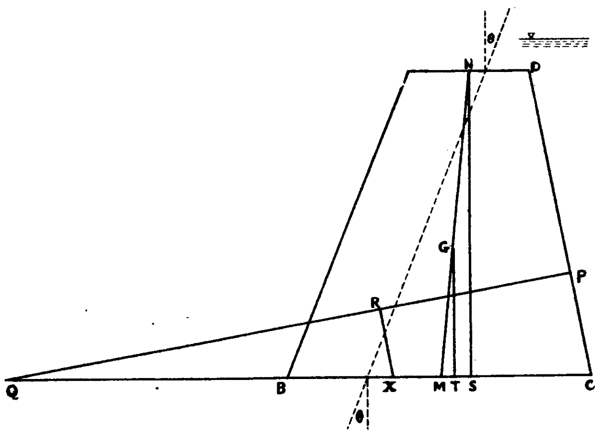
文　献

(1) Thiéry, E., Réstauration des montagnes, correction des torrents, rebolsement. (1891)

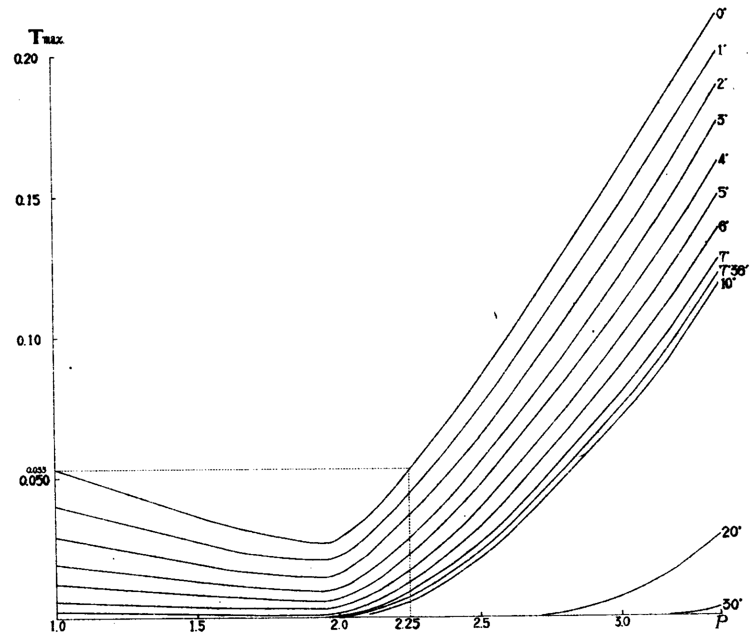
(2) 村上恵二, 砂防堰堤断面式ノ種類ト其ノ一般式ニ就テ、京都帝國大学演習林報告第十七号（昭和17年）

(3) 鈴木恭介, 砂防堰堤断面新論、砂防、62（昭和13年）

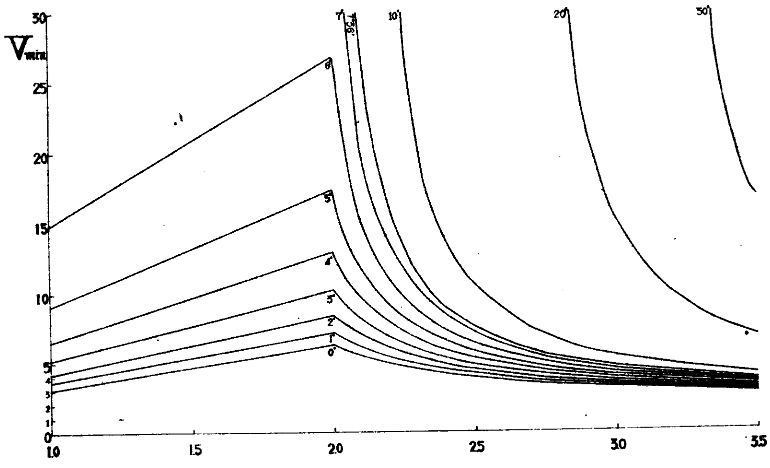
(4) 蒲　孚, 砂防工学（昭和12年）


θ
N
D
G
P
R
Q
B
X
M
T
S
C
θ

第 1 圖


Tmax
0.20
0.15
0.10
0.053
0.050
1.0
1.5
2.0
2.25
2.5
3.0
P
0°
1°
2°
3°
4°
5°
6°
7°
7°38'
10°
20°
30°

第 2 圖


Vmin
30
25
20
15
10
5
4
3
2
1
0
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
7°
10°
20°
30°
6°
5°
4°
3°
2°
1°
0°

第 3 圖