フレーゲと論理主義

山下, 尚也

https://doi.org/10.15017/1398597

出版情報：哲学論文集. 29, pp.113-130, 1993-09-24. 九州大学哲学会
バージョン：
権利関係：

フレーゲと論理主義

山下尚也

論理主義を表現するさまざまな言説——「論理学は数学の青年時代であり数学は論理学の壮年時代である」、「数学は論理学から出てくるもの、すなわち、論理学の延長である」、「算術的命題は論理学的命題に還元し得る」云々[1]——これらの意味するところは異なっているが、いずれの場合も、数学と論理学との間に或る同質性・類縁性を見て取るという点で共通している。論理主義の見かけ上の正当性は、この一見して誰もが認めるであろう数学と論理学との結びつきによって支えられていると考えられる。そして結びつきを想定する論拠は、自然科学の言語として広範囲に応用性を持つ数学の基礎学問的な性格が、個別的な主題を取り扱わない、したがって数学よりもさらに基礎的でしかも確実な論理学に根ざしたものではないかという予想にある。しかしこの結びつきが実際どのようなものであるかについて上のような表現に応じて、またさまざまに解釈が存在し得る。大雑把に言えば、数学と論理学とがどれだけの緊密さで関係していると考えるか、その度合にしたがってそれぞれ解釈が成立するのである。

最初に論理主義を明確に提示したのはフレーゲであった。最初の論理主義者としてのフレーゲの論理主義はしたがっても

っとも厳密なかたちの、或る意味で理想型を追求した作業の成果であり、数学と論理学との結びつきを強く緊密なものとして考えていたという見通しがつく。この小論では『算術の基礎』における議論から、数学と論理学との関係について考察し、論理主義の正当性というものが、単なる見かけの印象によるのにすぎないのか、それともふたつの体系の間に在る何らかの相同性が反映された結果であるのかを検証してみたい。

0

数学の哲学の歴史においてフレーゲが占めるとされる位置は、つぎのように要約することができる——フレーゲは論理主義と呼ばれる立場を取っていたが、論理学から算術を導出する実際の手続の途上で、その体系に内在していた矛盾（所謂ラッセルのパラドックス）の発見によって、その試みは挫折してしまった。ここには勿論さまざまな留保をつける余地があるだろう。はたしてフレーゲ解釈として論理主義の名を抽き出すことは正しいのか、また、彼の『算術の基本法則』の失敗を以て論理主義そのものが無効となったと言ってよいのか、等々と。論理学を革新し分析哲学に方向性を与えた功績と対照的に、数学の哲学に対するフレーゲの寄与への評価はこのように一定していない。しかし論理主義と言うとき問題となるのは、ラッセルのタイプ理論による技術的成功の側面よりも、フレーゲが算術を論理化する際に明らかとなった原理的な(特に『算術の基礎』における）側面であるのは確かである。このような観点から見ると、ひとつ言えるのは、『算術の基礎』で展開されているフレーゲの数学と論理学とをめぐる〝哲学的〟議論は論理主義の原理を説明するにあたって非常に説得的に働いているということである。しかしその説得性の内実は必ずしも明らかではない。論理主義が破綻していると宣告されている以上、失敗という事実と対照的に当たり前のようにも見える論理主義の正当性との間にある隔たりについて何らかの説明がされなければならないはずである。

さて、フレーゲは次のふたつのことを『算術の基礎』で主張している——

1　厳密な学問としての数学

確実な基礎から妥当な推論を経て得られる真なる命題のみから成る数学を体系化するということがフレーゲの最大の目的であった。[2] それまで数学において容認されてきた直観的な推論は、妥当であるとしても、厳密な推論のステップを何段階か飛び越える可能性をいつも抱えており、しかもそれを検証する手段は明示的に与えられない。この重なったステップを誤ってひとつだと見做すことにより、数学的知識の源泉として直観的な要素が導入されることも起こる。このように数学的知識を所謂心理主義的に根拠づけることに対してフレーゲは厳しい攻撃をしている。常に妥当な推論を可能とするための手段として形式言語が『概念記法』において整備された。これにより初めて数学は厳密な体系として一貫したものとなる基盤を持つことになるのである。

2　算術的命題は分析的であるという主張

フレーゲは、明白な定義から出発し、一般的な普遍論理規則によってのみ得られた命題を分析的と呼ぶ。[3] したがってこの定義は確実な基礎の根拠となる、形式化された推論という概念に即してあらわれる。カントに拠るとしながらも、ここでフレーゲは分析概念に或る屈折を導いている。フレーゲにとっては、分析性は単独の命題の個々の内容に帰すべきものでなく、どのようにしてその内容を持つ命題に辿り着くかという命題間の関係から規定される命題の正当化に関わるものである。[4] 1に即してこれを考えれば、正当化は証明に外ならない。証明の目的は命題の確実性を求めるだけでなく、命題の真理性が互いにどのような依存関係にあるか確かめることにある。[5]

数学の基本要素は数であるが、数は直観によって直接に与えられるのではない。思考の法則が論理的過程を経て構成された結果が数として現れる。このように数のようなそれ自体完結して見える最終的要素を、なんの関係も持たない言語的過程に還元するという考え方そのものに革新的なものがあると考えられる。第一に、還元問題一般に見られるように、単に或る

ものをその構成要素へと解体し、それ以前には見えていなかった構造を明らかにするということに加え、成立に到達するまでの歴史をも見通すことを可能とする説明的価値を持っている。しかしこの歴史は起源から出発して発達する状況を順を追って記録していくようなものではない。このような発達史であれば、心理主義による発生論的な説明で充分こと足りるはずである。[6] ここで行われる遡及作業は、理念的な再構成である。数の分析によって明らかになる単位としての1と1からはじまる後続者の系列という一般定義から個々の数を定義し直すだけでは不充分であり、この一般定義から数を定義するための、さらにより一般的な手続の存在が問われるのである。[7] 第二に、この場合移し換えの関係にあるふたつの体系・論理学と数学とはまったく異質な体系であるということが重要である。論理主義で扱われる還元とは、(潜在的であるにせよ)もともと複合的であるものを単一の要素へ解体するのとは全然別の作業だということが指摘できる。単純化すれば、論理学にはたとえば数を構成するための質料的な対象は存在していない、つまり構成とはいっても数学的対象に相当する同質な構造がはじめから備わっていないのである。[8] したがって還元-構成の新しい概念が要求されることになる。大雑把な言い方をすると、それは、数という算術における基本的要素をより単純な幾つかの要素へ並行的に置き換えるのではなく、数として析出する構成手続の過程を記述することである。第三に、数学的知識にすべての知識の範型となり得る理想的な在り方を認めるという立場を考慮にいれなければならない。数学的知識の特質とは数学的真理の普遍性と必然性とにある。これを擁護するために、数学が論理学へと還元されるとすることは積極的な力を持つように見える。数学が実際に辿った発展の歴史から見て、数学的概念の偶然的発見、創造的な発明の側面が強調されることがあるが、それでも数学的知識を総体として考えれば、その中で概念が置かれる位置は概念が表現される命題相互の関係によって決定されている。その位置は相互的関係の中で一意的に決まるのであり、直接その概念に関わる命題もおなじく他の命題との関係によって位置を得ているのだから、体系の中で概念は一定の価値を持つのである。そしてその位置は一度決まってしまえば、変わることの無い不動性を獲得する。こうした数学的真理の確実性は他の自然科学には見られない。これらの領域では新しい有用な知識をもたらす命題は外界の情報を記

述したものに外ならず、命題の真理はその情報との対応により確認される。そのような有用な命題の価値は認められやすい、しかし、数学的体系はそのような命題ばかりで構成されているわけではない。直観的な推論で見落とされる、厳密な推論における一見無用の各段階は、推論規則にのみしたがう必然的関係によって互いに結びついた命題であり、それらが数学的真理の確実性を裏付けているのである。

1

P. Benacerraf によれば、論理主義は一般につぎのような構造を持つ——

1. 算術の真理は論理学の真理に翻訳され得る。
2. (1) はつぎのことから論証される、
 a 算術に属す〝論理-外〟の語彙（概念）に対する定義を〝純粋に論理学的な〟用語で与える、
 b これらの定義によって導かれた翻訳は、算術的真理を論理学的真理に、算術的誤謬を論理学的誤謬に移しかえることに注意する。
3. したがって、この算術的論証が数学的命題の分析性を確立するために要請される、何故なら、(a)定義はおそらく意味を保持しており、論理学的翻訳はもとの算術的意味と同じ意味を有している、(b)論理的意味はそれ自体、意味により、この場合その真理の中に現れる論理学的定項の意味によって、真であると考えられる（故に分析的である）。[9]

算術的命題が論理学的命題に翻訳され得るということはつぎのことを含んでいると考えられる

（i）算術的命題は要するに論理学的命題なのだから、定義と論理規則のみによって規定される、したがって分析的である

（ii）また当然、論理学的命題がそうであるのと同じく、算術的命題は命題の語そのものの意味によって、真理性を確認することができる

これに加えて、算術が学問であるかぎり、つまり算術が正しく一貫した主張の体系であるためには、矛盾をひきおこさぬよう法則にしたがわなければならない、

（iii）算術の体系の中で、命題は論理学に属している論理規則にしたがって演繹されている

つまり、論理主義で主張されている算術的命題の分析性とは、論理的法則による――必然的とされる――命題間の関係の相互的な支持と、各命題の真偽を命題を造り上げる語の意味から確認できるという以上のことではない。

これで論理主義を規定するふたつの契機が分節された――

A　明示的な定義からはじまる推論の規則への遵守

B　算術的命題の分析性

Aは言うまでもなく、科学の確実な基礎を求めるという要請に沿っている。ただこれは、数学に限らず、首尾一貫した真なる体系を造り上げようとするときにはつねに必要なことである。こうした厳密な体系の例としてユークリッド幾何学が挙げられるように、経験的にのみ正しさが確かめられ信じられてきた言説を、実際に真理であると検証するために必要な手続であり、こうした整備が可能であるか否かが科学的言語を分類する際重要な指標となる。たしかに、厳密な学問としての数学を求めるという目的のためだけならば、まさしくユークリッド幾何学に範をとり、所謂公理的方法――定義されない原子語を定め、推論規則を与える――を数学のために提示しさえすればよいのである。[10] しかし当然ながら、（幾何学がそうであるように）Aである命題がいつも分析的であるわけではない。ところがフレーゲはAだけでなくさらにBをも明確に主張している。フレーゲによれば、命題を証明して基本的真理へとたどりついたとき、その過程で普遍的論理規則と定義以外に出会わ

ないならば、その命題は分析的であるとされる。[11] この定義にしたがうときに、BはAを自動的に含意することになる。

逆にAに属す命題が分析的であるとするためには、さらになんらかの制限が加えられなければならないだろう。その場合には最初に定義で与えられる要素より外のものが演繹の途上で紛れ込むのを厳格に排除するということである。つまりここで求められているのは純粋に理論的な、経験による干渉と無関係に成立し得る、そのような命題の体系である。その例として先ず第一に論理学が想定される。とはいえ、論理学の中立性は、経験からの独立というより、むしろ、論理学が個別の主題となるべきものをはじめから欠いていること、その無内容なことに因る。もちろん算術はそのような体系ではない。算術的命題は算術に属する対象について語っているものである。しかし算術の対象が持つ純粋な理論性は特権的なものである。フレーゲは算術に属する思考に他の何にも優先する第一義的に基本的な資格を与えている。[12]『算術の基礎』ではそのような基礎的学問としての算術的命題の性格が問題にされているのである。もしも算術的命題が完全に論理学に還元できるのであれば、算術的命題は分析的であり、つまりAとBとは同等、というよりは同じことを述べていることになる。

2

算術的命題が分析的であると明示的に主張することの意味は何だろうか。算術を確実な基礎にもとづいた厳密な体系にしたいという、いわば数学基礎論に属する関心からだけ見れば、この主張は必ずしも必要でないと考えられる。この主張はフレーゲの哲学的関心から出てきたものであると言うことができるだろう。論理主義をめぐる事情について、フレーゲがあらかじめ持っていた数学的知識に対する理念的な予測が、現実の技術的障害によって覆されたという説明が可能である。

うえに見たようにフレーゲ版論理主義は、(i) 数学の基礎、(ii) 数学的知識の本性、のふたつを同時に説明しようとしている。実際的には、i、iiにはそれぞれ、

（i′）数学を導き出すために充分な強さと広さを備えた論理学の体系（一階・二階述語論理、或いは集合論）を確定する。

（ii′）数学的知識の本性――この場合フレーゲはその命題は分析的であるとしたのだが――を原理的に説明することのできる論理学の具体的な在り方を観察する。

このような作業が必要になる。論理主義を擁護する要点はもっぱらii―ii′とつらなる線――数学的知識は如何なるものでなければならないか――に関わっている。『算術の基礎』で展開される心理主義批判はこの文脈のなかに置かれる。論理主義の失敗とは、そこからi―i′の線へと進んだときにフレーゲが築いた形式的体系が充分整備されていなかったことが明らかになったという事態を指している。しかし、形式化の失敗はそのままそれに先立つ数学的命題の本性に関する予想をも否定することに繋がるのだろうか？論理の路筋としてはそうであると言わざるを得ないように思われる。たしかにラッセルに『算術の基本法則』の矛盾を指摘された後、晩年にフレーゲは算術を幾何学に還元するという可能性について論じている。幾何学的知識の身分については、カントと同じく綜合的-ア・プリオリであるとしていることからすると、このことから、算術の形式化された体系的性格を保持しながら、その知識の源泉と命題相互の関係については綜合的な性格を容認するということが帰結するのかもしれない。ただそうであるにしても、フレーゲが数学的知識に或る範型的性格を与えることをも含めて放棄してしまったとは考えられない。しいて言えば、それはア・プリオリ性にかろうじて残っていると見ることもできる。しかし、綜合性を認めてしまうことの決定的な欠点は、命題の真理性の根拠を言語以外に求めざるを得ない、直観にもとづいたものにせざるを得ない、というところにある。そもそも、フレーゲが分析-綜合という選択肢を設定した文脈は、直観批判という動機と密接に関連していたはずである。その命題を成す語の意味だけによるのでなく、語によって喚起される心像を介してはじめて理解できるとする、そのような数学的知識の在り方への解釈を許さないというのがフレーゲの基本姿勢であった。

3

論理主義擁護における本質的な要点は、うえに挙げたii－ii′の線、すなわち算術的命題を分析的とする数学的知識の本性に関する主張に在ることが判った。論理主義の失敗に直面して感じる違和感とは、論理主義の本質と見えるこの規定が、失敗の原因である具体的な技術的難点とはべつの水準に位置しており、どのような場合にも維持されるべき主張であるような印象を与えることに因るらしい。とはいえ『算術の基礎』で展開される分析概念についての議論は——算術的命題の厳密性を命題の必然性に求め、それが分析性に根拠を有すと考えるとすると——微妙なものである。

カントとフレーゲを分かつこの点の議論を考察してみよう——

数学的判断はすべて綜合的判断である。この命題は極めて確実であり、何びとといえどもこれを反駁し得るものではない。従ってまた甚だ重要であるが、それにも拘らずこれまで人間理性の分析者達に気づかれなかったし、それどころかかかる命題は、彼等の予期に反するもののようである。彼等は、数学者の推論がすべて矛盾律によって行われること（このことはおよそ必然的確実性の本性が当然要求するところである）を知っていたため、数学的原則もまた矛盾律によって認識されると思いこんでしまったからである。しかし彼等は、この点で思い違いをした。綜合的命題は確かに矛盾律によって理解せられ得るが、しかしそれはいま一つの綜合的命題が前提せられて、この命題からさきの綜合的命題が推論せられ得るような場合に限るのであって、決して当の綜合的命題が他をまたずにそれ自体として理解せられ得るわけではないからである。[B14]　（篠田英雄訳）

わたしは、算術的命題の分析的性質が蓋然的以上のものであるとは主張しない。何故なら、その証明が純粋に論理的な法則のみから引き出されることが可能か、何処かで外の種類の証明の根拠が気づかれずに混ざっていないか、つねに疑われるからである。この懸念は、わたしがいくつかの証明で与えた指示によっても完全に無くなることはない、そのことは、隙間の無い推論の連鎖によってのみ可能なので、いかなる〔推論の〕段階も、純粋に論理的と認められた数少ない推論法のいくつかによってでなくては成立しはしない。したがって今日に至るまでほとんどひとつの証明も行われてはいない、というのも数学者は新しい判断への移行が自明に正しければ、この自明性の本性について、それが論理的なものか直観的なものか問うこと無しに、満足しているのである。［GIA §90］

ここでのカントの議論は、命題の推論の中での関係に注目しており、フレーゲの主張とほとんど同じ事を言っているように見える。事実フレーゲはこの箇所に関連してつぎのように言っている――「カントは分析判断の価値を明らかに――結果として狭すぎる概念規定をして――過少評価している、たとえ、彼がここでわたしのより広い概念を仄めかしているように見えたとしても」［§88］。「狭すぎる概念規定」とはカント流の主語・述語各概念の包摂関係による分析-綜合の定義を指している。フレーゲによれば、カントは概念をそれを構成する特質を列挙したリストとして定義されると考えていると言う。[13] 命題を成す主語概念と述語概念とのそれぞれのリストの比較対照によって分析-綜合が判定されるわけである。したがってカントがここで言う綜合的命題の依存関係とは、主語概念のリストから漏れた述語概念のリストの項目を理解するために別の綜合的命題が前提されることが不可欠だという事態のことである。こうした命題の関係を推論と呼ぶことができるだろうか。フレーゲはリストの項目は内的に有機的に結びついていると言う。そしてこの有機的結合が前もって知ることのできないような新しい帰結を推論の各段階でもたらすのであり、カントはこの拡大性を綜合性の指標としたのだとする。[14] こうして依存関係はもっとも基本的な命題にまでつづき、したがってカントの言うように綜合性を採れば最終的には直観に基盤を置くは

ずである。この基底的命題の源泉の点を別にすれば、推論の中での命題の関係の必然的な性格は、それを分析的とするか綜合的とするかに因らず同質であると言わざるを得ない。すくなくともフレーゲの正当化による命題の関係の確認と、カントの言う命題を理解するために不可欠な命題の依存関係とは別のものであると言い切るに充分な根拠はここには無い。

算術的命題の分析性を蓋然的以上とは言えないとする、フレーゲの慎重さが或る意味でそれを裏書きしている。推論規則を明示的に与え明晰な定義から演繹される場合にも、概念の有機的な結びつきのすべてを網羅的に抽き出すことはできない、つまり隙間の無い完璧な推論は単に理想的な位置にとどまる。したがって数学的命題の分析性という概念は、個別的な例示によって説明されるようなものではあり得ない。[15] 要するに充全に整備された形式的体系における推論の中では命題相互の関係は分析的である、と言う以上のことはできないのである。命題の性質の区別は、その内容ではなく、命題の正当化に関わるとしたフレーゲの定義にしたがえば、命題の性格が分析的とされるときには正当化は演繹的体系における証明の問題へと移行する。というより、むしろ証明が問題にし得る場面においてだけ、分析性が概念として機能する場所が開けると言ったほうがよい。この正当化＝証明の手続を経てはじめて、命題の性格を分析的と判断する権利を持つことができる。「これらの概念〔分析的-綜合的概念〕そのものが哲学に属すとしても、わたしが思うに、〔分析的か綜合的かという〕決定は数学の助け無しには解明できない」［§3］。

このようにして見れば、分析性-綜合性の選択が命題間の必然的な関係を認めさえすれば瑣末ではないかとの印象は誤りであることが判る。推論の分析性は蓋然的でしかないとしても、その基盤である隙間の無い推論の連鎖が証明にとって不可欠なことは明らかである。カントの主張する綜合性における依存関係とは、あくまでも命題の理解に寄与する主語・述語が表現する概念の解明にすぎず、証明には本質的に関わってはこない。[16]

4

ここまでの議論で論理主義が持つ説得性の構造はかなりはっきりして来たようだ。それはひとくちに言えば、数学に厳密な基礎を与え、同時に数学的知識の本性をよく説明する、論理学における推論の必然性に在るということになる。推論の必然性——カントの言葉を借りれば、矛盾律による推論の必然的確実性——とは要するに、①基本語を必要最小限なだけ選び出し明晰に定義する、②推論規則についてもあらかじめ取り決められた外のものを使用しない、といういわば規約主義的な考え方によって説明できる。つまり必然性を規約によって支えられている論理学と或る対応で関係する数学は論理学と同型の論理性を保持しているということである。

この対応とはだいたい次のような事態を指している——

数学の命題が論理学の命題に置き換わる——論理主義の文脈に置き翻訳と呼び換えてもよいが——場合には、置き換えられた論理学の命題中の論理語の順序・組合せから、形式的手続によって文法的に正しい文かどうか、さらに命題としての真偽を機械的に知ることが可能である。正しく綴られた命題を得ること、規則にしたがっているとは、言い換えれば、命題と命題との間に生ずる関係である。体系の中で命題が真であるというのは、その命題に至るまでの推論が妥当であること、つまり真なる命題が妥当な推論で連なっているということに外ならない。他方で数学的命題が単独で与えられ、その真偽を知るためにこの命題を証明しようとすると、この命題を導出する推論を再構成しひとつ前の段階の命題へ後退しなくてはならない。このようにひとつひとつ前の段階に遡る作業をつづけて、最終的に真であることが確実な命題（場合によっては公理）にたどり着いたとき最初に与えられた命題が真であることが確かめられる。命題に対応する翻訳が存在するということは以上すべてを含んでいると考えられる。ただしこうした証明の手続によってはじめて明らかになる演繹の過程と、推論規則に

したがうことで自動的に命題が形成されていく推論の径路とは、分けて考えられるべきである。このふたつは実質的に同じ推論ではあるが、外部の言語に写し換えられることによってはじめて証明の対象となる命題がしたがっていた規則が明るみに出されるのであり、同時に他の命題との関連も浮かび上がってくる。証明とは数学の外で論理学という別の言語がこうした並行関係にあることを指している。[17]

ところで、確実性という観点から見れば、つねに真である推論を維持するために推論の各段階で規則を適用する正確さを要求されるのは当然である。しかし確実に真であるという意味で、論理そのものの在り方、たとえば恒真式を考えると、この場合その空虚な形式のみの演繹について推論の性格を云々することはまったく意味を成さないように思われる。恒真式が有している妥当性は数学的知識の確実性・必然性が根拠づけられるひとつの側面ではあるが、それと数学的対象自体が持つ論理性とは別ではないかという疑いが起こる。これまで無造作に用いてきた〝数学的知識の確実性〟という概念にはこれらふたつが潜在的に含まれているように見えるのである。要するに、数学はたしかに論理規則にしたがって演繹されるが、それは一貫性を維持するためという意味では他の理論的学問にも共通の、いわば必要最低限の論理ではないか、それに対して数学固有の論理性の存在を想定しているのである。

さて、このようなふたつの階層を数学の中で区別することが論理主義の失敗について何らかの説明を可能にするように思われる。それは数学が論理規則にしたがっていると認められるならば、論理主義にとって最大の課題は数学が扱う対象を論理へ翻訳することの内にのみ在る、破綻の原因は数学的対象を論理へ還元する過程へ帰着するということである。このことは数学基礎論の歴史が教える事実からも確かめられる。つまり、算術の成立に必要な無限個の対象の存在を保証するために導入される手続を論理的な法則のひとつとすることはできないのである。[18] これは思考の路筋を支配する論理規則とその主題となる対象とは異質であるという直観的な理解にもなじむものだ。[19] 自然数が無限につづく列のような数学的構造が把握されるのに直観を介すると考えるのはごく自然であると言える。逆にプラトン主義的な措定をせずにこの種の対象について考え

るのは難しい。このように規則と対象という仕方で階層を設けることは、言語に対照して対象の領域を認めることに容易に繫がってしまうのである。数学的対象がプラトン主義的に把えられるとすれば、認識者の恣意のままにならないという点では、それが経験によって与えられるのでないことを措けば、物理的対象とかわるところは無い。したがってこの場合、数学はそのような理念的対象についての情報を記述する命題の体系だということになる。

こうした直観による数学的対象の導入をフレーゲが容認しないことは明らかである。もしフレーゲにプラトニストの名が与えられるとすれば、論理学の領域についてその自存性を第一義に考えていたということに対してであって、直接数学的対象の存在自体を認めていたわけではない。プラトン主義が問題となるときには、知覚を介する外在的物理的対象から像を構想することが不可欠のように見える幾何学的対象を経て、類比的に数学的対象の在り方を予測しがちである。これまで見てきたフレーゲの考え方にしたがうならば、数学的対象は論理的過程によっていわば構成されるものなのである。したがって数学的対象の情報は論理に還元され、そのことによって明晰なものとして表れる。

5

このように見るとフレーゲが占める特異な位置が明らかになる。論理実証主義者が援用したのは、論理主義が数学の規約主義的な論理性の在り方——自律的な、各対象の相互的関係によって結ばれる内部で完結した抽象的な組織、たとえば代数に見られる構造——に沿う構造を有しているという点であった。[20] このことは規約による必然性という概念がフレーゲの分析性の定義に密接に結びついていることを示す。だが一方で論理実証主義者の目的は数学におけるア・プリオリズムを否定することにあったのだから、この関係は直接的であるとは言えない。[21] しかも数学的知識に範型的性格を認め、論理的基盤に由来する数学的対象の実在的位置を維持しながら、その命題の性質については綜合性を拒否していることを考え併せれば、フ

レーゲの立場は経験主義と先験主義との混合物のようなものに見えなくもない。哲学史的な観点からすれば、概念が発展する初期にしばしば起こり得る未分化な混淆状態としてかたづけることも可能だろう。しかしフレーゲの主張を字義通りに受け取ること、経験主義と先験主義とのあいだに路を見出すことを試みなければならない

論理主義は、数学が還元されるとする論理の範囲をどう考えるかによってその意味を変える。一階述語論理を選ぶとすれば、無限個の対象の存在が記述できないために対象一般をどのように取り扱うかがただちに問題となる。集合論の場合には、最初から集合概念を把握するために直観が前提されているので対象を導入する困難は起こり得ない。[22] この事情は自然言語においても本質的に同じである。これまで対象というものは何らかの対応を保証された「名」によって言語の中へ密輸されてくるのみだったと言うことが可能だろう。フレーゲが考えたような深く素朴な論理性の概念、思考を支配する言語過程によって、最も基本的な理念的対象を規定する可能性を探るという思想が重要な理由はここにある。

しかし実のところ論理主義が何を意味しているか、論理主義のプログラムを実行するとは具体的に何をすることなのかは必ずしも明確ではない。思考の順序について言えば、独立した論理学・数学のふたつの体系に或る同一性を認めることから論理主義は着想される。単にこれまでの算術に正確な証明を与え整備することが目的なのではなく、ここから形式言語を用いてこれまでのものと同等ではあるがそれに代わり得る別の算術を基礎から新しく造り上げることが求められる。ただその場合、新しい算術が扱う数は全く任意に定義し直されるわけではないことに注意しなければならない。[23] 新しい算術が算術であるかぎり、数の概念は現在の算術から抽き出してくる外無いのである。その際現在与えられている数に関する理解が自明でも最も基本的でもないことを分析によって示すと同時に、実践的に現在の算術と同じ効果を得ることが可能な数の再構成が焦点となる。この過程は厳密性が要請する基礎付けの根拠や確実性が必要とする条件となるだけでなく、最終的に論理性に収斂する理念的対象としての数学的対象への予想に規定されている。この予想は還元・翻訳という論理学と数学との関係を想定する場所にはじめて見出されるのである。

註

『算術の基礎』*Die Grundlagen der Arithmetik* 1884(GlA)。テクストとしてJ.L.Austinによる対訳版第二版、Northwestern University Press 1980を用いた。本文の翻訳は筆者自身によるものである。

（1）B. Russell, *An Introduction to Mathematical Philosophy* 1960（平野智治訳『数理論理学序説』岩波文庫 p. 254.）, R.L. Wilder, *Introduction to the Foundations of Mathematics* 1965（吉田洋一訳『数学基礎論序説』培風館 p. 297.）, P. Maddy, *Realism in Mathematics,* Oxford University Press 1990, p. 26. こうした論理主義を積極的に主張しているわけではない概説書と起点となる最初の認識は共通である。

（2）GlA §1.（3）GlA §3.（4）GlA §3.（5）GlA §2.

（6）GlA p. viif. たとえば、「事物の発生を探り発生から本質を知ろうとする歴史的観察法は、たしかに大きな正当性を持ってはいるが、限定されたものである」。

（7）GlA §5. また §18、「このような〔数式一般に当てはまる〕法則はまさにその一般性の故に個々の数の定義からでなく、整数の一般概念からしか帰結し得ない」。ここに数学と論理学との間に一般性の階層を想定していると読み込むことも可能だろう。当然、これには論理学がより確実で自明であることが前提されている。

（8）形式的に厳密に言えば、これは論理の範囲を最も小さく、つまり一階述語論理として考えた場合にそうなるということである。註22参照。しかし、言うまでもなく論理を規則という観点から最も狭く考え、そこから数学を導出するというのが論理主義の理想的なかたちである。

（9）P. Benacerraf, "Frege : the last logicist" in *Midwest Studies in Philosophy* VI (1981), p. 18. 翻訳は筆者による。この小論はBenacerrafの議論に多くを負っている。Benacerraf はここで数学者としてのフレーゲの動機というものを最大限に読み込もうとしている。論文そのものへの評価はどうあれ従来あまりに哲学的に解釈され、すでにできあがってしまった論理主義に対

する観点からのみ読まれてきた『算術の基礎』の評価に疑義を呈し、相対化したという点で有益な示唆を含んでいる。とくに証明概念から体系的な命題相互の関係へ注目していくという論点は検討に値すると思われる。註15参照。

(10) もちろんフレーゲ自身の方法が公理的であるわけではない。

(11) この論理規則は通常の意味での〃一般的〃論理規則ではない。元-真理 Urwahrheit(GlA §3) と同じ水準に属すると考えられるべきである。

(12) GlA §14. (13) GlA §88. (14) GlA §88.

(15) こうした〃分析的〃命題は推論の連鎖の中に埋め込まれている。この、命題の位置を決定している命題間の支持関係が潜在的なまま保持するような連鎖を形而上学的と呼ぶこともできよう。cf. Benacerraf , op. cit., pp. 26f. このような形而上学的な体系が最終的な基盤を置く元-真理とも呼ばれるもの (註11参照) が約定によって与えられる定義や公理とは全く異質であるということに注意しなければならない。この真理はもっと原理的な水準で根拠なのである。

(16) 理解という位相で考えれば、或る判断が成されたときにすでにその命題は理解されているはずである。cf. GlA §3, 「まず命題の内容を獲得し、その後はじめて別のより困難な路を通って、それによりしばしば妥当性の条件をより正確に学ぶことのできるような証明にたどり着くというのはありそうも無いことである。したがって一般に、いかにしてわれわれが或る判断の内容に到達するかという問は、われわれが言明に対する正当化をどこから得るかという問と分けなければならない」。また、すくなくとも綜合的命題が直観の補助をまってはじめて理解されるようなものであるかぎり、4で触れる形式言語への翻訳という点で大きな難点を抱えることはたしかだと考えられる。

(17) このような過程を精確に行うというのが『概念記法』が書かれた動機であった。cf. GlA §91, p. 103, 脚註、「わたしの概念記法はブールの表記法のように単に論理形式だけでなく、内容をも表現できるようにしてある」。

(18) 無限公理をめぐる議論がそれである。

(19) ここに暗に前提されているのは「数学=論理+数学的対象」という図式である。とはいえこの単純な理解からそのまま論理主義の失敗が対象導入の過程のみに関わると断定してしまうのは危険であろう。

(20) 当然純粋に規約によってのみ支配されているこうした数学的構造と自然数の無限列といった算術的対象とは区別されなくては

ならない。cf. 飯田　隆、『論理哲学大全II』勁草書房 1989, pp. 130-135.

(21) 論理主義と論理実証主義の関係については、cf. 飯田、前掲書 pp. 123-129.

(22) フレーゲが集合の概念に懐疑的だったことに注意しておこう。それにもかかわらず『算術の基本法則』で展開される論理学が実質的には集合論を含むような二階述語論理であったことを考慮すると、ここに論理概念についてのフレーゲの考え方が示唆されているように思われる。

(23) Cf. J. Weiner , "The philosopher behind the last logicist" in C. Wright (ed.) , *FREGE tradition & influence,* Blackwell 1984, pp. 75-77. この論文はBenacerrafに対する直接の応答である。一言で要約すれば、Benacerraf の関心は証明という基礎への解体の方へ向いているのに対して Weiner の関心は体系の再構築に向いていると言ってよい。Weiner によれば、『算術の基礎』における証明という観点を強調するあまりBenacerraf は証明の起点となる定義について証明に資する多産性 Fruchtbarkeit (GlA §70) のみに注目して他の言語哲学への成果を無視していると言う。これに対して Weiner は証明が基盤を持つ定義にフレーゲの指示概念を厳格に適用すべきであり、その場合フレーゲが定義を与える以前には数の概念は指示対象を有していないと理解されなければならないとする。後に明らかになる論点をどれだけ『算術の基礎』の文脈に読み込めるかという問題はあるにしても、論理主義によってもたらされるかもしれない認識論的枠組の変化を示唆している点で興味深い。cf. Benacerraf , op. cit., p. 27f. ; Weiner , op. cit., p. 71.

（本学大学院博士課程・西洋哲学史）