

A study on CNOT-based quantum circuits using rewriting systems

坂下, 一生

<https://doi.org/10.15017/1398533>

出版情報：九州大学, 2013, 博士（機能数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：全文ファイル公表済

氏名・(本籍・国籍)	さかした いっせい 坂 下 一 生 (鹿児島県)
学位の種類	博士 (機能数理学)
学位記番号	数理博甲第159号
学位授与の日付	平成25年10月31日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当 数理学府 数理学専攻
学位論文題目	A study on CNOT-based quantum circuits using rewriting systems (書換え系を用いたCNOT量子回路に関する研究)
論文調査委員	(主 査) 准教授 溝 口 佳 寛 (副 査) 教 授 谷 口 説 男 准教授 吉 田 寛

論 文 内 容 の 要 旨

本論文の主題は書換え系を用いた CNOT (制御 NOT) 量子回路の簡約化である。項書換え系はプログラム言語の抽象解釈や数式処理システムのモデルなどに用いられ、プログラムの最適化、プログラム検証、自動定理証明など様々な分野に応用されている。また量子回路は量子計算アルゴリズムを表現する計算モデルである。量子計算のアルゴリズムを実装する上で必要となる量子ゲートの数を減らし、より小さな回路で量子計算アルゴリズムを実現することが課題の1つである。

本論文では CNOT ゲートによって構成される量子回路 (CNOT 量子回路) の等価変換を文字列書換え系で定式化し、量子回路の簡約化への応用を考える。CNOT ゲートは重要な量子ゲートの一つで、1量子ゲートと CNOT ゲートの組み合わせで任意の量子回路を構成できることが知られている (計算万能性)。簡約化を行う上で書換え系の持つ性質のうち合流性が重要になる。合流性を持つ書換え系による回路の変換結果は一意であることが保証される。そこで量子回路を簡約化するために必要な合流性を持つ書換え系の性質及びそれを導く等式集合について考察を行う。

本論文は以下の様な構成になっている。まず、第1章では研究の背景を述べる。

第2章では、書換え系に関する様々な定義を述べる。書換えを行う上で書換えが停止すること (停止性)、書換えの順序によらず結果が一致すること (合流性) は書換え系において重要な性質である。この性質を持つ書換え系を構成することは CNOT 量子回路の書換えを効率的に行う上で重要である。合流性を持つ書換え系を導く手続きとして Knuth-Bendix の完備化アルゴリズムが知られている。本章では危険対という概念を導入し Knuth-Bendix のアルゴリズムの概要を紹介する。

第3章では、まず量子回路・量子ゲートに関する基本的な定義を行う。次に量子ゲートを書換え系のアルファベットとし量子回路間の等価変換を書き換え規則として定式化する。書換え系と等式理論には深い関係があることが知られている。そこで我々は3量子ビット CNOT 量子回路間の等式からなる等式集合を与え、その等式集合から Knuth-Bendix の完備化アルゴリズムを用いて完備な書換え系を求める。この完備な書換え系から 168 種類の CNOT 量子回路が存在し、任意の CNOT

量子回路を高々長さ 6 で構成できることを示す。一般に Knuth-Bendix の完備化アルゴリズムは初めに与える等式集合によって結果が異なる、そこで同じ完備な変換規則集合を得るのに必要な等式集合の大きさの最小値についての考察を行い少なくとも 8 種類の等式を必要とすることを示す。最後に一般の n 量子ビット CNOT 量子回路に拡張について考察する。 n 量子ビット CNOT 量子回路を書換え系として扱う際には非常に多くの書換え規則が必要となるがこれまで行なってきた定式化と同様に議論できることを示す。

第 4 章では、一般の文字列書換え系に関する手続きの Mathematica ソフトウェアによる実装について述べる。まず Knuth-Bendix の完備化アルゴリズムを実現するために用いた危険対を見つける関数や簡約を行う関数等についてその例を挙げながら示す。さらに得られた完備な変換規則集合は一般に既約ではないことから既約化手続きの実装について述べる。最後に CNOT 量子回路の書換え系を別の角度から考察するためにケーリーグラフを求めそれを描画した。さらにグラフの直径と最小回路の長さの上限が一致することや回路の種類が 3 章で得られた結果との整合性を確認する。

論文審査の結果の要旨

本論文では、量子アルゴリズムを表現する上で用いられる量子回路の数理モデルとして文字列書換え系を用いて定式化する。この書換え系で用いる書換え規則は回路の意味を変えずに量子ゲート数を減らすものを用いる。Knuth-Bendix アルゴリズムを用いて量子回路のモデルとしての文字列書換え系の完備な変換規則を得る。この完備な変換規則を用いて任意の回路を簡約化することで等価な回路たちに対して唯一の少ないゲート数の回路(標準形)を得ることが出来る。一般に Knuth-Bendix アルゴリズムは初めに与える等式集合によって結果が異なるが、同じ完備な変換規則集合を得る為に必要な等式集合の最小の部分集合とその大きさについての考察も行なっている。

量子計算は 1980 年代に発案され、1990 年代に Shor のアルゴリズムや Grover のアルゴリズム等の従来アルゴリズムより効率よく計算が行える量子アルゴリズムが提案されている。量子回路集合の万能性についても多くの考察が行われており、様々な量子ゲートの部分集合に対して、その計算万能性が示されている。例えば 1-qubit ゲートと CNOT ゲートの組合せで任意の量子回路を表現出来ることが知られている。そして、与えられた量子回路と等価な回路の中で最小のゲート数の回路を求めることは重要な課題のひとつである。

文字列書換え系の最も重要な問題のひとつに語の問題(word problem)がある。一般に有限文字列書き換え系に対する語の問題は非決定的であるが、変換規則集合が停止性と合流性を満たすならば決定的である。与えられた等式集合から停止性と合流性を満たす変換規則集合を求めるアルゴリズムが Knuth-Bendix アルゴリズムである。

本研究者は、量子回路の等価変換を一般的に議論できるように文字列書き換え系を用いて数理モデルとして定式化しその性質に関して議論を行なっている。最初に 3-qubit の量子回路に対して完備な変換規則に関して停止性と合流性を満たす変換規則集合を求めた。さらにその結果から、全ての標準形を求め、その総数、必要なゲート数を全て調べた。次に等価な書き換え系を導くための初期等式集合について考察している。そして、与えられた等式集合の中で最小の部分集合を求め、また、必要不可欠な等式についての考察を行っている。

最後に、本研究において利用した文字列書き換え系に関する手続きを全て Mathematica ソフトウェアにより実装し、結果を検証している。具体的には、変換規則集合の危険対を求める関数、Knuth-Bendix の完備化アルゴリズム、標準形で表現された回路集合をケーリーグラフとして表示する関数などを実現した。これらを用いて、回路構成に用いる基本ゲート集合を与

えて生成可能な全ての回路を構成し、その中で必要なゲート数が最大である回路やその最大ゲート数などを具体的に計算している。

このように、本研究者によって定式化された量子回路の簡約化のための文字列書き換え系は、量子回路の新しい側面の数理モデルであり、また、そこで得られた計算結果や知見は数学的にも価値が高く、理論面でも応用面でも新たな可能性を開くことが期待出来る。また、以上の結果は、理論計算機科学の分野においても特に価値がある業績と認められる。

よって、本研究者は博士（機能数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。